

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Химический факультет

УТВЕРЖДАЮ

И.о. декана химического факультета,
профессор РАН



/С.С. Карлов/

«20» августа 2025 г.

**ОЦЕНОЧНЫЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ (ФОС)
для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)**

Теория вероятностей и математическая статистика

Уровень высшего образования:
Специалитет

Направление подготовки (специальность):

04.05.01 Фундаментальная и прикладная химия

Направленность (профиль) ОПОП:

Аналитическая химия, Биохимия и биотехнология, Медицинская химия,
Молекулярная биология и биоорганическая химия, Нефтехимия, Органическая химия,
Радиохимия, Теория и методика обучения химии, Физическая химия,
Химия неорганических веществ и материалов, Химия и технология
композиционных и полимерных материалов, Экологическая химия
и экоадаптивные технологии

Форма обучения:

очная

ФОС рассмотрен и одобрен
Учебно-методической комиссией факультета
(протоколы №16 от 07.06.2023, №23 от 25.03.2025 г.)

Москва 2025

Фонд оценочных средств соответствует требованиям самостоятельно установленного МГУ образовательного стандарта (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки / специальности 04.05.01 «Фундаментальная и прикладная химия» (программа специалитета), утвержденного приказом МГУ от 29 декабря 2018 года № 1770 (с изменениями по приказу № 1109 от 11.09.2019, № 609 от 10 июня 2021 года, № 700 от 29 мая 2023 года, № 1108 от 30 августа 2024 года, № 476 от 07 апреля 2025 года, решения Ученого совета МГУ от 25 апреля 2023 года).

ФОС рассмотрены и одобрены Учебно-методической комиссией факультета на основании рекомендаций Учебно-методической комиссии механико-математического факультета (кафедра теории вероятностей).

1. Требования к результатам освоения дисциплины (модуля) Теория вероятностей и математическая статистика

Компетенция	Индикаторы достижения	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-4 (на уровне специалитета). Способен создавать математические модели профессиональных задач, учитывать ограничения и границы применимости моделей, интерпретировать полученные математические результаты	ОПК-4.1 Предлагает математические и (или) физические модели химических процессов	Знать: основные понятия теории вероятностей и математической статистики Знать: базовые модели задания вероятностного пространства, способы описания случайных величин и нахождения их характеристик Знать: принципы построения статистических оценок и оценки их качества Уметь: решать задачи на нахождение вероятностей, характеристик распределений для основных моделей
ОПК-6 (на уровне специалитета). Способен использовать в профессиональной деятельности теоретические знания и практические навыки решения математических и физических задач	ОПК-6.2. Обрабатывает данные с использованием стандартных способов аппроксимации численных характеристик	Уметь: применять статистические критерии и делать выводы Уметь: оценивать статистические характеристики данных Уметь: формулировать заключения и обоснованные выводы по результатам статистического анализа Владеть: навыками проведения статистического анализа данных (в том числе и результатов экспериментов)

2. Оценочные средства для текущего контроля и самостоятельной работы

2.1. Текущий контроль

Контрольные вопросы по теме № 1

Дайте определение вероятностного пространства.
Назовите аксиомы теории вероятностей.

Контрольные вопросы по теме № 2

Найдите количество способов разместить n шаров по k урнам
Каким образом задается дискретное вероятностное пространство?

Контрольные вопросы по теме № 3

Приведите пример событий, независимых попарно, но не в совокупности.
Назовите условия применимости формулы Байеса.

Контрольные вопросы по теме № 4

Назовите основные условия применимости схемы Бернулли.
Чему равна вероятность получить ровно k успехов в n испытаниях Бернулли?

Контрольные вопросы по теме № 5

В каких случаях теорема Пуассона будет давать лучшее приближение, чем локальная предельная теорема Муавра-Лапласа?
Дайте вероятностную интерпретацию теоремы Пуассона.

Контрольные вопросы по теме № 6

Постройте схематично график функции распределения биномиальной случайной величины.
Назовите определяющие свойства функции распределения.

Контрольные вопросы по теме № 7

Приведите плотность стандартного нормального распределения.
Найдите вероятность того, что экспоненциально распределенная случайная величина примет значение, большее x .

Контрольные вопросы по теме № 8

Назовите определяющие свойства совместной функции распределения.
В каком случае совместную функцию распределения можно однозначно восстановить по маргинальным распределениям?

Контрольные вопросы по теме № 9

Найдите плотность распределения квадрата стандартной нормальной случайной величины.
Найдите распределение суммы двух независимых экспоненциально распределенных случайных величин с одинаковым значением параметра.

Контрольные вопросы по теме № 10

Найдите математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины.
Найдите дисперсию случайной величины, равной константе.
Какова связь между некоррелированностью и независимостью случайных величин?

Контрольные вопросы по теме № 11

Сформулируйте понятие закона больших чисел.
Приведите условия, когда выполняется закон больших чисел.

Контрольные вопросы по теме № 12

Пусть имеются две независимые биномиально распределенные случайные величины с параметрами (p, n) и (q, m) . Предполагая, что n и m велики, каким распределением можно приблизить распределение суммы этих случайных величин?

Пусть имеются две сходящиеся по распределению последовательности случайных величин. Будет ли сходиться по распределению их произведение?

Контрольные вопросы по теме № 13

Приведите несмещенную состоятельную оценку дисперсии.

Будет ли эмпирический момент 3-го порядка асимптотически нормальной оценкой?

Контрольные вопросы по теме № 14

Пусть выборка имеет экспоненциальное распределение с неизвестным параметром λ . Постройте оценку параметра методом максимального правдоподобия.

Пусть выборка имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$. Постройте оценки неизвестных параметров a и b методом моментов.

Контрольные вопросы по теме № 15

Назовите статистические свойства ЭФР

Какова надежность выводов, сделанных по гистограмме?

Можно ли использовать метод нормальной бумаги для оценки предположения, что выборка имеет экспоненциальное распределение с параметром 1?

Контрольные вопросы по теме № 16

Чему равна квантиль уровня $\frac{1}{2}$ распределения Стюдента с числом степеней свободы 5?

Каким распределением можно приблизить распределение хи-квадрат с числом степеней свободы 1000?

Контрольные вопросы по теме № 17

Постройте доверительный интервал для математического ожидания выборки из нормального распределения, предполагая дисперсию неизвестной.

Постройте доверительный интервал для параметра p выборки из распределения Бернулли.

Контрольные вопросы по теме № 18

Дайте определение ошибкам 1-го и 2-го рода.

Каким образом делается вывод по Р-значению?
Зачем нужно понятие мощности критерия?

Контрольные вопросы по теме № 19

Какие особенности применения критерия согласия хи-квадрат в случае простой гипотезы?
Напишите статистику критерия хи-квадрат для сложной гипотезы.

Контрольные вопросы по темам № 20-21

На примере критерия проверки равенства математического ожидания определенному числу, поясните, можно ли найти вероятность ошибки второго рода?
Как относятся Р-значения для одностороннего и двустороннего вариантов критерия Фишера для одного и того же набора данных?
Перечислите условия применимости критерия Стьюдента.
Пусть известно, что математическое ожидание экспоненциально распределенной выборки может равняться либо 1, либо 2. Каким критерием следует воспользоваться для определения значения математического ожидания?

Контрольные вопросы по теме № 22

Напишите уравнение линейной регрессии
Назовите условия, при которых оценки коэффициентов линейной регрессии, полученные по МНК, будут несмещенными состоятельными и асимптотически нормальными?

2.2. Самостоятельная работа (примеры задач для самоконтроля)

1. Имеется 22 образца, 8 из которых - с высоким содержанием некоторого вещества. Найти вероятность того, что в случайной выборке из 11 образцов окажется более 3 таких образцов.
2. Производственный брак составляет 4%. Каждое изделие равновероятно попадает к одному из двух контроллеров, первый обнаруживает брак с вероятностью 0.92, второй 0.98. Какова вероятность, что признанное годным изделие – бракованное.
3. Процентное содержание цементита на металлографическом шлифе определяли с помощью острия, которым прикасались к шлифу случайным образом и отмечали число попаданий острия на изучаемую структуру. Каким должно было быть процентное содержание цементита для того, чтобы с вероятностью большей 0.95 при 400 наблюдениях острие более 100 раз попало на цементит?
4. Количество частиц, распавшихся в единицу времени, имеет распределение Пуассона. Известно, что в среднем за единицу времени распадается 3 частицы. Найти вероятность, что количество распавшихся частиц превысит 5.

5. Время полимеризации мономеров определенного типа имеет экспоненциальное распределение с параметром 2; последующая химическая модификация продолжается также экспоненциальное время с параметром, равным 1. Найти вероятность, что общее время получения продукта превысит 3.
6. В большой серии одинаковых экспериментов среднее значение показателя оказалось равным 0.8 со среднеквадратическим отклонением 0.22; определите, в каких пределах лежит истинное значение показателя с доверительным уровнем, равным 99%.
7. Исследуется возможность замены в производственном процессе дорогого катализатора А на катализатор Б. Для этого было проведено 10 лабораторных экспериментов с катализатором А и 16 с катализатором Б. Средний выход с катализатором А оказался равен 0.61 со среднеквадратическим отклонением 0.15, а для катализатора Б средний выход 0.56 со среднеквадратическим отклонением 0.18. В предположении, что распределения ошибок являются нормальными с одинаковой дисперсией, определите, является ли статистически значимой наблюдаемая разница между катализаторами для уровня значимости в 5%.

3. Оценочные средства для промежуточной аттестации

3.1. Вопросы к экзамену

1. Классические модели задания вероятностного пространства

Вероятность (вероятностная мера) в дискретном ПЭИ. Аксиомы. Примеры задания вероятности в дискретном ПЭИ. Теорема сложения и ее обобщения. Классическое и статистическое определения вероятности. Элементы комбинаторного анализа. Правило умножения и правило сложения комбинаторики. Выборки из генеральной совокупности. Размещения частиц по ячейкам. Использование классического определения вероятности для построения вероятностных пространств, в которых элементами ПЭИ являются различные выборки и размещения. Гипергеометрическое распределение. Разбиение конечного множества на подмножества с заданным количеством элементов. Вероятность (вероятностная мера) в произвольном ПЭИ. Аксиомы теории вероятностей. Геометрические вероятности. Парадокс Бертрана. Свойства вероятности, вытекающие из аксиом. Условные вероятности. Теорема умножения. Независимость событий. Независимость событий в совокупности. Пример С.Н.Бернуштейна. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Последовательность независимых испытаний с двумя исходами (схема Бернулли). Вероятностное пространство для схемы Бернулли. Биномиальное распределение. Последовательность независимых испытаний с N ($N > 2$) исходами (полиномиальная схема). Предельные теоремы в схеме Бернулли, Теорема Пуассона. Распределение Пуассона. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа. Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа.

2. Случайные величины

Случайная величина (определения). Функция распределения. Распределение вероятностей. Свойства функции распределения. Дискретные случайные величины. Вырожденное, дискретное равномерное, бернуллиевское, биномиальное, пуассоновское, геометрическое, гипергеометрическое. Абсолютно непрерывные случайные величины. Функция распределения. Плотность распределения. Равномерное распределение на отрезке, нормальное распределение, стандартное нормальное распределение, показательное распределение (свойство отсутствия последствия), распределение Коши. Содержательный смысл указанных распределений. Смесь распределений. Многомерные распределения. Функция распределения случайного вектора и ее свойства. Дискретные и абсолютно непрерывные многомерные

распределения. Плотность распределения. Примеры: равномерное распределение в области на плоскости, двумерное нормальное распределение, дискретное распределение на конечном множестве точек плоскости. Связь маргинальных распределений с совместным распределением. Независимость случайных величин (определения). Необходимые и достаточные условия независимости дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин. Функции от случайных величин. Преобразование n -мерного случайного вектора в m -мерный. Формула композиции (свертка).

3. Оценка параметров распределений

Понятие выборки. Выборочные распределения. Реализация выборки. Эмпирическая функция распределения и ее свойства. Теорема Гливленко-Кантелли. Гистограмма и ее свойства. Нормальная бумага. Понятие точечной оценки. Эмпирические моменты. Несмещенные, состоятельные и асимптотически нормальные оценки. Примеры. Оценки математического ожидания и дисперсии. Достаточное условие состоятельности несмещенной оценки. Методы построения оценок: метод моментов, метод максимального правдоподобия. Выборка из нормального распределения. Распределения: хи-квадрат, Стьюдента, Фишера и их свойства. Понятие квантили и их свойства. Доверительные интервалы. Общий метод построения доверительных интервалов. Примеры. Теорема Фишера. Точные доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Построение доверительных интервалов, на основе асимптотически нормальных оценок. Асимптотический доверительный интервал для математического ожидания в случае выборки из произвольного распределения. Приближенный доверительный интервал для вероятности успеха в схеме Бернулли

4. Проверка статистических гипотез

Простые и сложные гипотезы. Ошибки 1-го и 2-го рода. Мощность критерия. P -значение. Вероятности ошибок 1 и 2 рода при одновременном применении двух критериев. Критерий для проверки гипотезы о равенстве математического ожидания выборки из нормального распределения заданному числу. Критерий Колмогорова, его мощность. Критерий хи-квадрат для проверки простой гипотезы о совпадении распределения выборки и теоретического распределения, его мощность. Критерий хи-квадрат для проверки сложной гипотезы, его мощность. Проверка гипотезы о независимости признаков. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий. Мощность соответствующего критерия и P -значение. Односторонние и двусторонние критерии. Проверка гипотезы о равенстве средних двух выборок. P -значение. Мощность критерия Стьюдента. Оптимальный критерий Неймана-Пирсона для различения двух простых гипотез. Мощность критерия Неймана-Пирсона. Регрессионный анализ. Метод наименьших квадратов. Свойства оценок, получаемых по методу наименьших квадратов в случае простой линейной регрессии. Коэффициент детерминации.

3.2. Описание показателей и критериев оценивания

Шкала оценивания знаний, умений и навыков является единой для всех дисциплин (приведена в таблице ниже)

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю)				
Оценка	2	3	4	5
Результат				
Знания	Отсутствие	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные	Сформированные систематиче-

	знаний		знания	ские знания
Умения	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности не принципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения)	Отсутствие навыков	Наличие отдельных навыков	В целом, сформированные навыки, но не в активной форме	Сформированные навыки, применяемые при решении задач

Процедура оценивания результатов освоения дисциплины

Критерии оценивания устного ответа на экзамене

Критерии оценки	Характеристика требований к результатам аттестации
Полнота знаний программного материала	Обучающийся дал полный и правильный ответ, который изложен в определенной логической последовательности. Правильно и полно давал ответы на дополнительные вопросы ИЛИ допустил незначительные ошибки.
	Обучающийся продемонстрировал достаточную полноту знаний, при наличии несущественных неточностей, ответ изложен в логической последовательности. При ответе на дополнительные вопросы допустил незначительные ошибки.
	Обучающийся продемонстрировал фрагментарные знания и допускает неточности в определении понятий. При ответах на дополнительные вопросы допускал ошибки.
	Обучающийся продемонстрировал незнание значительной части материала. Не смог дать ответы на дополнительные вопросы.
Системность и обобщенность знаний	Обучающийся продемонстрировал полное понимание материала, изложение материала системное, раскрыл вопрос с опорой на аргументы, которые сформулированы четко
	Обучающийся продемонстрировал достаточно глубокое понимание материала, изложение материала системное, приводятся е связанные между собой и другими компонентами аргументации понятия или положения
	Обучающийся допустил ошибки, нарушил системность изложения материала, использовал определения, положения и выводы, не связанные непосредственно с раскрываемым вопросом
	Обучающийся продемонстрировал непонимание материала, не смог обосновать свои суждения и привести свои примеры
Корректность употребления терминологического аппарата дисциплины	Обучающийся продемонстрировал хорошее знание терминов дисциплины, корректность их употребления при ответах на вопросы, в том числе дополнительные.
	Обучающийся продемонстрировал знание основных терминов дисциплины. Допущено не более 2–3-х ошибок в употреблении терминов при ответах на вопросы, в том числе дополнительные

	Обучающийся продемонстрировал знание основных терминов дисциплины. Допущено некорректное их употребление при ответах на вопросы.
	Обучающийся продемонстрировал незнание основных терминов дисциплины. Допущены серьезные ошибки при их употреблении в ответах на вопросы
Самостоятельные оценочные суждения	Обучающийся продемонстрировал способность обосновывать и излагать свои оценочные суждения, доказывать, отстаивать свою точку зрения
	Обучающийся продемонстрировал способность излагать свои оценочные суждения, доказывать, отстаивать свою точку зрения
	Обучающийся продемонстрировал умение излагать свои оценочные суждения, неубедительно доказывает свою точку зрения
	Обучающийся не продемонстрировал умение излагать свои оценочные суждения, не доказывает и не отстаивает свою точку зрения

Соответствие оценок и критериев ответа на экзамене

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации
«Отлично»	Теоретическое содержание освоено полностью без пробелов, системно и глубоко. Необходимые умения и практические навыки работы с освоенным материалом сформированы. Все задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание освоено в целом без пробелов. Необходимые умения и практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы. Все задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов близким к максимуму.
«Удовлетворительно»	Теоретическое содержание освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера. Необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы. Большинство заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки. .
«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание освоено частично. Необходимые умения и навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них.