

УДК 333.6.6.011

## КИНЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ИМПУЛЬСНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ, ИСТЕКАЮЩЕЙ В ВАКУУМ.

### II. СМЕСИ ОДНОАТОМНЫХ ГАЗОВ

А.В. Лазарев, Н.Н. Застенкер, Д.Н. Трубников, К.А. Татаренко, А.В. Прибытков

(кафедра физической химии; e-mail: tdn@phys.chem.msu.ru)

**На основе кинетического уравнения Больцмана построена модель расширения импульсной струи смеси одноатомных газов. Уравнение Больцмана решено методом Грэда. Для анализа системы моментных уравнений использовался метод сращивания асимптотических разложений. Рассмотрено поведение “скольжения” скоростей и разности температур в зависимости от условий в источнике и концентраций компонентов смеси. Установлена функциональная связь этих величин с формой потенциала взаимодействия.**

Сверхзвуковые импульсные струи и молекулярные пучки смесей газов используются во многих областях физики и химии, таких как изучение химических реакций, процессов релаксации энергии, получение кластеров и исследование их свойств, получение тонких пленок эпитаксией из струй и т. д. [1, 2]. В связи с этим заслуживает внимания интерес моделирование импульсных струй смесей газов с целью получения зависимостей, связывающих макропараметры струи с условиями в источнике струи и потенциалом межатоминого взаимодействия.

В работе [3] построена модель однокомпонентной сверхзвуковой импульсной струи одноатомного газа, истекающей в вакуум. Как и в случае непрерывных струй [4, 5] представляет интерес обобщение на случай многокомпонентных струй. При этом также возникают эффекты, обусловленные неравновесным обменом импульсом и энергией между частицами разного сорта (“скольжение” скоростей и разность температур компонентов). Теоретическое рассмотрение этих эффектов может служить основой для создания метода определения параметров потенциала взаимодействия частиц разного сорта по результатам экспериментального измерения температуры и скорости компонентов, а также для описания процессов “разгонки” тяжелого компонента в струе из смеси и газодинамического разделения компонентов струи.

Асимптотический анализ уравнений модели многокомпонентной струи в общем случае более сложен по сравнению с однокомпонентной струей из-за появления ряда безразмерных параметров (число Кнудсена для взаимодействия разных пар частиц, соотношения масс и концентраций компонентов). До-

полнительные трудности возникают из-за того, что в разных ситуациях порядок этих величин может отличаться, и в каждом таком случае необходим анализ порядка малости величины, по которой выполняется разложение, и определение области ее допустимых значений.

Цель настоящей работы – обобщение кинетической модели импульсной сверхзвуковой струи одноатомного газа, истекающей в вакуум, на многокомпонентный случай, а также и рассмотрение случаев предельных соотношений масс и мольных долей компонентов.

### Модель

По постановке задачи моделирование процесса нестационарного истечения многокомпонентной струи в вакуум не отличается от моделирования в случае однокомпонентной струи. Поскольку струя рассматривается как возмущенный равновесный поток газа, а описание равновесного невозмущенного течения возможно методами континуальной газовой динамики, выбирается граничная точка, в которой течение еще континуально, и рассчитываются значения параметров струи. Эти значения будут граничными условиями для моментных уравнений. В настоящей работе граничные условия и масштабные величины определяли так же, как в [3], но расширяющуюся смесь рассматривали как газ со средней молекулярной массой

$$\bar{m} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha},$$

где  $y_{\alpha}$  – мольная доля компонента  $\alpha$ . Считается, что течение сферически-симметричное, а частицы взаимодействуют со степенным потенциалом  $V_{\alpha\beta}(r) =$

$-4\epsilon_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha\beta}/r)^6$ . Подробное обсуждение предположений модели см. в [3].

Система кинетических уравнений Больцмана для нестационарного сферически-симметричного расширения смеси в вакуум записывается в безразмерном виде:

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + (\xi + u)\left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \xi} + \frac{\Phi^2}{r} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \xi} - \frac{\Phi(u + \xi)}{r} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \Phi} = Kn_s^{-1} \sum_{\beta} I^{\beta\alpha}, \quad (1)$$

где  $f_{\alpha}$  – функция распределения частиц сорта  $\alpha$  по скоростям,  $u$  – среднемассовая скорость смеси. В физическом пространстве введена сферическая система координат  $\vec{r} = (r, \theta, \zeta)$ , а в пространстве скоростей – цилиндрическая  $\vec{\xi} = (\xi, \varphi, \omega)$ .  $I^{\beta\alpha}$  – интеграл столкновения частиц сорта  $\beta$  и  $\alpha$

$$I^{\beta\alpha}(\vec{\xi}) = \int [f_{\beta}(\vec{\xi}') f_{\alpha}(\vec{\xi}_1') - f_{\beta}(\vec{\xi}) f_{\alpha}(\vec{\xi}_1)] \sigma_{\beta\alpha}(g, \chi) g d\vec{\xi}_1 d\Omega.$$

Здесь введено число Кнудсена источника  $Kn_s = (R_s n_s \bar{Q})^{-1}$  (индекс “s” обозначает условия в источнике),  $\bar{Q}$  – эффективное сечение рассеяния смеси [4, 5], определенное таким образом, чтобы учитывался вклад взаимодействий всех сортов частиц с весами, пропорциональными их мольной доле в смеси:

$$\bar{Q} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} Q_{\alpha\beta}^{(2)} (\sqrt{RT_s}) y_{\alpha}^s y_{\beta}^s.$$

Для рассматриваемого в модели степенного потенциала эффективное сечение  $l$ -го порядка имеет вид:

$$Q_{\alpha\beta}^{(l)}(g) = Q_{\alpha\beta 0}^{(l)} (C_{\alpha\beta}^{(l)} / E_{\alpha\beta})^{2/l},$$

где  $C_{\alpha\beta}^{(l)} = 4\epsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^6$ ,  $E_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} g^2 / 2$ .

(Коэффициент пропорциональности приведен в [6]).

Систему уравнений (1) решали методом Грэда в 13-моментном приближении, где функция распределения  $f_{\alpha}(\vec{\xi})$  имеет вид [7]:

$$f_{\alpha} = f_{\alpha}^{(0)} \left[ 1 + \gamma_{\alpha} w_{\alpha} \xi + \frac{1}{4} \pi_{\parallel\alpha} p_{\alpha}^{-1} \gamma_{\alpha} (2\xi^2 - \Phi^2) + \frac{1}{5} \gamma_{\alpha}^2 p_{\alpha}^{-1} (q_{\alpha} - \frac{5}{2} p_{\alpha} w_{\alpha}) \xi (\xi^2 + \Phi^2 - 5\gamma_{\alpha}^{-1}) \right].$$

В нулевом приближении выбирали локальное максвелловское распределение:

$$f_{\alpha}^{(0)} = n_{\alpha} \gamma_{\alpha}^{3/2} (2\pi)^{-3/2} \exp\left(-\frac{\xi^2 + \Phi^2}{2} \gamma_{\alpha}\right),$$

где  $\gamma_{\alpha} = m_{\alpha} / (kT_{\alpha})$ ,  $n_{\alpha}$  и  $T_{\alpha}$  – локальная числовая плотность и температура компонента  $\alpha$ .

Макроскопические параметры компонентов смеси и смеси в целом определяются как моменты функции распределения:

*числовые плотности*

$$n_{\alpha} = \int f_{\alpha} d\vec{\xi}, \quad n = \sum_{\alpha} n_{\alpha}, \quad d\vec{\xi} = d\xi d\varphi d\omega;$$

*массовые плотности*

$$\rho_{\alpha} = m_{\alpha} n_{\alpha}, \quad \rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha};$$

*кинетические температуры ( $T_{\alpha}$  и  $T$ )*

$$3n_{\alpha} kT_{\alpha} = m_{\alpha} \int f_{\alpha} (\xi^2 + \Phi^2) d\vec{\xi},$$

$$nT = \sum_{\alpha} n_{\alpha} T_{\alpha};$$

*давления*

$$p_{\alpha} = n_{\alpha} kT_{\alpha}, \quad p = \sum_{\alpha} p_{\alpha};$$

*диффузионная скорость*

$$w_{\alpha} = \frac{1}{n_{\alpha}} \int f_{\alpha} \xi d\vec{\xi} = u_{\alpha} - u.$$

Из определения среднемассовой ( $\rho u = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} u_{\alpha}$ ) и диффузионной скоростей следует, что

$$\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} w_{\alpha} = 0.$$

Тензор вязких напряжений  $\pi_{\parallel\alpha}$  и тепловой поток  $q_{\alpha}$  компонента  $\alpha$ , а также  $\pi_{\parallel}$  и  $q$  для смеси в целом определяются следующим образом:

$$\pi_{\parallel\alpha} = m_{\alpha} \int f_{\alpha} \left( \frac{2}{3} \xi^2 - \frac{1}{3} \Phi^2 \right) d\vec{\xi}, \quad \pi_{\parallel} = \sum_{\alpha} \pi_{\parallel\alpha},$$

$$q_{\alpha} = \frac{1}{2} m_{\alpha} \int f_{\alpha} \xi (\xi^2 + \Phi^2) d\vec{\xi}, \quad q = \sum_{\alpha} q_{\alpha}.$$

Масштабы переменных выбирали так же, как в [3]. При этом под  $m$  подразумевается средняя молекулярная масса смеси

$$\bar{m}_s = \sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha}^s,$$

где  $y_{\alpha}^s$  – мольная доля компонента  $\alpha$  в источнике.

### Моментные уравнения

Формальная процедура построения системы моментных уравнений во внутренней и внешней облас-

тях расширения в любом приближении по числу Кнудсена  $Kn_s$  полностью аналогична случаю чистого газа [3]. В нулевом приближении смесь расширяется как одноатомный газ со средней молекулярной массой  $\bar{m}_s$ . Эффекты “скольжения” скоростей и разности температур во внешней области расширения возникают соответственно в первом и втором приближениях по  $Kn_s^{1/(4-2\omega)}$  ( $\omega = 1/2 + 2/n$ ,  $n$  – показатель степени в потенциале взаимодействия). Чтобы избежать громоздких выкладок, выпишем лишь уравнения для указанных эффектов в значимых приближениях в интересующей нас дальней области. Подробный вывод системы моментных уравнений можно найти в работе [8].

В нулевом приближении решениями системы моментных уравнений являются известные континуальные соотношения:

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha 0} &= m_{\alpha} n_{\alpha 0} = m_{\alpha} y_{\alpha 0} n_0, \\ y_{\alpha 0} &= y_{\alpha}^s, \quad n_0 = \frac{g}{t^3}, \quad u_0 = \lambda, \\ T_0 &= \frac{g^{2/3}}{t^2}, \quad \Delta w_{\alpha\beta 0} = 0, \quad \Delta T_{\alpha\beta 0} = 0, \end{aligned}$$

где  $\lambda = r/t$ , а  $g = 5^{-3/2}(1 - \lambda^2/5)^{1/2}$  [3].

В первом приближении температуры компонентов равны континуальной  $T_1^1 = T_2^1 = T_0$ , поэтому разность температур  $\Delta T_{12}^1 = 0$ . Система уравнений для диффузионных скоростей  $w_{\alpha}$  и величин  $h_{\alpha} = q_{\alpha} - p_{\alpha} w_{\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2$ ) в этом приближении имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{\alpha 1}}{\partial t} + \frac{w_{\alpha 1}}{t} + \frac{5}{3} \left( \frac{1}{m_{\alpha}} - \frac{1}{\bar{m}_0} \right) \frac{g^{-1/3} g'}{t^3} &= R_{\alpha}^{10} / \rho_{\alpha 0}, \\ \frac{\partial h_{\alpha 1}}{\partial t} + u_0 \frac{6h_{\alpha 1}}{t} + \frac{5}{3} \frac{y_{\alpha 0}}{m_{\alpha}} \frac{g^{4/3} g'}{t^8} &= R_{\alpha}^{11}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} R_{\alpha}^{10} &= \sum_{\beta} G_{\alpha\beta 0}^{(1)} (w_{\alpha 1} - w_{\beta 1}) + \\ &+ \sum_{\beta} \gamma_{\alpha\beta 0} G_{\alpha\beta 0}^{(2)} \left( \frac{h_{\alpha 1}}{\gamma_{\alpha 0} p_{\alpha 0}} - \frac{h_{\beta 1}}{\gamma_{\beta 0} p_{\beta 0}} \right), \\ R_{\alpha}^{11} &= \gamma_{\alpha 0}^{-1} \sum_{\beta} \left[ G_{\alpha\beta 0}^{(5)} \frac{h_{\alpha 1}}{p_{\alpha 0}} + G_{\alpha\beta 0}^{(6)} \frac{h_{\beta 1}}{p_{\beta 0}} + \right. \\ &\left. + \frac{5}{2} \frac{\gamma_{\alpha\beta 0}}{\gamma_{\alpha 0}} G_{\alpha\beta 0}^{(2)} (w_{\alpha 1} - w_{\beta 1}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta 0}^{(1)} &= -\frac{16}{3} \mu_{\alpha\beta} n_{\alpha 0} n_{\beta 0} \Omega_{\alpha\beta 0}^{11}, \\ G_{\alpha\beta 0}^{(2)} &= -\frac{16}{3} \mu_{\alpha\beta} n_{\alpha 0} n_{\beta 0} \left( \frac{2}{5} \Omega_{\alpha\beta 0}^{12} - \Omega_{\alpha\beta 0}^{11} \right), \\ G_{\alpha\beta 0}^{(5)} &= -\frac{64}{15} \mu_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta 0} n_{\alpha 0} n_{\beta 0} [\Omega_{\alpha\beta 0}^{22} + \\ &+ \left( \frac{15}{4} \frac{\gamma_{\alpha 0}}{\gamma_{\beta 0}} + \frac{25}{8} \frac{\gamma_{\beta 0}}{\gamma_{\alpha 0}} \right) \Omega_{\alpha\beta 0}^{11} - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\gamma_{\beta 0}}{\gamma_{\alpha 0}} (5\Omega_{\alpha\beta 0}^{12} - \Omega_{\alpha\beta 0}^{13})], \\ G_{\alpha\beta 0}^{(6)} &= -\frac{64}{15} \mu_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta 0} n_{\alpha 0} n_{\beta 0} [\Omega_{\alpha\beta 0}^{22} - \\ &- \frac{55}{8} \Omega_{\alpha\beta 0}^{11} + \frac{1}{2} (5\Omega_{\alpha\beta 0}^{12} - \Omega_{\alpha\beta 0}^{13})], \end{aligned}$$

$$\Omega_{\alpha\beta}^{lr} = \left( \frac{1}{2\pi\gamma_{\alpha\beta}} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \xi^{2r+3} \exp(-\xi^2) Q_{\alpha\beta}^{(l)}(g) d\xi \quad \text{— интеграл}$$

Чепмена–Энскога ( $\xi = g\sqrt{\gamma_{\alpha\beta}/2}$ ), величины  $\kappa$  и  $\gamma$  определены выражениями

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{\gamma_{\alpha} + \gamma_{\beta}}, \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}}{\gamma_{\alpha} + \gamma_{\beta}}, \quad \gamma_{\alpha} = \frac{m_{\alpha}}{kT_{\alpha}}.$$

### “Скольжение” скоростей и разность температур

В общем случае система уравнений (2) может быть решена численно. Однако сначала рассмотрим интересный с практической точки зрения частный случай, когда легкий компонент смеси преобладает ( $\delta = y_{\beta}^s / y_{\alpha}^s \ll 1$ ). Далее предположим, что массы компонентов существенно различаются ( $\epsilon = m_{\alpha} / m_{\beta} \ll 1$ ). При этом можно выделить два случая с разной соразмерностью параметров  $\delta$  и  $\epsilon$ : 1) компонент  $\beta$  – малая примесь ( $\delta \leq \epsilon \ll 1$ ); 2) компонент  $\beta$  находится в следовом количестве ( $\delta \ll \epsilon \ll 1$ ).

В обоих случаях уравнение для  $\Delta w_{\alpha\beta 1}$  имеет один и тот же вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta w_{\alpha\beta 1}}{\partial t} &= -\Delta w_{\alpha\beta 1} \left( \frac{1}{t} + \frac{16}{3} \frac{\bar{m}_0}{M} n_0 \Omega_{\alpha\beta 0}^{11} \right) - \\ &- \frac{5}{3} \frac{m_{\beta} - m_{\alpha}}{m_{\alpha} m_{\beta}} \frac{g^{-1/3} g'}{t^3} - \frac{16}{3} \mu_{\alpha\beta} \frac{\bar{m}_0}{M} T_0^{-1} \times \\ &\times \left( \frac{2}{5} \Omega_{\alpha\beta 0}^{12} - \Omega_{\alpha\beta 0}^{11} \right) \left( \frac{h_{\alpha 1}}{m_{\alpha} y_{\alpha 0}} - \frac{h_{\beta 1}}{m_{\beta} y_{\beta 0}} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

При этом в первом случае, когда тяжелый газ находится в виде примеси к легкому газу, функция распределения легкого газа остается максвелловской или при больших степенях равновесия – слегка возмущенной. Уравнение для  $h_{\alpha 1}$  по форме совпадает с уравнением для чистого газа [6]:

$$\frac{\partial h_{\alpha 1}}{\partial t} = -h_{\alpha 1} \left( \frac{6}{t} + \frac{16}{15} n_{\alpha 0} \Omega_{\alpha \alpha 0}^{22} \right) - \frac{5}{3} \frac{y_{\alpha 0}}{m_{\alpha}} \frac{g^{4/3} g'}{t^8}, \quad (4)$$

т.е. поведение  $h_{\alpha 1}$  определяется лишь самостолкновениями легких молекул. Уравнение для  $h_{\beta 1}$  в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{\beta 1}}{\partial t} = & -h_{\beta 1} \left( \frac{6}{t} + \frac{16}{15} n_{\beta 0} \Omega_{\beta \beta 0}^{22} + \right. \\ & \left. + 16 \frac{\mu_{\alpha \beta} \mu_{\beta}}{M} n_{\alpha 0} \Omega_{\alpha \beta 0}^{11} \right) - \frac{5}{3} \frac{y_{\beta 0}}{m_{\beta}} \frac{g^{4/3} g'}{t^8}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если уменьшать параметр  $\delta$ , что соответствует переходу ко второму случаю, а физически это соответствует уменьшению роли самостолкновений тяжелых молекул, получим уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{\beta 1}}{\partial t} = & -h_{\beta 1} \left( \frac{6}{t} + 16 \frac{\mu_{\alpha \beta} \mu_{\beta}}{M} n_{\alpha 0} \Omega_{\alpha \beta 0}^{11} \right) - \\ & - \frac{5}{3} \frac{y_{\beta 0}}{m_{\beta}} n_0 T_0 \frac{g^{4/3} g'}{t^8}. \end{aligned} \quad (6)$$

При  $y_{\beta 0} \rightarrow 0$  эволюция тяжелого газа полностью определяется перекрестными столкновениями. Для степенного потенциала, используемого в этой модели:

$$\Omega_{\alpha \beta 0}^{lr} = \Omega_{\alpha \beta}^{lr}(T_0) = T_0^{1-\omega} \Omega_{\alpha \beta}^{lr}(1),$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha \beta}^{lr}(1) = & \frac{1}{2^{\omega+1} \sqrt{\pi}} \mu_{\alpha \beta}^{\omega-1} \frac{Q^{(l)}(\sqrt{RT_s})}{\bar{Q}(\sqrt{RT_s})} \times \\ & \times \Gamma(r + \frac{3}{2} - \omega), \quad (\omega = \frac{2}{n} + \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

В этом случае уравнения (4)–(6) интегрируются, и легко получается асимптотика

$$h_{k1\infty}(\lambda, t) = h_{k1}^{\infty}(\lambda) / t^6$$

с уже определенной функцией  $h_{k1}^{\infty}(\lambda)$  (подробности см. в [8]). Теперь несложно найти асимптотическое представление и для “скольжения” скоростей  $\Delta w_{\alpha \beta 1\infty}(\lambda, t) = \Delta w_{\alpha \beta 1}^{\infty}(\lambda) / t$ . Для этого нужно проинтегрировать (3) с учетом полученного выраже-

ния для  $h_{k1}^{\infty}(\lambda)$ . В пределе  $t \rightarrow \infty$  в размерных переменных получаем:

$$\begin{aligned} \Delta w_{\alpha \beta 1\infty}^{\text{разм}}(\lambda, t) = & R_s [2\sqrt{2\pi} / \Gamma(\frac{7-2\omega}{2})]^{1/(4-2\omega)} \times \\ & \times (\frac{kT_s}{p_s R_s \bar{Q}})^{1/(4-2\omega)} \left[ \frac{a}{4-2\omega} (\frac{4-2\omega}{b})^{1/(4-2\omega)} \times \right. \\ & \left. \times \Gamma(\frac{1}{4-2\omega}) + \frac{c}{b} \right] \frac{1}{t}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$a = -\frac{5}{3} \frac{m_{\beta} - m_{\alpha}}{m_{\alpha} m_{\beta}} g^{-1/3} g',$$

$$b = \frac{16}{3} \frac{\bar{m}_0}{M} g^{(5-2\omega)/3} \Omega_{\alpha \beta}^{11}(1),$$

$$\begin{aligned} c = & -\frac{16}{3} \frac{\mu_{\alpha \beta} \bar{m}_0}{M} \left[ \frac{2}{5} \Omega_{\alpha \beta}^{12}(1) - \right. \\ & \left. - \Omega_{\alpha \beta}^{11}(1) \right] \left[ \frac{h_{\alpha 1}^{\infty}(\lambda)}{m_{\alpha} y_{\alpha 0}} - \frac{h_{\beta 1}^{\infty}(\lambda)}{m_{\beta} y_{\beta 0}} \right] g^{-2\omega/3}, \end{aligned}$$

а  $R_s$  – начальный радиус газового пакета (см. [8]). Выражение (7) показывает, что величина  $\Delta w_{\alpha \beta}$  увеличивается при уменьшении давления и увеличении температуры в источнике, что объясняется уменьшением протяженности равновесной области в потоке. Очевидная связь  $\Delta w_{\alpha \beta}$  с интегралом Чепмена–Энскога позволяет разработать метод определения параметров потенциала взаимодействия из экспериментального определения “скольжения” скоростей компонентов смеси.

После того как получены асимптотические выражения для функций  $h_{\alpha 1}$ ,  $h_{\beta 1}$  и “скольжения” скоростей, несложно проанализировать разности температур. Во втором приближении по  $Kn_s^{1/(4-2\omega)}$  уравнение для разности температур имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} 3 \frac{\partial}{\partial t} (\Delta T_{\alpha \beta 2}) + 6 \frac{\Delta T_{\alpha \beta 2}}{t} - \frac{g^{2/3}}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta w_{\alpha \beta 1}^{\infty} \lambda^2) \frac{1}{t^3} - \\ - \Delta w_{\alpha \beta 1}^{\infty} \left( 1 + \frac{10}{3} \frac{m_{\alpha} m_{\beta}}{\bar{m}_0^2} \right) g^{-1/3} g' \frac{1}{t^3} + \\ + 2 \frac{t^2}{g \lambda^2} \left[ -\frac{1}{y_{\alpha 0}} \frac{\partial}{\partial \lambda} (q_{\alpha 1}^{\infty} \lambda^2) \right] - \frac{1}{y_{\beta 0}} \frac{\partial}{\partial \lambda} (q_{\beta 1}^{\infty} \lambda^2) = \\ = -32 \frac{1}{M} \Delta T_{\alpha \beta 2} \Omega_{\alpha \beta}^{11}(1) \frac{g^{(5-2\omega)/3}}{t^{5-2\omega}}. \end{aligned}$$

Асимптотическое решение этого уравнения имеет вид:

$$R\Delta T_{\alpha\beta 2\infty}(\lambda, t) = R_s^2 [2\sqrt{2\pi} / \Gamma(\frac{7-2\omega}{2})]^{1/(2-\omega)} \times \times (\frac{kT_s}{P_s R_s Q})^{1/(2-\omega)} [(\Omega_{\alpha\beta}^{11}(1))]^{-1/(4-2\omega)} \frac{K(\lambda)}{t^2}, \quad (8)$$

где  $K(\lambda)$  – довольно сложная функция  $\lambda$ , зависящая от  $m_k, y_{k0}$  и параметров потенциала взаимодействия (через интегралы  $\Omega_{\alpha\beta}^{11}, \Omega_{\alpha\beta}^{12}$  и  $\Omega_{\alpha\beta}^{22}$ ). Поведение  $\Delta T_{\alpha\beta}$  в зависимости от условий в источнике аналогично поведению  $\Delta w_{\alpha\beta}$ . Общие же закономерности поведения  $\Delta w_{\alpha\beta}$  и  $\Delta T_{\alpha\beta}$  полностью согласуются с результатами для непрерывных струй [4, 5].

Численно система уравнений (2) была решена в ряде случаев для смесей He с Kr различного состава. Начальный момент  $t = 0$  соответствует моменту прекращения действия импульсного сопла. Данные расчетов приведены на рис. 1–4.

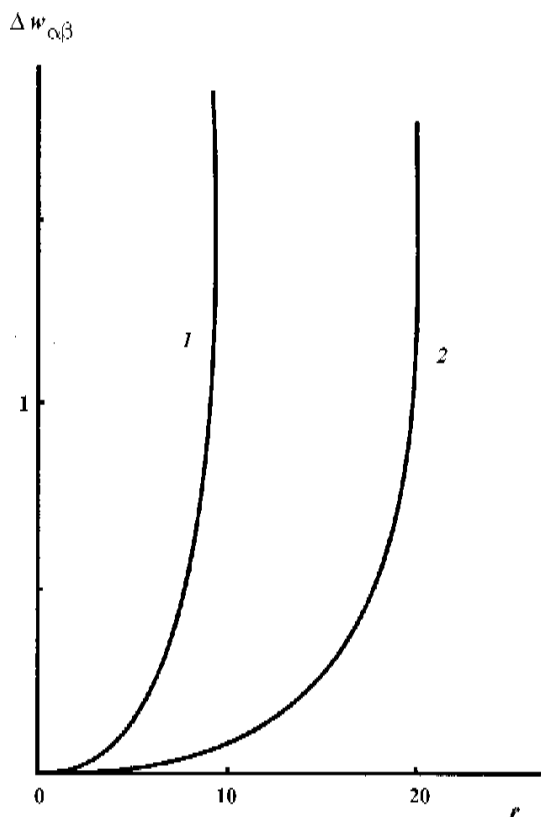


Рис. 1. “Скольжение” скоростей в зависимости от расстояния в различные моменты времени для смеси 99% He + 1% Kr: 1 –  $t = 5$ , 2 –  $t = 10$

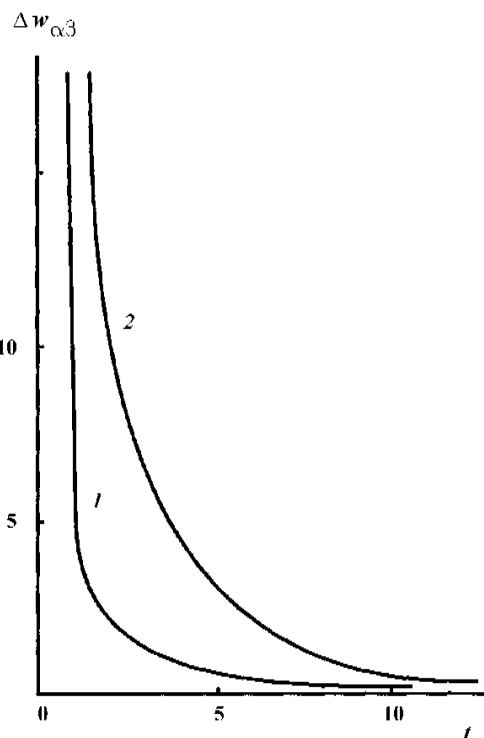


Рис. 2. “Скольжение” скоростей в зависимости от времени при разных расстояниях для смеси 99% He + 1% Kr: 1 –  $r = 2$ , 2 –  $r = 4$

На рис. 1, 2 показано поведение “скольжения” скоростей  $\Delta w_{\alpha\beta}$  в системе центра масс для смеси состава 99% He + 1% Kr при  $Kn_s = 10^{-3}$ . Величина  $\Delta w_{\alpha\beta}$  положительна, т.е. скорость легкого компонента больше скорости тяжелого. В центре газового пакета “скольжение” скоростей равно нулю, а при удалении от центра оно быстро увеличивается. Такое поведение  $\Delta w_{\alpha\beta}$  согласуется с нашей моделью, поскольку газовый пакет первоначально континуален, а по мере рассеяния континуальным остается лишь ядро пакета, уменьшающееся с течением времени. С ростом времени в каждой фиксированной точке пакета  $\Delta w_{\alpha\beta}$  быстро падает. Отметим, что бесконечно большие значения  $\Delta w_{\alpha\beta}$  на рис. 2 при малых временах – это значения вблизи фронта расширения при  $\lambda \approx 5^{1/2}$ . На рис. 3 представлены значения предельной величины  $\Delta w_{\alpha\beta} \cdot t$  для различных составов смеси He и Kr при  $Kn_s = 10^{-3}$ . Как видно, с уменьшением доли тяжелого компонента величина “скольжения” скоростей возрастает.

На рис. 4 показано поведение величины  $\Delta T_{\alpha\beta} \cdot t^2$  в зависимости от  $\lambda$  для смеси 99% He + 1% Kr при  $Kn_s = 10^{-3}$ . Очевидно, что температура легкого ком-

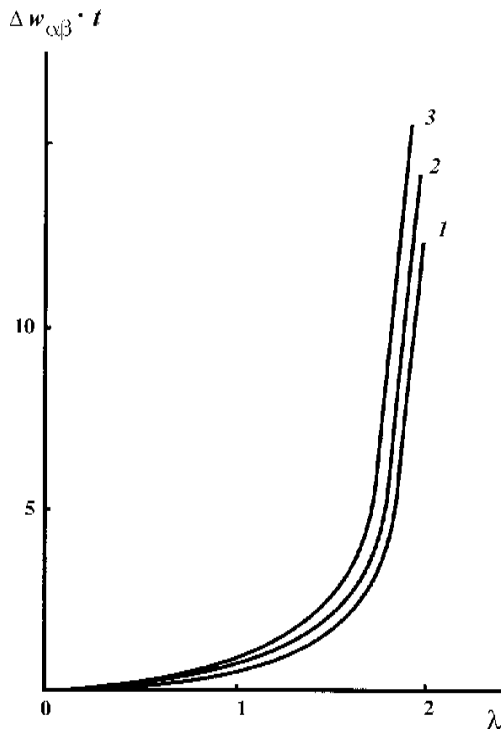


Рис. 3. Зависимость  $\Delta w_{\alpha\beta} \cdot t$  от  $\lambda$  для разных составов смеси гелия и криптона: 1 – 80% He + 20% Kr; 2 – 90% He + 10% Kr; 3 – 99% He + 1% Kr

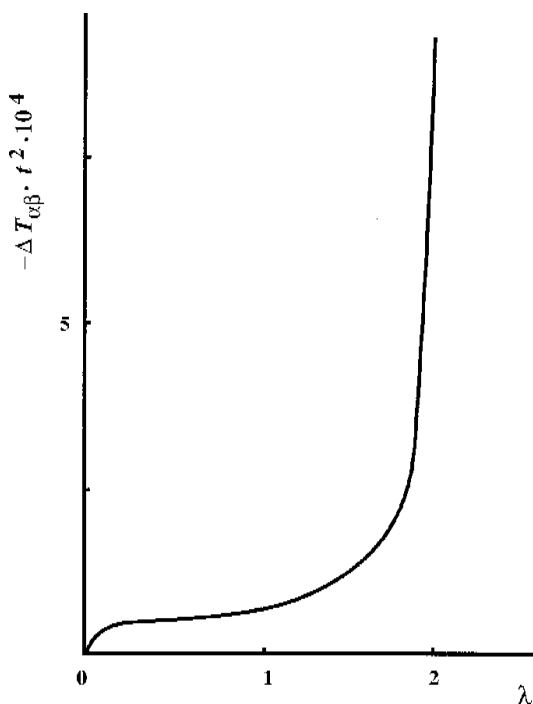


Рис. 4. Зависимость  $\Delta T_{\alpha\beta} \cdot t^2$  от  $\lambda$  для смеси 99% He + 1% Kr

понента всегда ниже температуры тяжелого. Это можно объяснить, если сравнить эффективные частоты столкновений. Полное число столкновений для частиц разной массы примерно одинаково, но для легких частиц все столкновения эффективны для релаксации, а для тяжелых частиц – только самостолкновения. Это приводит к уменьшению скорости релаксации тяжелого компонента, а значит, к большему отклонению от изэнтропической температуры. Поскольку по определению температура компонентов связана со средней температурой смеси  $\bar{T}$  соотношениями

$$T_{\alpha} = \bar{T} + y_{\beta 0} \Delta T_{\alpha\beta 2},$$

$$T_{\beta} = \bar{T} - y_{\alpha 0} \Delta T_{\alpha\beta 2},$$

то при малых  $y_{\beta 0}$  ( $y_{\alpha 0} \approx 1$ ) температура легкого компонента близка к средней температуре смеси, а температура тяжелого компонента выше температуры смеси на величину  $\Delta T_{\alpha\beta 2}$ .

Разность температур, как показывают расчеты, зависит от концентрации компонентов значительно слабее, чем “скольжение” скоростей. Уменьшение  $y_{\beta 0}$  вызывает лишь незначительный рост величины  $\Delta T_{\alpha\beta}$ : при переходе от смеси состава 99% He + 1% Kr к смеси 99,9% He + 0,1% Kr разность температур увеличивается лишь на 1%. Кроме того, видно, что величина  $\Delta T_{\alpha\beta}$  при асимптотических временах ( $t \approx 100$ ) слишком мала, чтобы ее использовать для обработки времяпролетных спектров.

Таким образом, в работе на основе кинетического уравнения Больцмана построена модель расширения импульсной струи смеси одноатомных газов. Уравнение Больцмана решалось методом Грэда. Система моментных уравнений анализировалась методом сращивания асимптотических разложений. Получены система уравнений, описывающая поведение параметров струи в дальней области расширения, и асимптотические выражения (при больших временах) для “скольжения” скоростей и разности температур компонентов. В ряде конкретных случаев система уравнений для этих величин решена численно. Проанализировано поведение “скольжения” скоростей и разности температур в зависимости от условий в источнике и концентраций компонентов смеси. Установлена функциональная связь этих величин с формой потенциала взаимодействия.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов Б.М. // Успехи физических наук. 2003. **173**. С. 609.
2. Макаров Г.М. // Успехи физических наук. 2003. **173**. С. 913.
3. Лазарев А.В., Застенкер Н.Н., Трубников Д.Н., Татаренко К.А., Прибытков А.В. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 2. Химия. 2006. **47**. С. 377.
4. Ленин Л.В., Лазарев А.В., Трубников Д.Н. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 2. Химия. 1987. **28**. С. 347.
5. Lenin L.V., Lazarev A.V., Trubnikov D.N. // Chem. Phys. Lett. 1988. **148**. P. 401.
6. Лазарев А.В., Застенкер Н.Н., Трубников Д.Н. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 2. Химия. 2004. **45**. С. 177.
7. Жданов В.М. Явления переноса в многокомпонентной плазме. М., 1982. С. 33.
8. Колосова Т.Ю. Дис. ... канд. хим. наук. М., 1990.

Поступила в редакцию 11.01.07

## KINETIC DESCRIPTION OF A SUPERSONIC IMPULSE JET EXPANDING INTO VACUUM. II. MIXTURES OF MONOATOMIC GASES

A.V. Lazarev, N.N. Zastenker, D.N. Trubnikov, K.A. Tatarenko, A.V. Pribytkov

*(Division of Physical Chemistry)*

**On the basis of Boltzmann kinetic equation, the model of impulse jet expansion of a monoatomic gas mixture has been constructed. The Boltzmann equation has been solved by the Grad method. For analysis of a moment equation system, the method of matching of asymptotic expansions was used. The velocity slips and temperature differences depending on the source conditions and the concentrations of components of a mixture were obtained. The functional connection between these magnitudes and the interaction potential form was also determined.**