Приложение № 2

Чтобы найти корни уравнения четвертой степени, необходимо сделать несколько шагов и сделать несколько замен переменных. Слабая двухосновная кислота (AH_2),
$h^4 + a \times h^3 + b \times h^2 + c \times h + d = 0.$
Сделав замену переменной $h = x - \frac{a}{4}$, получаем уравнение:
$x^4 + x^2 \times p + x \times q + r = 0$ (1), где
$p = b - 3 \times \frac{a^2}{8}$
$q = \frac{a^3}{8} - \frac{b \times a}{2} + c$
$r = d - \frac{c \times a}{4} + \frac{b \times a^2}{16} - \frac{3 \times a^4}{256}$
Сложим и вычтем выражение $x^2 \times t + \frac{t^2}{4}$ из (1), чтобы получить сумму двух полных квадратов:
$\left(x^2 + \frac{t}{2}\right)^2 = (t - p) \times x^2 - q \times x + \left(\frac{t^2}{4} - r\right)$ (2)
Правая часть уравнения будет полным квадратом
$(t - p) \times x^2 - q \times x + \left(\frac{t^2}{4} - r\right) \equiv (K \times t + L)^2$
при $K = \sqrt{t - p}$, и $L = \frac{-q}{2 \times K}$ если
$D = q^2 - 4 \times (t - p) \times \left(\frac{t^2}{4} - r\right) = 0 = t^3 - p \times t^2 - 4 \times r \times t + (4 \times p \times r - q^2)$.
$t^3 - p \times t^2 - 4 \times r \times t + (4 \times p \times r - q^2) = 0$ Это кубическое уравнение называется “Резольвента Феррари”.
$t^3 - \alpha \times t^2 - \beta \times t + \varepsilon = 0$ где
$\alpha = -\mathrm{p}$
$\beta = -4 \times \mathrm{r}$
$\varepsilon = 4 \times \mathrm{p} \times \mathrm{r} - q^2$
Найдем корень резольвенты (см. приложение №1), для этого сделаем замену переменной $t = y + \Upsilon = \mathrm{y} - \frac{\alpha}{3}$, и получим уравнение:
$y^3 + \Pi \times y + Q = 0$ (3), где
$\Pi = \beta - \frac{\alpha^2}{3}$
$Q = 2 \times \frac{\alpha^3}{27} + \varepsilon - \frac{\alpha \times \beta}{3}$
$D = \frac{Q^2}{4} + \frac{\Pi^3}{27}$ Это дискриминант кубического уравнения.
Во всех наших случаях D отрицателен, следовательно:
$y = 2 \times \sqrt{\frac{-\Pi}{3}} \times \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)$, где
$\varphi = \arccos\left(3 \times \mathrm{Q} \times \frac{\sqrt{-3 \times \Pi}}{2 \times \Pi}\right)$
Теперь у нас есть один выбранный корень «y». Вернёмся к уравнению (2):
$t = \mathrm{y} - \frac{\alpha}{3}$
$K = \sqrt{t - p}$
$L = \frac{-q}{2 \times K}$
$\left(x^2 + \frac{t}{2}\right)^2 = (t - p) \times x^2 - q \times x + \left(\frac{t^2}{4} - r\right)$
$(t - p) \times x^2 - q \times x + \left(\frac{t^2}{4} - r\right) = (K \times x + L)^2$
$\left(x^2 + \frac{t}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{t - p} \times x - \frac{q}{2 \times K}\right)^2$, после извлечения квадратного корня из обеих частей равенства получаем:

$x^2 + \frac{t}{2} = \pm\left(\sqrt{t-p} \times x - \frac{q}{2\times K}\right)$

$x^2 + \frac{t}{2} = \pm(K \times x - L)$

Теперь у нас есть два квадратных уравнения и два дискриминанта D1 и D2:

$D1 = \frac{K^2}{4} - \left(\frac{t}{2} + L\right)$ и $D2 = \frac{K^2}{4} - \left(\frac{t}{2} - L\right)$, и отсюда четыре корня: x1, x2, x3, и x4.

Выбираем один корень так, чтобы $h = x - \frac{a}{4} > 0$. В итоге получаем функциональную зависимость h = f(B, A, K1, K2) и теоретическую кривую титрования ph= f(B, A, K1, K2).