МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ С ПОМОЩЬЮ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(методическое пособие для бакалавров химического факультета)

А.И. КОЗКО, Л.М. ЛУЖИНА., А.А. ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2026

УДК 517.3

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов. В этом пособии содержится материал, относящийся к курсу математического анализа, читаемому студентам второго курса химического факультета МГУ.

1. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть M – цилиндроид, ограниченный цилиндром $\varphi(x,y)=0$, высекающим на плоскости Oxy компакт σ, являющийся криволинейной трапецией

$$\sigma=\begin{Bmatrix}(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ a\le x\le b\\ y_1(x)\le y\le y_2(x), y_1(x), y_2(x)\in C([a,b])\end{Bmatrix}$$

и поверхностями $z=z_{\text{в}}(x,y)$ (сверху) и $z=z_{\text{н}}(x,y)$ (снизу), $z=z_{\text{в}}(x,y)$, $z=z_{\text{н}}(x,y)\in C(\sigma)$ (то есть непрерывны на σ). И пусть функция $f(x,y,z)$ непрерывна на M. Тогда тройной интеграл по этому цилиндроиду будет равен

$$\iiint_M f(x,y,z)dxdydz=\iint_\sigma\ dxdy\int_{z_{\text{н}}(x,y)}^{z_{\text{в}}(x,y)}f(x,y,z)dz=$$
$$=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_{\text{н}}(x,y)}^{z_{\text{в}}(x,y)}f(x,y,z)dz.$$

Задача 1. Вычислить интеграл $\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^{xy}x^3y^2zdz$.

Решение.

$$\int_0^a x^3dx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy}zdz=\int_0^a x^3dx\int_0^x y^2dy\left(\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^{xy}=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^a x^3dx\int_0^x y^2dy\,(x^2y^2)=\frac{1}{2}\int_0^a x^5dx\int_0^x y^4dy=\frac{1}{2}\int_0^a x^5dx\left(\frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^x=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int_0^a x^{10}dx=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{11}a^{11}=\frac{a^{11}}{110}.$$

Ответ: $\frac{a^{11}}{110}$.

Задача 2. Найти $\iiint_M\frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, где компакт (цилиндроид) M ограничен плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$.

Решение.

Компакт M – прямоугольная пирамида, расположенная в 1-м октанте. Пересечение плоскости $x+y+z=1$ с плоскостью $z=0$ можно найти, решив систему:

$$\begin{cases}x+y+z=1\\ \quad\ z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1\\ \quad z=0\,,\end{cases}$$

то есть плоскость $x+y+z=1$ пересекает плоскость Oxy по прямой $y=1-x$, а соответствующие координатные оси при $x=1,\ y=1,\ z=1$.

В этом случае σ – это треугольник в плоскости Oxy, ограниченный прямыми $x=0,\ y=0,\ y=1-x$; $z_{\text{н}}(x,y)=0,\ z_{\text{в}}(x,y)=1-x-y$.

Поэтому тройной интеграл можно свести к повторному следующим образом (не спешите сразу сводить к повторному двойной интеграл по проекции σ цилиндроида на плоскость Oxy).

$$\iiint_M \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3} = \iint_\sigma dxdy \int_{z_\text{н}(x,y)=0}^{z_\text{в}(x,y)=1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} =$$

$$= \iint_\sigma dxdy \int_0^{1-x-y} (x+y+z+1)^{-3} d(z + \underbrace{x+y+1}_{\substack{const \text{ при} \\ \text{интегрирова–} \\ \text{нии по } z}}) =$$

$$= \iint_\sigma dxdy \left(\frac{(x+y+z+1)^{-2}}{-2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y} = -\frac{1}{2}\iint_\sigma dxdy \left(\frac{1}{(x+y+z+1)^2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y} =$$

$$= -\frac{1}{2}\iint_\sigma dxdy \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(x+y+1)^2}\right) = -\frac{1}{2}\iint_\sigma \frac{1}{4} dxdy + \frac{1}{2}\iint_\sigma \frac{1}{(x+y+1)^2} dxdy =$$

$$= -\frac{1}{8}\iint_\sigma dxdy + \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y+1)^{-2}\, dy =$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot S(\sigma) + \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y+1)^{-2}\, d(y + \underbrace{x+1}_{\substack{const \text{ при} \\ \text{интегрирова–} \\ \text{нии по } y}}) =$$

$$= -\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 dx \left(\frac{(x+y+1)^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_0^{1-x} = -\frac{1}{16} - \frac{1}{2}\int_0^1 dx \left(\frac{1}{x+y+1}\right)\Bigg|_0^{1-x} =$$

$$= -\frac{1}{16} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right) dx = -\frac{1}{16} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}\right) d(x+1) =$$

$$= -\frac{5}{16} + \frac{1}{2}(\ln|x+1|)\Big|_0^1 = -\frac{5}{16} + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 1 = -\frac{5}{16} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

Ответ: $-\frac{5}{16} + \frac{1}{2}\ln 2$.

Замечание. Общее уравнение плоскости в трехмерном пространстве имеет вид $ax + by + cz + d = 0$, где коэффициенты a, b, c не равны нулю одновременно. В случае, когда один или два из этих коэффициентов равны нулю, иногда бывает проще относится к плоскости как к «плоскому цилиндру», построенному на соответствующей прямой. Например, плоскость $2x + 3y + 4 = 0$ параллельна оси Oz, что легко видеть, если отнестись к этой поверхности как к цилиндру, построенному на прямой $2x + 3y + 4 = 0$, лежащей в плоскости Oxy.

Задача 3. Найти $\iiint_M xydxdydz$, где компакт (цилиндроид) M ограничен поверхностями $z = xy$ (параболический гиперболоид, «седло», «повернутое и растянутое» в плоскости Oxy, напоминаем, что это легко увидеть с помощью замены $x = x' - y'$, $y = x' + y'$), плоскостями $x + y = 1$ (плоский цилиндр!) и $z = 0$ $(z \geq 0)$.

Решение.

Найдем пересечение гиперболоида с плоскостью $z = 0$:

$$\begin{cases} z = xy \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Это означает, что плоскость $z = 0$ пересекает гиперболоид по двум пересекающимся прямым, совпадающим с координатными осями, причем проекция части гиперболоида, лежащей в верхнем полупространстве, находится в первом и третьем квадрантах. Поэтому компакт (замкнутое и ограниченное множество) получится, только если рассматривать часть фигуры, расположенной в первом октанте. Соответственно, проекция будет находиться в первом квадранте и будет представлять из себя прямоугольный треугольник. Вообще, параболический гиперболоид – одна из двух удивительных криволинейных поверхностей второго порядка, через каждую точку которой проходит пара прямых, целиком лежащих на этой поверхности.

В этом случае σ – это треугольник в плоскости Oxy, ограниченный прямыми $x = 0,\ y = 0,\ y = 1 - x$; $z_{\text{н}}(x,y) = 0,\ z_{\text{в}}(x,y) = xy$, поэтому

$$\iiint_M xydxdydz = \iint_\sigma dxdy \int_{z_{\text{н}}(x,y)=0}^{z_{\text{в}}(x,y)=xy} xydz = \iint_\sigma xydxdy \int_{z_{\text{н}}(x,y)=0}^{z_{\text{в}}(x,y)=xy} dz =$$

$$= \iint_\sigma xydxdy(xy - 0) = \iint_\sigma x^2y^2dxdy = \int_0^1 x^2dx \int_0^{1-x} y^2dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 x^2dx \left(y^3\Big|_0^{1-x}\right) = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2(1-x)^3dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6} - \frac{3}{20}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{10-9}{60} = \frac{1}{180}\,.$$

Ответ: $\frac{1}{180}$.

Задача 4. Найти $\iiint_M y\cos(z + x)\,dxdydz$, где компакт (цилиндроид) M ограничен поверхностями $y = \sqrt{x}$ (цилиндр), плоскостями $y = 0,\ x + z = \frac{\pi}{2}$, $z = 0$ (плоские цилиндры!).

Найдем пересечение плоского цилиндра $x + z = \frac{\pi}{2}$ с плоскостью $z = 0$:

$$\begin{cases} x + z = \frac{\pi}{2} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ z = 0\,. \end{cases}$$

Таким образом, проекция цилиндроида на плоскость Oxy – это фигура, ограниченная кривыми $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$; $z_{\text{н}}(x,y) = 0,\ z_{\text{в}}(x,y) = \frac{\pi}{2} - x$.

$$\iiint_M y\cos(z + x)\,dxdydz = \iint_\sigma dxdy \int_{z_{\text{н}}(x,y)=0}^{z_{\text{в}}(x,y)=\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z + x)\,dz =$$

$$= \iint_\sigma ydxdy \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(z + x)\,dz = \iint_\sigma ydxdy \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(z + x)\,d(z + x) =$$

$$= \iint_\sigma ydxdy \left(\sin(z + x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x}\right) = \iint_\sigma ydxdy \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin x\right) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x)dx \int_0^{\sqrt{x}} ydy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1 - \sin x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x d\cos x = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}\left(x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx =$$
$$= \frac{\pi^2}{16} + 0 - \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{\pi^2}{16} - 1.$$

Переход к цилиндрическим и сферическим координатам

1. **Цилиндрические координаты**

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z, \end{cases}$$

где $r \geq 0$, $\varphi \in [0; 2\pi]$ (в некоторых задачах φ принадлежит любому отрезку длины 2π), $z \in \mathbb{R}$.

Якобиан в этом случае равен

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \Rightarrow |\mathcal{J}| = r.$$

2. **Сферические координаты**

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = r\sin\theta, \end{cases}$$

где $r \geq 0$, $\varphi \in [0; 2\pi]$ (в некоторых задачах – любому отрезку длины 2π), $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Якобиан в этом случае равен

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta \\ -r\cos\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & 0 \\ -r\sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta \end{vmatrix} =$$
$$= r^2\begin{pmatrix} \cos^3\theta\cos^2\varphi + \cos\theta\sin^2\theta\sin^2\varphi + \\ + \cos^3\theta\sin^2\varphi + \cos\theta\sin^2\theta\cos^2\varphi \end{pmatrix} =$$
$$= r^2(\cos^3\theta + \cos\theta\sin^2\theta) = r^2\cos\theta.$$

$\Rightarrow |\mathcal{J}| = r^2\cos\theta$, так как $\cos\theta \geq 0$ при $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Кроме того, при переходе к сферическим координатам выполняется:

$x^2+y^2+z^2=r^2$ и $x^2+y^2=r^2\cos^2\theta$.

Замечание. Так получилось, что цилиндрические координаты все вводят одинаково. А вот сферические координаты можно вводить немного по-разному. При этом, естественно, изменятся выражения не только для x, y, z, но и для $|\mathcal{J}|$ и x^2+y^2. Будьте внимательны и всегда уточняйте у собеседника, как именно он вводит сферические координаты.

Задача 5. Сделать замену переменных $\iiint_M f(x,y,z)dxdydz$, где компакт (цилиндроид) M представляет собой часть 1-го октанта, ограниченного цилиндром $x^2+y^2=R^2$ и плоскостями $y=x$, $y=\sqrt{3}x$, $z=0$, $z=1$.

Решение.

В этом случае от цилиндра $x^2+y^2=R^2$, $y=x$, $y=\sqrt{3}x$ плоскостями $z=0$, $z=1$ «отрезается» цилиндроид (который очень напоминает «кусочек сыра», который мы покупаем в магазине). Проекцией цилиндроида на плоскость Oxy является сектор, ограниченный прямыми $y=x$, $y=\sqrt{3}x$ и окружностью $x^2+y^2=R^2$. Напомним, что угловой коэффициент прямой совпадает с тангенсом угла наклона этой прямой ($k=1 \Longrightarrow \operatorname{tg}\varphi=1 \Longrightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$, $k=\sqrt{3} \Longrightarrow \operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3} \Longrightarrow \varphi=\frac{\pi}{3}$. Поэтому при переходе к цилиндрическим координатам получим (не забывайте про модуль Якобиана!)

$$\iiint_M f(x,y,z)dxdydz=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_0^R rdr\int_0^1 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz.$$

Задача 6. Сделать замену переменных $\iiint_M f(x,y,z)dxdydz$, где компакт (цилиндроид) M ограничен цилиндром $x^2+y^2=2x$, плоскостью $z=0$ и эллиптическим параболоидом («чашей») $z=x^2+y^2$.

Решение.

Цилиндр $x^2+y^2=2x \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$ построен на окружности радиуса 1 с центром в точке $O(1,0)$. Чтобы найти пределы интегрирования при переходе к цилиндрическим координатам по переменным r и φ, надо проделать следующее (решить задачу «в три действия»):

1. $x^2+y^2=2x \Longrightarrow r^2=2r\cos\varphi$
2. $r_1(\varphi)=0$, $r_2(\varphi)=2\cos\varphi$
3. $\begin{cases} r_1(\varphi)\ge 0 \\ r_2(\varphi)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\ge 0 \\ 2\cos\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому

$$\iiint_M f(x,y,z)dxdydz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi} rdr\int_0^{r^2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz.$$

Задача 7. Вычислить $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz.$

Решение.

Так как в плоскости Oxy интегрирование происходит по правому полукругу радиуса 1, то при переходе в цилиндрические координаты получим (не забывайте про модуль Якобиана!)

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^a dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \int_0^1 r dr \cdot \int_0^a dz =$$
$$= \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \frac{\pi a}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi a}{2}$.

Задача 8. Вычислить $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2} dz.$

Решение.

В этом случае при каждом $x \in [0,2]$ переменная y меняется от $y = 0$ до $y = \sqrt{2x - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 2x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$

(см. задачу 5), поэтому при переходе в цилиндрические координаты получим (здесь σ ограничена прямой $y = 0$ и верхней полуокружностью окружности $x^2 + y^2 = 2x$):

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r dr \int_0^a z r dz =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int_0^a z dz =$$
$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^{2\cos\varphi} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \, d\varphi =$$
$$= \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\varphi) d\sin\varphi =$$
$$= \frac{4a^2}{3} \left(\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{4a^2}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4a^2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8a^2}{9}.$$

Ответ: $\frac{8a^2}{9}$.

Задача 9. Вычислить $\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2) dz.$

Решение.

Заметим, что пределы интегрирования в первых двух интегралах задают точки внутри окружности $x^2 + y^2 = R^2$, а последний интеграл задает изменение z от $z_{\text{н}}(x,y) = 0$ до $z_{\text{в}}(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ – верхней полусферы. Это означает, что интегрирование происходит по верхнему полушарию радиуса R, поэтому при переходе в сферические координаты получим

$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dz =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \underbrace{r^2\cos^2\theta}_{=x^2+y^2} \cdot \underbrace{r^2\cos\theta}_{=|\mathcal{J}|} dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta \int_0^R r^4\, dr =$

$= \frac{R^5}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta = \frac{R^5}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\cos\theta\, d\theta =$

$= \frac{R^5}{5}\cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi) d\sin\varphi = \frac{2\pi R^5}{5}\left(\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2\pi R^5}{5}\left(1-\frac{1}{3}\right) =$

$= \frac{4\pi R^5}{15}$.

Ответ: $\frac{4\pi R^5}{15}$.

Задача 10. Вычислить $\iiint_M (x^2+y^2)dxdydz$, где $M = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \rho^2 \le x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$.

Решение.

В этой задаче компакт M представляет собой шаровой слой, то есть часть пространства между двумя концентрическими сферами радиусов ρ и R соответственно. Поэтому при переходе в сферические координаты получим

$\iiint_M (x^2+y^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_\rho^R \underbrace{r^2\cos^2\theta}_{=x^2+y^2} \cdot \underbrace{r^2\cos\theta}_{=|\mathcal{J}|} dr =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta \int_\rho^R r^4\, dr = 2\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{5}(R^5-\rho^5) = \frac{8\pi(R^5-\rho^5)}{15}$.

Ответ: $\frac{8\pi(R^5-\rho^5)}{15}$.

Задача 11. $\iiint_M \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, где M – шар, ограниченный сферой $x^2+y^2+z^2 = x$.

Решение.

В этой задаче $x^2+y^2+z^2 = x \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ – сфера радиуса $R = \frac{1}{2}$ с центром в точке $O\left(\frac{1}{2},0,0\right)$. Чтобы определить пределы интегрирования при переходе в сферические координаты, снова решим задачу «в три действия»:

1. $x^2+y^2+z^2 = x \Longrightarrow r^2 = r\cos\theta\cos\varphi$
2. $r_1(\varphi,\theta) = 0,\ r_2(\varphi,\theta) = \cos\theta\cos\varphi$
3. $\begin{cases} r_1(\varphi,\theta)\ge 0 \\ r_2(\varphi,\theta)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \ge 0 \\ \cos\theta\cos\varphi \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, так как $\cos\theta \ge 0$ при всех $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому

$$\iiint_M \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{r_1(\varphi,\theta)=0}^{r_2(\varphi,\theta)=\cos\theta\cos\varphi} r^2\cos\theta\, r\, dr =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_0^{\cos\theta\cos\varphi} r^3\, dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^{\cos\theta\cos\varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta\,(\cos^4\theta\cos^4\varphi) = \frac{1}{4}\cdot \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi}_{\boxed{1}} \cdot \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\, d\theta}_{\boxed{2}} \boxed{=}$$

$$\boxed{1} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\varphi)^2 d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2}+\underbrace{2\cos 2\varphi}_{T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi}+\frac{1}{2}\underbrace{\cos 4\varphi}_{T_0=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}}\right) d\varphi = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\pi = \frac{3\pi}{8}.$$

$$\boxed{2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^4\theta\cos\theta}_{\text{четная}}\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta)^2 d\sin\theta =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)^2 d\sin\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2\sin^2\theta+\sin^4\theta)\, d\sin\theta =$$

$$= 2\left(\left(\sin\theta-\frac{2\sin^3\theta}{3}+\frac{\sin^5\theta}{5}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = 2\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{16}{15}.$$

$$\boxed{=}\ \frac{1}{4}\cdot\frac{3\pi}{8}\cdot\frac{16}{15} = \frac{\pi}{10}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{10}$.

Задача 12. $\iiint_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}dxdydz$, где M – шар, ограниченный сферой $x^2+y^2+z^2=1$.

Решение.

Заметим, что в этом случае введение обычных сферических координат приведет к интегралу с очень непростой подынтегральной функцией. Поэтому введем «немножко другие» сферические координаты:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = r\sin\theta + 2, \end{cases}$$

Якобиан в этом случае также равен $r^2\cos\theta$ (проверьте!).

Найдем пределы интегрирования (решим задачу «в три действия»):

1. $x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow r^2\cos^2\theta+(r\sin\theta+2)^2=1$
$\Leftrightarrow r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta+4r\sin\theta+4=1$
$\Leftrightarrow r^2+4r\sin\theta+3=0$

2. $r_1(\varphi,\theta)=r_1(\theta)=-2\sin\theta-\sqrt{4\sin^2\theta-3}$,
$r_2(\varphi,\theta)=r_2(\theta)=-2\sin\theta+\sqrt{4\sin^2\theta-3}$

3. $\begin{cases} r_1(\theta)\ge 0 \\ r_2(\theta)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sin\theta-\sqrt{4\sin^2\theta-3}\ge 0 \\ -2\sin\theta+\sqrt{4\sin^2\theta-3}\ge 0 \end{cases}$

Заметим, что $r_2(\theta)\ge r_1(\theta)\ge 0 \Leftrightarrow -2\sin\theta-\sqrt{4\sin^2\theta-3}\ge 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{4\sin^2\theta-3}\le -2\sin\theta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sin^2\theta-3\ge 0 \\ -2\sin\theta\ge 0 \\ 4\sin^2\theta-3\le 4\sin^2\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\theta\le -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin\theta\ge\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta\le 0 \\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\theta\le -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right].$$

Так как $r_2(\theta)$, $r_1(\theta)$ не зависят от φ, то $r_2(\theta)$, $r_1(\theta)$ будут неотрицательны при всех $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]$ и при любом $\varphi\in[0;2\pi]$. Поэтому получаем, что

$$\iiint_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}dxdydz =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{-2\sin\theta-\sqrt{4\sin^2\theta-3}}^{-2\sin\theta+\sqrt{4\sin^2\theta-3}} \frac{1}{r}\cdot r^2\cos\theta\, dr =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \cos\theta\, d\theta \left(\frac{r^2}{2}\Bigg|_{-2\sin\theta-\sqrt{4\sin^2\theta-3}}^{-2\sin\theta+\sqrt{4\sin^2\theta-3}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \cos\theta\left(-4\sin\theta\sqrt{4\sin^2\theta-3}\right)d\theta =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(-4)\cdot 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\sqrt{4\sin^2\theta-3}\,d\sin\theta = \left\|\begin{matrix} \sin\theta=t \\ t\in\left[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\end{matrix}\right\| =$$
$$= -8\pi\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} t\sqrt{4t^2-3}\,dt = -8\pi\cdot\frac{1}{8}\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{4t^2-3}\,d(4t^2-3) =$$
$$= -\pi\cdot\frac{2}{3}\left((4t^2-3)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = -\frac{2\pi}{3}(0-1) = \frac{2\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ С ПОМОЩЬЮ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Объем компакта M равен

$$V(M) = \iiint_M dxdydz.$$

Замечание. Не забывайте теорему о том, что если в интеграле ***пределы интегрирования постоянны***, а ***подынтегральная функция является произведением функций, каждая из которых зависит только от одной переменной***, то

$$\iiint_M f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f_1(x)f_2(y)f_3(z)dz =$$
$$= \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_c^d f_2(y)dy \cdot \int_p^q f_3(z)dz,$$

то есть тройной интеграл является произведением трех обычных римановых интегралов.

Задача 13. Найти объем компакта $V(M)$, если M ограничен поверхностями $z = 4 - y^2$ и $z = y^2 + 2$ и плоскостями $x = -1$, $x = 2$.

Решение.

Поверхности $z = 4 - y^2$ и $z = y^2 + 2$ являются цилиндрами (построенными на параболах $z = 4 - y^2$ и $z = y^2 + 2$, лежащих в плоскости Oyz), образующие которых параллельны оси Ox (то есть поверхности представляют собой «параболические корыта», вытянутые вдоль оси Ox). Плоскости $x = -1$ и $x = 2$ отсекают от цилиндра цилиндроид. Найдем пересечение кривых $z = 4 - y^2$ и $z = y^2 + 2$, на которых построены цилиндры:

$$\begin{cases} z = 4 - y^2 \\ z = y^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 2 = 4 - y^2 \\ z = y^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ z = y^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \vee y = -1 \\ z = y^2 + 2. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = y^2 + 2 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 \\ z = y^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 \\ z = 3. \end{cases}$$

Поэтому (нарисуйте «картинку» в плоскости Oyz) получаем:

$$V(M)=\iiint_M dxdydz=\int_{-1}^{1}dy\int_{y^2+2}^{4-y^2}dz\int_{-1}^{2}dx=3\int_{-1}^{1}dy\int_{y^2+2}^{4-y^2}dz=$$
$$=3\int_{-1}^{1}dy\big((4-y^2)-(y^2+2)\big)=3\int_{-1}^{1}\underbrace{(2-2y^2)}_{\substack{\text{четная}\\ \text{функция}}}dy=$$
$$=3\cdot 2\cdot 2\int_0^1(1-y^2)dy=12\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1=12\left(1-\frac{1}{3}\right)=12\cdot\frac{2}{3}=8.$$

Ответ: 8.

Задача 14. Найти объем компакта $V(M)$, если M ограничен поверхностями $z=x^2+y^2$ и $z=x^2+2y^2$ и плоскостями $y=x,\ y=2x,\ x=1$.

Решение.

Поверхности $z=x^2+y^2$ и $z=x^2+2y^2$ являются эллиптическими параболоидами («чаши»), причем, вторая «чаша» находится выше первой, поэтому в дальнейшем получим, что $z_н=x^2+y^2$ и $z_в=x^2+2y^2$. Плоскости $y=x,\ y=2x,\ x=1$ являются цилиндрами, образующие которых параллельны оси Oz. Их пересечение – тоже цилиндр, построенный на кривых $y=x,\ y=2x,\ x=1$. Пересечение прямых $y=x,\ y=2x,\ x=1$ задает треугольник, для точек которого выполняется: $0\le x\le 1,\ x\le y\le 2x$ (нарисуйте «картинку» в плоскости Oxy). Поэтому

$$V(M)=\iiint_M dxdydz=\iint_\sigma dxdy\int_{z_н=x^2+y^2}^{z_в=x^2+2y^2}dz=$$
$$=\int_0^1dx\int_x^{2x}dy\int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2}dz=\int_0^1dx\int_x^{2x}dy(x^2+2y^2-x^2-y^2)=$$
$$=\int_0^1dx\int_x^{2x}y^2dy=\frac{1}{3}\int_0^1(8x^3-x^3)dx=\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{7}{12}.$$

Ответ: $\frac{7}{12}$.

Задача 15. Найти объем компакта $V(M)$, если M ограничен поверхностями $z=x^2+y^2,\ z=2x^2+2y^2,\ y=x^2$ и плоскостью $y=x$.

Решение.

Поверхности $z=x^2+y^2$ и $z=2x^2+2y^2$ являются эллиптическими параболоидами («чаши»), причем, вторая «чаша» находится выше первой, поэтому в дальнейшем получим, что $z_н=x^2+y^2$ и $z_в=2x^2+2y^2$.. Поверхности $y=x^2$ и $y=x$ являются цилиндрами, образующие которых параллельны оси Oz. Их пересечение – тоже цилиндр, построенный на кривых $y=x^2$ и $y=x$, поэтому σ – часть плоскости Oxy, лежащая «между» этими кривыми (нарисуйте «картинку» в плоскости Oxy!).

$$V(M)=\iiint_M dxdydz=\iint_\sigma dxdy\int_{z_н=x^2+y^2}^{z_в=2x^2+2y^2}dz=$$
$$=\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}dy\int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2}dz=\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}dy(2x^2+2y^2-x^2-y^2)=$$

$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy(x^2+y^2) = \int_0^1 dx \left(\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|\begin{matrix} x \\ x^2\end{matrix}\right) =$

$= \int_0^1 \left(x^3+\frac{x^3}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{21} = \frac{35-21-5}{105} = \frac{9}{105} =$

$= \frac{3}{35}$.

Ответ: $\frac{3}{35}$.

Задача 16. Найти объем компакта $V(M)$, если M ограничен поверхностями $z=\ln(x+2)$, $z=\ln(6-x)$ и
плоскостями $x=0$, $x+y=2$, $x-y=2$.

Решение.

Поверхности $z=\ln(x+2)$ и $z=\ln(6-x)$ являются цилиндрами, образующие которых параллельны оси Oy (цилиндры построены на кривых $z=\ln(x+2)$ и $z=\ln(6-x)$, лежащих в плоскости Oxz). Их пересечение – тоже цилиндр, построенный на кривых $z=\ln(x+2)$ и $z=\ln(6-x)$.

Плоскости $x=0$, $x+y=2$, $x-y=2$ также являются цилиндрами, построенными на прямых $x=0$, $x+y=2$, $x-y=2$ образующие которых параллельны оси Oz. Их пересечение – тоже цилиндр, построенный на этих прямых. Таким образом, компакт M является пересечением двух цилиндров, причем,

$$\begin{cases} z=\ln(x+2) \\ z=\ln(6-x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(6-x)=\ln(x+2) \\ \quad z=\ln(6-x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-x=x+2 \\ z=\ln(6-x)\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \quad 2x=4 \\ z=\ln(6-x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=\ln 4\,.\end{cases}$$

Поэтому

$V(M) = \iiint_M dxdydz = \int_0^2 dx \int_{x-2}^{-x+2} dy \int_{\ln(x+2)}^{\ln(6-x)} dz =$

$= \int_0^2 dx \int_{x-2}^{-x+2} dy(\ln(6-x)-\ln(x+2)) =$

$= \int_0^2 (\ln(6-x)-\ln(x+2))dx \int_{x-2}^{-x+2} dy =$

$= \int_0^2 (\ln(6-x)-\ln(x+2))dx\big((-x+2)-(x-2)\big) =$

$= 2\int_0^2 (2-x)(\ln(6-x)-\ln(x+2))dx \boxed{=}$

Заметим, что нам придется «по частям» считать 4 интеграла. Поэтому сделаем замену переменной $2-x=t \Longrightarrow\ dx=-dt$ и пределы интегрирования $x=0 \Longrightarrow t=2,\ x=2 \Longrightarrow t=0$ (теперь придется считать только два интеграла!).

$\boxed{=} -2\int_2^0 t(\ln(4+t)-\ln(4-t))dt =$

$= 2\int_0^2 t\ln(4+t)\,dt - 2\int_0^2 t\ln(4-t)\,dt =$

$= \int_0^2 \ln(4+t)\,dt^2 - \int_0^2 \ln(4-t)\,dt^2 =$

$= (t^2\ln(4+t))\big|_0^2 - \int_0^2 t^2 d\ln(4+t) + (t^2\ln(4-t))\big|_0^2 - \int_0^2 t^2 d\ln(4-t) =$

$= 4\ln 6 - 0 - \int_0^2 \frac{t^2}{t+4}dt - 4\ln 2 + 0 + \int_0^2 \frac{t^2}{t-4}dt =$

$= 4\ln 3 - \int_0^2 \left(t - 4 + \frac{16}{t+4}\right)dt + \int_0^2 \left(t + 4 + \frac{16}{t-4}\right)dt =$

$= 4\ln 3 + \int_0^2 (-t+4+t+4)dt - \int_0^2 \frac{16}{t+4}dt + \int_0^2 \frac{16}{t-4}dt =$

$= 4\ln 3 + 8\int_0^2 dt - 16\int_0^2 \frac{1}{t+4}d(t+4) + 16\int_0^2 \frac{1}{t-4}d(t-4) =$

$= 4\ln 3 + 8\cdot 2 - 16\left((\ln|t+4|)\big|_0^2\right) + 16\left((\ln|t-4|)\big|_0^2\right) =$

$= 4\ln 3 + 16 + 16\ln 2 - 16\ln 4 - 16\ln 6 + 16\ln 4 = 4\ln 3 + 16 + 16\ln\frac{1}{3} =$

$= 4\ln 3 + 16 - 16\ln 3 = 16 - 12\ln 3.$

Ответ: $16 - 12\ln 3$.

Задача 17. Найти объем компакта $V(M)$, если M ограничен поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^2z^4,\ a>0$.

Решение.

В этом случае даже сложно представить, что это за поверхность и, тем более, изобразить ее проекцию на какую-то координатную плоскость. Но найти объем фигуры, которую она ограничивает, можно.

Перейдем в сферические координаты. Как всегда, возникнет вопрос о том, какие значения могут принимать r, φ, θ.

Найдем пределы интегрирования (решим задачу «в три действия»):

1. $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^2z^4 \Rightarrow r^6 = a^2r^4\sin^4\theta$
   $\Leftrightarrow r^4(r^2 - a^2\sin^4\theta) = 0$
2. $r_1(\varphi,\theta) = 0,\ \ r_2(\varphi,\theta) = r_2(\theta) = a\sin^2\theta$
3. $\begin{cases} r_1(\varphi,\theta) \ge 0 \\ r_2(\theta) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \ge 0 \\ a\sin^2\theta \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

Так как $r_1(\theta), r_2(\theta)$ не зависят от φ, то при $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ они будут неотрицательны при любом φ.

Кроме того, заметим, что исходное уравнение является четным по всем трем переменным, а значит поверхность $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^2z^4$ ограничивает компакт, симметричный относительно всех координатный плоскостей, поэтому достаточно посчитать объем части компакта, лежащей в 1-м октанте, и умножить его на 8 (пусть M_1 – часть компакта M, расположенная в 1 октанте)

$$V = \iiint_M dxdydz = 8\iiint_{M_1} dxdydz = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\sin^2\theta} \underbrace{r^2\cos\theta}_{|\mathcal{J}|} dr =$$

$$= 8\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta\int_0^{a\sin^2\theta} r^2 dr = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta\left(\frac{r^3}{3}\bigg|_0^{a\sin^2\theta}\right) =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^6\theta\, d\theta = \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\, d\sin\theta = \frac{4\pi a^3}{3}\left(\frac{\sin^7\theta}{7}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{1}{7} =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{21}.$$

Ответ: $\frac{4\pi a^3}{21}$.

Задача 18. Найти объем компакта $V(M)$, если M ограничен поверхностью $(x^2+y^2)^2 + z^4 = a^3 z, a > 0$.

Решение.

В этом случае также сложно представить, что представляет собой этот компакт. Но найти его объем можно!

Заметим, что z может принимать только неотрицательные значения, так как левая часть уравнения поверхности принимает только неотрицательные значения. Поэтому поверхность находится в верхнем полупространстве.

Перейдем в сферические координаты. Как всегда, возникнет вопрос о том, какие значения могут принимать r, φ, θ, то есть какими будут пределы интегрирования по этим переменным.

Найдем пределы интегрирования (решим задачу «в три действия»):

1. $(x^2+y^2)^2 + z^4 = a^3 z \Longrightarrow (r^2\cos^2\theta)^2 + r^4\sin^4\theta = a^3 r\sin\theta$
   $\Leftrightarrow r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta = a^3 r\sin\theta$
   $\Leftrightarrow r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) = a^3 r\sin\theta$
2. $r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - a^3 r\sin\theta = 0$
   $\Leftrightarrow r(r^3(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - a^3\sin\theta) = 0$
   $\Leftrightarrow r_1(\varphi,\theta) = 0 \ \vee\ r^3(\cos^4\theta + \sin^4\theta) = a^3\sin\theta$
   $\Leftrightarrow r_1(\varphi,\theta) = 0 \ \vee\ r^3 = \frac{a^3\sin\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}$
   $\Leftrightarrow r_1(\varphi,\theta) = 0,\ r_2(\varphi,\theta) = r_2(\theta) = \sqrt[3]{\frac{a^3\sin\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}$
3. $\begin{cases} r_1(\varphi,\theta) \geq 0 \\ r_2(\theta) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \geq 0 \\ \sqrt[3]{\frac{a^3\sin\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

Так как $r_1(\theta),\ r_2(\theta)$ не зависят от φ, то при $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ будут неотрицательны при любом $\varphi \in [0; 2\pi]$.

Поскольку исходное уравнение является четным по переменным x и y, а значит поверхность $(x^2+y^2)^2+z^4=a^3z$ ограничивает компакт, симметричный относительно координатный плоскостей Oxz и Oyz, то достаточно посчитать объем части компакта, лежащей в 1-м октанте, и умножить его на 4 (пусть M_1 – часть компакта M, расположенная в 1 октанте)

$$V=\iiint_M dxdydz=4\iiint_{M_1} dxdydz=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt[3]{\frac{a^3\sin\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}}r^2\cos\theta\,dr=$$

$$=4\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\sqrt[3]{\frac{a^3\sin\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}}r^2dr=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^{\sqrt[3]{\frac{a^3\sin\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}}\right)=$$

$$=\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\frac{\sin\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}d\theta\boxed{=}$$

так как $\cos^4\theta+\sin^4\theta=(\cos^2\theta)^2+(\sin^2\theta)^2=$

$$=\frac{1+2\cos2\theta+\cos^2 2\theta-2\cos2\theta+\cos^2 2\theta}{4}=\frac{1+\cos^2 2\theta}{2}$$

$$\boxed{=}\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos^2 2\theta}d\theta=\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin2\theta}{1+\cos^2 2\theta}d\theta=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 2\theta}d\cos2\theta=-\frac{\pi a^3}{3}\left(\operatorname{arctg}(\cos2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=-\frac{\pi a^3}{3}(\operatorname{arctg}(-1)-\operatorname{arctg}(1))=-\frac{\pi a^3}{3}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2a^3}{6}.$$

Ответ: $\frac{\pi^2a^3}{6}$.

Задача 19. Найти объем компакта $V(M)$, если M ограничен поверхностью S, заданной уравнением $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz,\ a>0$.

Решение.

В этом случае также сложно представить, что представляет собой этот компакт. Но найти его объем можно!

Перейдем в сферические координаты. Как всегда, возникнет вопрос о том, какие значения могут принимать r,φ,θ.

Найдем пределы интегрирования (решим задачу «в три действия»):

1. $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz\Rightarrow r^4=ar\cos\theta\cos\varphi\cdot r\cos\theta\sin\varphi\cdot r\sin\theta$
   $\Leftrightarrow r^4=ar^3\cos^2\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi$
2. $r^4-ar^3\cos^2\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi=0$
   $\Leftrightarrow r^3(r-a\cos^2\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi)=0$
   $r_1(\varphi,\theta)=0,\quad r_2(\varphi,\theta)=a\cos^2\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi$
3. $\begin{cases}r_1(\varphi,\theta)\ge0\\ r_2(\varphi,\theta)\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\ge0\\ a\cos^2\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\ge0\\ \sin\theta\cos\varphi\sin\varphi\ge0,\end{cases}$

так как $\cos^2\theta\ge0$ при любом θ.

Если $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то $\sin\theta \geq 0$ и должно выполняться, что $\cos\varphi\sin\varphi \geq 0 \Leftrightarrow$ $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Если $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, то $\sin\theta \leq 0$ и должно выполняться, что $\cos\varphi\sin\varphi \leq 0$ $\Leftrightarrow \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Заметим также, что если $(x_0, y_0, z_0) \in S$, то $(-x_0, -y_0, z_0) \in S$, $(-x_0, y_0, -z_0) \in S$, $(x_0, -y_0, -z_0 \in S)$, то есть точки компакта M располагаются в 1-м и 3-м октантах и «под» 2-м и 4-м октантами, причем, эти фигуры симметричны, а поэтому их объемы одинаковы. Следовательно, если M_1 – часть компакта M, расположенная в 1 октанте, то

$$V = \iiint_M dxdydz = 4\iiint_{M_1} dxdydz =$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos^2\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi} r^2\cos\theta\, dr =$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_0^{a\cos^2\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi} r^2 dr =$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^{a\cos^2\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi}\right) =$$
$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, a^3\cos^6\theta\sin^3\theta\sin^3\varphi\cos^3\varphi\, d\theta =$$
$$= \frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^3\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\cos^6\theta\sin^3\theta\, d\theta =$$
$$= \frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta\sin^2\theta\sin\theta\, d\theta =$$
$$= -\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^2\varphi\, d\sin\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta\sin^2\theta\, d\cos\theta =$$
$$= -\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\,(1-\sin^2\varphi) d\sin\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta\,(1-\cos^2\theta) d\cos\theta =$$
$$= -\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\varphi - \sin^5\varphi) d\sin\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^7\theta - \cos^9\theta) d\cos\theta =$$
$$= -\frac{4a^3}{3}\left(\left(\frac{\sin^4\varphi}{4} - \frac{\sin^6\varphi}{6}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \cdot \left(\left(\frac{\cos^8\varphi}{8} - \frac{\cos^{10}\varphi}{10}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$
$$= -\frac{4a^3}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\left(0 - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right)\right) = -\frac{4a^3}{3} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{-1}{40} = \frac{a^3}{360}.$$

Ответ: $\frac{a^3}{360}$.

Замечание. В подобных ситуациях интегралы $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^3\varphi\, d\varphi$ и $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\cos^6\theta\sin^3\theta\, d\theta$ можно вычислять отдельно, а затем результаты вычисления записывать в общее произведение.

Задача 20. Найти объем компакта $V(M)$, если M ограничен поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^2 = az(x^2+y^2),\ a>0$.

Решение.

В этом случае также сложно представить, что это за поверхность и, тем более, изобразить ее проекцию на какую-то координатную плоскость. Но найти объем фигуры, которую она ограничивает, можно.

Перейдем в сферические координаты. Как всегда, возникнет вопрос о том, какие значения могут принимать r, φ, θ.

Найдем пределы интегрирования (решим задачу «в три действия»):

1. $(x^2+y^2+z^2)^2 = az(x^2+y^2)$
   $\Longrightarrow r^4 = ar\sin\theta\, r^2\cos^2\theta$
2. $r^3(r - a\sin\theta\cos^2\theta) = 0$
   $r_1(\varphi,\theta) = 0,\ \ r_2(\varphi,\theta) = a\sin\theta\cos^2\theta$
3. $\begin{cases} r_1(\varphi,\theta) \ge 0 \\ r_2(\theta) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \ge 0 \\ a\sin\theta\cos^2\theta \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, так как $\cos^2\theta \ge 0$ при любом θ. Кроме того, $\varphi \in [0, 2\pi]$, поскольку r_1 и r_2 от переменной φ не зависят.

   Кроме того, заметим, что исходное уравнение является четным по переменным x и y, а значит поверхность $(x^2+y^2+z^2)^2 = az(x^2+y^2)$ ограничивает компакт, лежащий в верхнем полупространстве и симметричный относительно координатный плоскостей Oxz и Oyz, поэтому достаточно посчитать объем части компакта, лежащей в 1-м октанте, и умножить его на 4 (пусть M_1 – часть компакта M, расположенная в 1 октанте), тогда

$$V = \iiint_M dxdydz = 4\iiint_{M_1} dxdydz = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\sin\theta\cos^2\theta} \underbrace{r^2\cos\theta}_{|\mathcal{J}|}\, dr =$$

$$= 4\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta \int_0^{a\sin\theta\cos^2\theta} r^2 dr = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^{a\sin\theta\cos^2\theta}\right) =$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^3\theta\cos^6\theta\, d\theta = \frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\theta\sin^2\theta\sin\theta\, d\theta =$$

$$= -\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\theta\,(1-\cos^2\theta)d\cos\theta =$$

$$= -\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^7\theta - \cos^9\theta)d\cos\theta =$$

$$= -\frac{2\pi a^3}{3}\left(\frac{\cos^8\theta}{8} - \frac{\cos^{10}\theta}{10}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{2\pi a^3}{3}\cdot\left(0 - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right)\right) = \frac{2\pi a^3}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20} = \frac{\pi a^3}{60}.$$

Ответ: $\frac{\pi a^3}{60}$.

Задача 21. Найти объем компакта $V(M)$, если M ограничен поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2y^2z^2,\ a>0$.

Решение.

В этом случае также сложно представить, что это за поверхность и, тем более, изобразить ее проекцию на какую-то координатную плоскость. Но найти объем фигуры, которую она ограничивает, можно.

Перейдем в сферические координаты. Как всегда, возникнет вопрос о том, какие значения могут принимать r, φ, θ.

Найдем пределы интегрирования (решим задачу «в три действия»):

1. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2y^2z^2 \Longrightarrow r^6=a^2(r\cos\theta\sin\varphi)^2(r\sin\theta)^2$
   $\Leftrightarrow r^6=r^4a^2\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi$
2. $r^6-r^4a^2\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi=0$
   $\Leftrightarrow r^4(r^2-a^2\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi)$
   $\Leftrightarrow r_1(\varphi,\theta)=0$ или $r^2=a^2\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi$
   $\Leftrightarrow r_1(\varphi,\theta)=0$ или $r=\sqrt{a^2\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi}$
   $\Leftrightarrow r_1(\varphi,\theta)=0,\ r_2(\varphi,\theta)=a|\sin\theta\cos\theta\sin\varphi|$, так как $\sqrt{x^2}\equiv|x|$
   (будьте внимательны в этом месте!)
   $\begin{cases} r_1(\varphi,\theta)\ge 0 \\ r_2(\theta)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\ge 0 \\ a|\sin\theta\cos\theta\sin\varphi|\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \varphi\epsilon[0,2\pi].$

Кроме того, заметим, что исходное уравнение является четным по всем трем переменным, а значит поверхность $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2y^2z^2$ ограничивает компакт, симметричный относительно всех координатный плоскостей, поэтому достаточно посчитать объем части компакта, лежащей в 1-м октанте, и умножить его на 8 (пусть M_1 – часть компакта M, расположенная в 1 октанте)

$$V=\iiint_M dxdydz=8\iiint_{M_1} dxdydz=$$
$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\sin\theta\cos\theta\sin\varphi}\underbrace{r^2\cos\theta}_{|\mathcal{J}|}dr=$$
$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_0^{a\sin\theta\cos\theta\sin\varphi}r^2dr=$$
$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\,(a^3\sin^3\theta\cos^3\theta\sin^3\varphi)=$$
$$=\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^4\theta\,d\theta=$$
$$=\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\sin\theta\cos^4\theta\,d\theta=$$
$$=\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)d\cos\varphi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)\cos^4\theta\,d\cos\theta=$$

$$= \frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)d\cos\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\theta - \cos^6\theta)d\cos\theta =$$

$$= \frac{8a^3}{3}\left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(\frac{\cos^5\theta}{5} - \frac{\cos^7\theta}{7}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= \frac{8a^3}{3}\left(0 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right)\left(0 - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)\right) = \frac{8a^3}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{35} = \frac{32a^3}{315}\,.$$

Ответ: $\frac{32a^3}{315}$.