МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ

ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ЛИНЕЙНЫЕ, БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ, КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

(для студентов химических специальностей)

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2026

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций.

Предлагаемая Вашему вниманию серия пособий содержит описание курса лекций по линейной алгебре, многие годы читавшегося на химическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова и образцы решения типовых задач.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче ими экзаменов и зачётов.

6. ЛИНЕЙНЫЕ, БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ, КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

6.1. Линейная форма

Определение. Пусть V − векторное пространство. Отображение $F: V \to \mathbb{R}$, сопоставляющее вектору $\bar{x}$ число $F(\bar{x})$, называется ***функционалом***.

Если для всех $\bar{x}, \bar{y} \in V$ выполняется равенство

$$F(\bar{x} + \bar{y}) = F(\bar{x}) + F(\bar{y}) \tag{6.1}$$

и для всех $\bar{x} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

$$F(\lambda\bar{x}) = \lambda F(\bar{x}), \tag{6.2}$$

то ***функционал*** называется ***линейным***.

Пример линейных функционалов:

1. Если $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, то, например, $F(\bar{x}) = x_1$ − линейный функционал, так как свойства (6.1) и (6.2), очевидно, выполнены.
2. Если $V = C[a, b]$, то для $f = f(x) \in C[a, b]$ определим $F(f) = \int_a^b f(x)dx$. Линейность этого функционала доказана в курсе математического анализа.

Рассмотрим пример нелинейного функционала. Для $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ положим $F(\bar{x}) = |\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Тогда

$$F(\bar{x} + \bar{y}) \leq F(\bar{x}) + F(\bar{y}),$$

и, например, для $\bar{x} = \{1;0\}, \bar{y} = \{0;1\}$ получаем $\bar{x} + \bar{y} = \{1;1\}, |\bar{x} + \bar{y}| = \sqrt{2}$, $|\bar{x}| = 1, |\bar{y}| = 1$, и $|\bar{x} + \bar{y}| < |\bar{x}| + |\bar{y}|$.

Если V – n-мерное пространство, $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ – некоторый базис V и F – линейный функционал, то для любого $\bar{x} \in V, \bar{x} = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n$ согласно (6.1) и (6.2) имеем:

$$F(\bar{x}) = F(x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n) = x_1F(\bar{e}_1) + \dots + x_nF(\bar{e}_n). \qquad (6.3)$$

Обозначим

$$a_k = F(\bar{e}_k), k = 1, \dots, n. \qquad (6.4)$$

Тогда уравнение (6.3) принимает вид:

$$F(\bar{x}) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n \qquad (6.5)$$

Правая часть уравнения (6.5) называется ***линейной формой от переменных*** $x_1, \dots, x_n$.

Пример.

В курсе математического анализа при изучении функций нескольких переменных дифференциал функции:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

является линейной формой переменных $dx_1, \dots, dx_n$.

Равенство (6.3) показывает, что все значения линейного функционала являются линейными комбинациями его значений на векторах базиса $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ и вполне определены этим набором значений (6.4).

Как изменяются коэффициенты линейной формы (6.5) при переходе к другому базису?

Пусть рассматривается новый базис:

$$\bar{e}'_1 = c_{11}\bar{e}_1 + \dots + c_{n1}\bar{e}_n,$$

$$\dots$$

$$\bar{e}'_n = c_{1n}\bar{e}_1 + \dots + c_{nn}\bar{e}_n,$$

то есть в обозначениях (3.16), (3.17),

$$(\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n) = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)C. \qquad (6.6)$$

Тогда:

$$a'_1 = F(\bar{e}'_1) = F(c_{11}\bar{e}_1 + \dots + c_{n1}\bar{e}_n) = c_{11}F(\bar{e}_1) + \dots + c_{n1}F(\bar{e}_n) =$$
$$= c_{11}a_1 + \dots + c_{n1}a_n,$$

…

$$a'_n = F(\bar{e}'_n) = F(c_{1n}\bar{e}_1 + \cdots + c_{nn}\bar{e}_n) = c_{1n}F(\bar{e}_1) + \cdots + c_{nn}F(\bar{e}_n) =$$
$$= c_{1n}a_1 + \cdots + c_{nn}a_n. \qquad (6.7)$$

Равенства (6.7) можно записать в матричном виде:

$$(a'_1, \dots, a'_n) = (a_1, \dots, a_n)C. \qquad (6.8)$$

Из (6.6) и (6.8) вытекает, что при переходе к новому базису координаты линейной формы изменяются так же, как и векторы базиса.

Как отмечалось в теореме 5.1, множество линейных отображений, в частности, множество линейных форм, сами образуют векторное пространство. Это пространство называется ***сопряженным*** пространству V.

Если V – евклидово пространство и $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ – ортонормированный базис в нем, то правую часть (6.5) можно рассматривать, как скалярное произведение $(\bar{a}, \bar{x})$ векторов с координатами $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\bar{x} = (x_1, \dots, x)$.

6.2. Билинейные функции

Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Определение: Отображение $\alpha: V \times V \to \mathbb{R}$ сопоставляющее каждой паре векторов $\bar{x}, \bar{y}$ число $\alpha(\bar{x}, \bar{y})$ называется ***билинейной функцией***, если:

1. Для любого $\bar{y} \in V$ и любых $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in V$

$$\alpha(\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \bar{y}) = \alpha(\bar{x}_1, \bar{y}) + \alpha(\bar{x}_2, \bar{y}) \qquad (6.9)$$

и для любого $\bar{x} \in V$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\alpha(\lambda\bar{x}, \bar{y}) = \lambda\alpha(\bar{x}, \bar{y}) \qquad (6.10)$$

(то есть при любом фиксированном $\bar{y} \in V$ функция $\alpha(\bar{x}, \bar{y})$ – линейная по $\bar{x}$).

2. Для любого $\bar{x} \in V$ и для любых $\bar{y}_1\bar{y}_2 \in V$

$$\alpha(\bar{x}, \bar{y}_1 + \bar{y}_2) = \alpha(\bar{x}, \bar{y}_1) + \alpha(\bar{x}, \bar{y}_2) \qquad (6.11)$$

и для любого $\bar{y} \in V$ и любого $\mu \in \mathbb{R}$

$$\alpha(\bar{x}, \mu\bar{y}) = \mu\, \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \qquad (6.12)$$

(то есть при любом фиксированном $\bar{x} \in V$ функция $\alpha(\bar{x}, \bar{y})$ – линейная по $\bar{y}$).

Пример билинейной функции дает изученное в главе 4 скалярное произведение. Пусть в n-мерном пространстве V задан базис $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$. Обозначим

$$a_{ik} = \alpha(\bar{e}_k, \bar{e}_i), \ k, i = 1, \dots, n \qquad (6.13)$$

Теорема 6.1. Пусть $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Тогда $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k$.

►Последовательно используем (6.9)-(6.13):

$\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha(x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n, y_1\bar{e}_1 + \dots + y_n\bar{e}_n) =$

$= x_1\, \alpha(\bar{e}_1, y_1\bar{e}_1 + \dots + y_n\bar{e}_n) + \dots + x_n\, \alpha(\bar{e}_n, y_1\bar{e}_1 + \dots + y_n\bar{e}_n) =$

$= x_1 y_1 \alpha(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + \dots + x_1 y_n \alpha(\bar{e}_1, \bar{e}_n) + \dots +$
$+ x_n y_1 \alpha(\bar{e}_n, \bar{e}_1) + \dots + x_n y_n (\bar{e}_n, \bar{e}_n) =$
$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k$. ◄

Определение: Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

называется ***матрицей билинейной функции*** в базисе $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$.

Теорема 6.2. Если базис $\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n$ связан с базисом $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ формулой (6.6), то матрица A' билинейной функции в базисе $\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n$ связана с матрицей А (6.14) равенством:

$$A' = C^T A C \tag{6.15}$$

(напоминание: C^T – транспонированная матрица к матрице C).

►Вычислим:

$a'_{ij} = \alpha\left(\bar{e}'_i, \bar{e}'_j\right) = \alpha\left(c_{1i}\bar{e}_1 + \dots + c_{ni}\bar{e}_n, c_{1j}\bar{e}_1 + \dots + c_{nj}\bar{e}_n\right) =$

$= c_{1i}\alpha\left(\bar{e}_1, c_{1j}\bar{e}_1 + \dots + c_{nj}\bar{e}_n\right) + \dots + c_{ni}\alpha\left(\bar{e}_n, c_{1j}\bar{e}_1 + \dots + c_{nj}\bar{e}_n\right) =$

$= c_{1i}c_{1j}\alpha(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + \dots + c_{ni}c_{1j}\alpha(\bar{e}_n, \bar{e}_1) + \dots +$

$+ c_{1i}c_{nj}\alpha(\bar{e}_1, \bar{e}_n) + \dots + c_{ni}c_{nj}\alpha(\bar{e}_n, \bar{e}_n) =$

$$= c_{1i}\, a_{11}c_{1j} + \dots + c_{1i}a_{1n}c_{nj} + \dots + c_{ni}a_{n1}c_{1j} + \dots + c_{ni}a_{nn}c_{nj}. \tag{6.16}$$

Для элементов c_{ij} матрицы C и элементов c_{ij}^Tматрицы C^T справедливо равенство:

$$c_{ij} = c_{ji}^T, i, j = 1, \dots, n.$$

Поэтому (6.16) принимает вид:

$$a'_{ij} = c_{i1}^T a_{11} c_{1j} + \dots + c_{i1}^T a_{1n} c_{nj} + \dots + c_{in}^T a_{n1} c_{1j} + \dots + c_{in}^T a_{nn} c_{nj} =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{il}^T a_{lk} c_{kj}. \qquad (6.17)$$

Равенство (6.15) равносильно доказанному равенству (6.17).◄

6.3. Квадратичные формы

Определение. Билинейная ***функция*** $\alpha(\bar{x}, \bar{y})$ называется ***симметричной***, если для всех $\bar{x}, \bar{y} \in V$ выполняется равенство

$$\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha(\bar{y}, \bar{x}).$$

Это означает, что для ее матрицы A в любом базисе выполняется равенство

$$a_{ik} = a_{ki} \qquad (6.18)$$

для всех $i, k = 1, \dots, n$, то есть A – симметричная матрица.

Значения $\alpha(\bar{x}, \bar{x})$ симметричной билинейной функции при $\bar{x} = \bar{y} \in V$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ выражаются, согласно теореме 6.1 и равенству (6.18), формулой

$$\alpha(\bar{x}, \bar{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 +$$
$$+ \dots + a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{n1}x_nx_1 + \dots + a_{nn}x_n^2 = \qquad (6.19)$$
$$= a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1,n}x_n.$$

Определение. Правая часть равенства (6.19) называется ***квадратичной формой*** от переменных $x_1, \dots, x_n$ с матрицей A.

Примеры квадратичных форм:

1. $n = 1, \quad \alpha(\bar{x}, \bar{x}) = ax^2$
2. $n = 2, \quad \alpha(\bar{x}, \bar{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$
   $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$
3. Важный для математического анализа пример второго дифференциала функции $f = f(x_1, \dots, x_n)$:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} dx_n^2 +$$
$$+2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} dx_1 dx_n + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n} dx_{n-1} dx_n.$$

Выражения (6.19) для значения квадратичной формы выглядит весьма громоздко.

Следующая стоящая перед нами задача: подобрать базис n-мерного пространства V так, чтобы значительно упростить его выражение.

Теорема 6.9 (Приведение квадратичной формы по Лагранжу). Пусть $\alpha(\bar{x},\bar{x})$ – произвольная квадратичная форма в n-мерном пространстве V. Тогда существует базис, котором она имеет вид:

$$\alpha(\bar{x},\bar{x}) = M_1 x_1^2 + \cdots + M_n x_n^2, \tag{6.20}$$

то есть является суммой квадратов переменных с коэффициентами перед ними.

►Используется метод математической индукции по n.

При $n = 1$ выражение (6.19) уже имеет требуемый вид.

Сделали индуктивное предположение, состоящее в том, что для любой квадратичной формы от $n-1$ переменной существует базис, в котором эта квадратичная форма имеет вид, аналогичный (6.20), с заменой числа n числом $n-1$.

Если форма нулевая, то она имеет нулевую матрицу в любом базисе и все коэффициенты в представлении (6.19) равны 0 и теорема, тем самым, верна.

Пусть форма ненулевая и пусть существует i такое, что $a_{ii} \neq 0$. Без ограничения общности рассуждения считаем, что $a_{11} \neq 0$ (нумерация переменных в нашем распоряжении; смена нумерации переменных означает просто перестановку элементов базиса).

Преобразуем (6.19) так:

$$\alpha(\bar{x},\bar{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + \beta(x_2, \dots, x_n), \tag{6.21}$$

где $\beta(x_2, \dots, x_n)$ – квадратичная форма от переменных $x_2, \dots, x_n$. Далее, так как $a_{11} \neq 0$,

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n =$$

$$= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 - \cdots - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}x_n^2. \tag{6.22}$$

Согласно (6.22) правая часть (6.21) преобразуется так:

$$\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 - \cdots - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}x_n^2 + \beta(x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 + \delta(x_2, \dots, x_n), \tag{6.23}$$

где $\delta(x_2, \dots, x_n)$ – квадратичная форма от переменных $x_2, \dots, x_n$.

Пусть

$$x_1' = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n,$$
$$x_2' = x_2, \ldots, x_n' = x_n, \tag{6.24}$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{6.25}$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11} \neq 0,$$

поэтому матрица, стоящая в правой части равенства (6.25) имеет обратную, обозначим эту обратную матрицу C.

Согласно (6.6), C – матрица перехода от базиса $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ к базису $\bar{e}_1', \ldots, \bar{e}_n'$.

Осталось применить предположение индукции к $\delta(x_2', \ldots, x_n')$. В итоге из (6.23) получится выражение вида (6.20):

$$\mu_1 \check{x}_1^2 + \cdots + \mu_n \check{x}_n^2$$

в новых координатах $\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n$. Переход к координатам $\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n$ происходит в результате изменения базиса, что следует из того, что по предположению индукции существует преобразование базиса $\bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'$ в базис $\check{e}_2, \ldots, \check{e}_n$, при котором $\delta(x_2', \ldots, x_n')$ перейдет в $\mu_2 \check{x}_2^2 + \cdots + \mu_n \check{x}_n^2$, а базис $\check{e}_1 = \bar{e}_1', \check{e}_2, \ldots, \check{e}_n$ линейно эквивалентен исходному базису.

Осталось рассмотреть случай, в котором все $a_{ii} = 0, i = 1, \ldots, n$. Так как форма ненулевая, то существуют i, j такие, что $a_{ij} \neq 0$. Как отмечалось выше, можно считать, что $i = 1, j = 2$. Тогда замена переменных

$$x_1 = x_1' + x_2',$$
$$x_2 = x_1' - x_2', \tag{6.26}$$
$$x_3 = x_3', \ldots, x_n = x_n'$$

приведет к форме, содержащей

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(x_1')^2 - 2a_{12}(x_2')^2$$

то есть к форме, рассмотренной выше.

Замена (6.26) означает следующее преобразование неизвестных:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}. \tag{6.27}$$

Определитель матрицы, стоящей в (6.27), равен -2 (в чем можно убедиться, вычтя из второй его строки первую), то есть отличен от 0 и замена (6.26) означает переход к новому базису.◀

Примеры.

При $a_{11} \neq 0$

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \mu_1\check{x}_1^2 + \mu_2\check{x}_2^2,$$

где

$$\mu_1 = \frac{1}{a_{11}}, \mu_2 = a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}},$$

$$\check{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$

$$\check{x}_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2,$$

то есть

$$\begin{pmatrix} \check{x}_1 \\ \check{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{6.28}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является обратной матрицей для матрицы C перехода к новому базису, соответствующей преобразованию координат (6.28), то есть

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Пояснение:

$$|A| = a_{11}, A_{11} = 1, A_{12} = 0, A_{21} = -a_{12}, A_{22} = a_{11},$$

используем формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$(\bar{e}_1', \bar{e}_2') = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)\frac{1}{a_{11}}\begin{pmatrix} 1 & -a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$$

то есть

$$\bar{e}_1' = \frac{1}{a_{11}}\bar{e}_1, \bar{e}_2' = \frac{-a_{12}}{a_{11}}\bar{e}_1 + \bar{e}_2.$$

Формулу (6.20) часто преобразуют, используя переменные:

$$z_i = \sqrt{|\mu_i|}\check{x}_i$$

В результате чего получаем формулу вида:

$$\pm z_1^2 \pm \cdots \pm z_r^2, r \le n. \tag{6.29}$$

Теорема 6.4. При переходе к любому новому базису ранг матрицы квадратичной формы не меняется. Будем называть его ***рангом квадратичной формы.*** Эта величина равна количеству отличных от нуля коэффициентов в (6.20).

Теорему оставим без доказательства. См., например, В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Линейная алгебра, Классический университетский учебник, Москва, Физматлит, 2007., стр. 180.

Квадратичную форму можно различными способами привести к виду (6.29). Однако при этом имеет место теорема.

Теорема 6.5 (Закон инерции квадратичных форм). При любом преобразовании заданной квадратичной формы к виду (6.29) количество положительных чисел среди полученных чисел $\mu_1, \dots, \mu_n$, равно как количество отрицательных чисел среди них, сохраняется. Таким образом, все её представления в виде (6.29) отличаются только порядком слагаемых.

И эта теорема оставлена без доказательства. См., например, В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Линейная алгебра, Классический университетский учебник, Москва, Физматлит, 2007., стр. 189.

6.4. Положительно определенные и отрицательно определенные квадратичные формы

Определение. Если для всех $\bar{x} \neq \bar{0}$ ***квадратичная форма*** (6.19) принимает положительное значение, то она называется ***положительно определенной.*** Если для всех $\bar{x} \neq \bar{0}$ она принимает отрицательные значения, то она называется ***отрицательно определенной.*** Если для всех $\bar{x} \neq \bar{0}$ ее значения неотрицательны, она называется ***положительно полуопределенной***, если все ее значения не положительны, она называется ***отрицательно полуопределенной.***

Пример.

В трехмерном пространстве форма

${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$ положительно определена,

$-{x_1}^2 - {x_2}^2 - {x_3}^2$ отрицательно определена,

${x_1}^2 + {x_2}^2 -$ положительно полуопределена,

$-{x_2}^2 - {x_3}^2 -$ отрицательно полуопределена.

Если для форм, приведенных к виду (6.20) вопрос об их определенности очевиден, то в общем случае формы (6.19) с матрицей *A* получена следующая теорема.

Теорема 6.6 (Критерий Сильвестра). Для квадратной матрицы *A* назовем ее главными минорами определители:

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (6.29)$$

Квадратичная форма с матрицей *A* положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры (6.29) матрицы А положительны.

Она отрицательно определена, если

$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ \Delta_3 < 0, \ldots,$

то есть, если знаки миноров чередуются, начиная со знака «$-$».

Мы не будем доказывать и эту теорему(см., например, В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Линейная алгебра, Классический университетский учебник, Москва, Физматлит, 2007., стр. 192.), укажем лишь способ запомнить сформулированное в ней правило.

Для положительно определенной формы

${x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2$

$$\Delta_1 = 1, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \ldots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

то есть главные миноры > 0.

Для отрицательно определенной формы

$-{x_1}^2 - \cdots - {x_n}^2$

$$\Delta_1 = -1,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \dots\ , \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n.$$

Знаки миноров (6.29) чередуются, начиная со знака «−».

6.5. Решение задач

Определение. Пусть $\alpha(\bar{x}, \bar{x})$ − произвольная квадратичная форма в n-мерном пространстве V. Тогда существует базис, котором она имеет ***нормальный вид:***

$$\alpha(\bar{x}, \bar{x}) = \varepsilon_1 x_1^2 + \cdots + \varepsilon_n x_n^2,$$

где ε_k принимают значения $1, -1, 0$.

Замечание. Напомним, что

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$

Задача 1. Привести к нормальному виду квадратичную форму

$x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$

и указать линейное преобразование координат, которое приводит к такому виду.

Решение.

Сгруппируем в отдельную скобку все слагаемые, которые содержат x_1 и выделим полный квадрат («захватив в него» все слагаемые, содержащие x_1, причем, то, что появятся новые слагаемые, не содержащие x_1, нас не пугает):

$$\begin{aligned}
&x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 = \\
&= (x_1^2 + 2x_1x_2) + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3 = \\
&= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_2^2) + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3 = \\
&= ((x_1 + x_2)^2 - x_2^2) + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3 = \\
&= (x_1 + x_2)^2 - x_2^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3 = \\
&= (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3 =
\end{aligned}$$

заметим, что x_1 содержится только в скобке, а среди остальных слагаемых x_1 уже не содержится.

Далее из остальных слагаемых выделим полный квадрат, «захватив в него» все слагаемые, содержащие x_2:

$$
\begin{aligned}
&= (x_1 + x_2)^2 + (x_2^2 + 4x_2x_3) + 5x_3^2 = \\
&= (x_1 + x_2)^2 + (x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2 - 4x_3^2) + 5x_3^2 = \\
&= (x_1 + x_2)^2 + ((x_2 + 2x_3)^2 - 4x_3^2) + 5x_3^2 = \\
&= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 + x_3^2.
\end{aligned}
$$

Итак, если сделать замену переменных

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3, \end{cases}
$$

то квадратичная форма примет вид

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

Отсюда легко видеть, что квадратичная форма будет положительно определенной.

Ответ: $x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

при $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3. \end{cases}$

Задача 2. Привести к нормальному виду квадратичную форму

$$x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$$

и указать линейное преобразование координат, которое приводит к такому виду.

Решение.

Сгруппируем в отдельную скобку все слагаемые, которые содержат x_1 и выделим полный квадрат («захватив в него» все слагаемые, содержащие x_1, причем, то, что появятся новые слагаемые, не содержащие x_1, нас не пугает):

$$
\begin{aligned}
&x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 = \\
&= (x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3) + 4x_2^2 + x_3^2 = \\
&= (x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot 2x_2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_3) + 4x_2^2 + x_3^2 = \\
&= ((x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_2x_3) + 4x_2^2 + x_3^2 = \\
&= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_2x_3 + 4x_2^2 + x_3^2 = \\
&= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + 4x_2x_3 =
\end{aligned}
$$

заметим, что x_1 содержится только в скобке, а среди остальных слагаемых x_1 уже не содержится.

Чтобы привести к сумме или разности квадратов выражение $4x_2x_3$, сделаем «промежуточную подстановку» следующего вида

$$\begin{cases} x_2 = z_2 - z_3 \\ x_3 = z_2 + z_3, \end{cases}$$

тогда

$$4x_2x_3 = 4(z_2^2 - z_3^2) = 4z_2^2 - 4z_3^2.$$

Но из того, что

$$\begin{cases} x_2 = z_2 - z_3 \\ x_3 = z_2 + z_3, \end{cases}$$

следует, что

$$\begin{cases} z_2 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3) \\ z_3 = \frac{1}{2}(-x_2 + x_3), \end{cases}$$

поэтому

$$4x_2x_3 = 4z_2^2 - 4z_3^2 = (x_2 + x_3)^2 - (-x_2 + x_3)^2$$

и, следовательно, исходная квадратичная форма будет преобразована к виду

$$\begin{aligned} & x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 = \\ & = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (-x_2 + x_3)^2 = \\ & = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2. \end{aligned}$$

Сделав замену переменных

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_2 - x_3, \end{cases}$$

получим, что исходная квадратичная форма примет вид

$$x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

Ответ: $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

при $\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_2 - x_3. \end{cases}$

Задача 3. Привести к нормальному виду квадратичную форму

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

и указать линейное преобразование координат, которое приводит к такому виду.

Решение.

Выделим постепенно полные квадраты так, как это было сделано в предыдущих задачах:

$$
\begin{aligned}
&x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3=\\
&=(x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3)-2x_2^2+x_3^2+2x_2x_3=\\
&=(x_1^2+2\cdot x_1\cdot x_2+2\cdot x_1\cdot 2x_3)-2x_2^2+x_3^2+2x_2x_3=\\
&=((x_1+x_2+2x_3)^2-x_2^2-4x_3^2-4x_2x_3)-2x_2^2+x_3^2+2x_2x_3=\\
&=(x_1+x_2+2x_3)^2-x_2^2-4x_3^2-4x_2x_3-2x_2^2+x_3^2+2x_2x_3=\\
&=(x_1+x_2+2x_3)^2-3x_2^2-3x_3^2-2x_2x_3=\\
&=(x_1+x_2+2x_3)^2-3\left(x_2^2+\tfrac{2}{3}x_2x_3\right)-3x_3^2=\\
&=(x_1+x_2+2x_3)^2-3\left(x_2^2+2\cdot x_2\cdot\tfrac{1}{3}x_3+\tfrac{1}{9}x_3^2-\tfrac{1}{9}x_3^2\right)-3x_3^2=\\
&=(x_1+x_2+2x_3)^2-3\left(\left(x_2+\tfrac{1}{3}x_3\right)^2-\tfrac{1}{9}x_3^2\right)-3x_3^2=\\
&=(x_1+x_2+2x_3)^2-3\left(x_2+\tfrac{1}{3}x_3\right)^2+\tfrac{1}{3}x_3^2-3x_3^2=\\
&=(x_1+x_2+2x_3)^2-3\left(x_2+\tfrac{1}{3}x_3\right)^2-\tfrac{8}{3}x_3^2=\\
&=(x_1+x_2+2x_3)^2-\left(\sqrt{3}\left(x_2+\tfrac{1}{3}x_3\right)\right)^2-\left(\tfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x_3\right)^2.
\end{aligned}
$$

Сделав замену переменных

$$
\begin{cases}
y_1=x_1+x_2+2x_3\\
y_2=\sqrt{3}x_2+\frac{1}{\sqrt{3}}x_3\\
y_3=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x_3,
\end{cases}
$$

получим, что исходная квадратичная форма примет вид

$$x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3=y_1^2-y_2^2-y_3^2.$$

Ответ: $x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3=y_1^2-y_2^2-y_3^2$

при $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+2x_3\\ y_2=\sqrt{3}x_2+\frac{1}{\sqrt{3}}x_3\\ y_3=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x_3. \end{cases}$

Задача 4. Привести к нормальному виду квадратичную форму

$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$

и указать линейное преобразование координат, которое приводит к такому виду.

Решение.

К сожалению, в это выражении ни одна из переменных не входит в виде x_i^2, поэтому начать выделение квадратов сразу не получится. Сделаем сначала подстановку

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 \\ x_2 = z_1 - z_2 \\ x_3 = z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ z_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ z_3 = x_3 \end{cases}$$

тогда

$$\begin{aligned} &x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2) + (z_1 - z_2)z_3 + (z_1 + z_2)z_3 = \\ &= z_1^2 - z_2^2 + z_1z_3 - z_2z_3 + z_1z_3 + z_2z_3 = z_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_3 = \\ &= (z_1^2 + 2z_1z_3) - z_2^2 = \\ &= ((z_1 + z_3)^2 - z_3^2) - z_2^2 = (z_1 + z_3)^2 - z_2^2 - z_3^2 = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ y_2 = z_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ y_3 = z_3 = x_3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

при $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ y_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ y_3 = x_3. \end{cases}$

Задача 5. Привести к нормальному виду квадратичную форму

$$x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

и указать линейное преобразование координат, которое приводит к такому виду.

Решение.

Сгруппируем в отдельную скобку все слагаемые, которые содержат x_1 и выделим полный квадрат («захватив в него» все слагаемые, содержащие x_1, и напомним, что появятся новые слагаемые, не содержащие x_1, и это нас не пугает):

$$\begin{aligned} &x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 = \\ &= (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3) - 3x_3^2 - 6x_2x_3 = \\ &= ((x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3) - 3x_3^2 - 6x_2x_3 = \end{aligned}$$

$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 - 3x_3^2 - 6x_2x_3 =$$
$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_2x_3 =$$
$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_2x_3) =$$
$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 = y_1^2 - y_2^2$$

Ответ: $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 = y_1^2 - y_2^2$

при $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3. \end{cases}$

Задача 6. Привести к нормальному виду квадратичную форму

$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

и указать линейное преобразование координат, которое приводит к такому виду.

Решение.

Выделим постепенно полные квадраты так, как это было сделано в предыдущих задачах:

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 =$$
$$= (x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3) + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 =$$
$$= (x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot 2x_2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_3) + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 =$$
$$= ((x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3) + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + 2(x_3^2 - x_2x_3) - 3x_2^2 =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + 2\left(\left(x_3 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 - \frac{1}{4}x_2^2\right) - 3x_2^2 =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + 2\left(x_3 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 - \frac{7}{2}x_2^2 =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 - \sqrt{2}x_3\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{7}{2}}x_2\right)^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2,$$

где

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 - \sqrt{2}x_3 \\ y_3 = \sqrt{\frac{7}{2}}x_3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$

при $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 - \sqrt{2}x_3 \\ y_3 = \sqrt{\frac{7}{2}}x_3. \end{cases}$

Привести квадратичную форму к нормальному виду можно и другим способом. Достаточно найти собственные значения матрицы этой квадратичной формы. Положительному собственному значению будет соответствовать квадрат с коэффициентом $+1$, отрицательному собственному значению будет соответствовать квадрат с коэффициентом -1, собственному значению, равному нулю будет соответствовать квадрат с коэффициентом 0 (он просто будет отсутствовать).

Для нахождения преобразования, приводящего квадратичную форму к нормальному виду, надо будет найти собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям, что бывает технически не просто, если собственные значения не являются рациональными числами.

Задача 7. Привести к нормальному виду квадратичную форму

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$

(уже рассмотренная в задаче 4 квадратичная форма).

Решение.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

этой квадратичной формы

и найдем ее собственные значения:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 + 1 + \lambda + \lambda + \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda + 2.$$

$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lambda_1 = 2 > 0, \lambda_2 = -1 < 0, \ \lambda_3 = -1 < 0.$

Поэтому после приведения квадратичной формы к нормальному виду получим

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

Ответ: $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

Задача 8. Привести к нормальному виду квадратичную форму

$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

(уже рассмотренная в задаче 6 квадратичная форма).

Решение.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

этой квадратичной формы

и найдем ее собственные значения:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (1 - 2\lambda + \lambda^2)(3 - \lambda) + 2 + 2 - (1 - \lambda) - (1 - \lambda) - 4(3 - \lambda) =$$
$$= 3 - 6\lambda + 3\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 4 - 2 + 2\lambda - 12 + 4\lambda =$$
$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda - 7.$$

$\lambda^3 - 5\lambda^2 + \lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 7) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 3 + \sqrt{2} > 0, \lambda_2 = 3 - \sqrt{2} > 0, \ \ \lambda_3 = -1 < 0$

Поэтому после приведения квадратичной формы к нормальному виду получим

$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

Ответ: $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

Задача 9. Привести к нормальному виду квадратичную форму

$x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

(уже рассмотренная в задаче 5 квадратичная форма).

Решение.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

этой квадратичной формы

и найдем ее собственные значения:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & -3 \\ 1 & -3 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (1-\lambda)(-\lambda)(-3-\lambda) + 3 + 3 + \lambda - 9(1-\lambda) - (-3-\lambda) =$$
$$= -\lambda(\lambda^2 + 2\lambda - 3) + 6 + \lambda - 9 + 9\lambda + 3 + \lambda =$$
$$= -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda + 11\lambda = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 14\lambda$$

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 14\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + 2\lambda - 14) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -1 + \sqrt{15} > 0, \lambda_2 = -1 - \sqrt{15} < 0, \ \ \lambda_3 = 0.$$

Поэтому после приведения квадратичной формы к нормальному виду получим

$$x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 = y_1^2 - y_2^2.$$

Ответ: $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 = y_1^2 - y_2^2$.