МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ, ЧАСТЬ 2

(учебное пособие для бакалавров)

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2025

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу иностранных бакалавров и способствовать успешной сдаче ими экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке рассмотрены частные методы интегрирования различных функций.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

ЧАСТНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ «КВАДРАТНЫХ ТРЕХЧЛЕНОВ В ЗНАМЕНАТЕЛЕ»

Рассмотрим интегралы вида $\int \frac{ax+b}{px^2+qx+r}dx$, $p \neq 0$. Такие задачи решаются выделением полного квадрата в знаменателе.

Замечание. Полный квадрат проще выделять, когда старший коэффициент равен 1. Например,

$$x^2 - 6x + 17 = \underbrace{x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2} - 3^2 + 17 = (x-3)^2 + 8.$$

$$x^2 + 5x + 3 = \underbrace{x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 3 =$$
$$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}.$$

Выделить полный квадрат в квадратичном выражении можно всегда. Но в интегрировании это особенно полезно, когда дискриминант квадратного трехчлена отрицательный, и квадратный трехчлен невозможно разложить в произведение линейных множителей.

Задача 1. $\int \frac{dx}{x^2+4x+7} \boxed{=}$

выделим полный квадрат в знаменателе

$$x^2 + 4x + 7 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 7 = (x+2)^2 + 3$$

$$\boxed{=} \int \frac{dx}{(x+2)^2+3} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{(x+2)}{\sqrt{3}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что в этой задаче по ходу решения можно было бы сделать замену переменной $x + 2 = t$ и перейти к интегралу $\int \frac{dt}{t^2+3}$. Но это требует времени и, кроме того, потом придется делать обратную замену. Привыкайте в несложных ситуациях работать с переменной, которую мы назовем «скобка». В данном случае – это $(x+2)$, или записывайте «вспомогательный» интеграл $\int \frac{dt}{t^2+3}$ «в сторонке», чтобы не загромождать решение.

Задача 2. $\int \frac{dx}{x^2+3x+4} \boxed{=}$

выделим полный квадрат в знаменателе

$$x^2+3x+4=x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

$$\boxed{\equiv}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\int\frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{7}{4}}\right)^2}=\int\frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{7}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Задача 3. $\int\frac{dx}{3x^2-6x+2}\boxed{\equiv}$

мы уже отмечали, что полный квадрат проще выделять, когда старший коэффициент равен 1. Вынесем старший коэффициент из-под знака интеграла (не страшно, если коэффициенты станут «дробными»)

$$\boxed{\equiv}\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-2x+\frac{2}{3}}\boxed{\equiv}$$

выделим полный квадрат в знаменателе

$$x^2-2x+\frac{2}{3}=x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2+\frac{2}{3}=(x-1)^2-\frac{1}{3}$$

$$\boxed{\equiv}\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}\int\frac{d(x-1)}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-(x-1)^2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\ln\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+(x-1)}{\frac{1}{\sqrt{3}}-(x-1)}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-(x-1)}{\frac{1}{\sqrt{3}}+(x-1)}\right|+C, C\in\mathbb{R},$$

напомним табличный интеграл, который здесь был использован

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C, C\in\mathbb{R}.$$

В дальнейшем будем выделять полный квадрат сразу под знаком интеграла.

В задаче 4 показан пример оформления замены переменной (это можно делать по-разному).

Задача 4. $\int\frac{xdx}{x^2-4x+6}=\int\frac{xdx}{(x-2)^2+2}\boxed{\equiv}$

в знаменателе получили полный квадрат относительно выражения $(x-2)$, поэтому и в числителе выделим это выражение

$$\boxed{\equiv}\int\frac{(x-2+2)d(x-2)}{(x-2)^2+2}=\left\|\begin{matrix}x-2=t\\ d(x-2)=dt\end{matrix}\right\|=\int\frac{(t+2)dt}{t^2+2}=\int\frac{tdt}{t^2+2}+\int\frac{2dt}{t^2+2}\boxed{\equiv}$$

мы записали этот интеграл в виде суммы двух интегралов, потому что функции $\frac{t}{t^2+2}$ и $\frac{2}{t^2+2}$ интегрируются по-разному: в первом случае надо произвести «подведение под знак дифференциала», а во втором – получен табличный интеграл

$$\boxed{=}\ \frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+2)}{(t^2+2)}+2\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+2)}{(t^2+2)}+2\int\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\ln(t^2+2)+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+2)+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{2}}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Задача 5. $\int\frac{(2x-1)dx}{x^2+6x+11}\ \boxed{=}$

выделим полный квадрат в знаменателе сразу под знаком интеграла

$$\boxed{=}\ \int\frac{(2x-1)dx}{x^2+6x+11}=2\int\frac{(x-\frac{1}{2})dx}{(x+3)^2+2}=2\int\frac{(x+3-3-\frac{1}{2})d(x+3)}{(x+3)^2+2}=\left\|\begin{matrix}x+3=t\\ d(x+3)=dt\end{matrix}\right\|=$$
$$=2\int\frac{t-\frac{7}{2}}{t^2+2}dt=2\int\frac{tdt}{t^2+2}+2\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+2}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\int\frac{d(t^2+2)}{(t^2+2)}-7\int\frac{dt}{t^2+2}=$$
$$=\int\frac{d(t^2+2)}{(t^2+2)}-7\int\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\ln(t^2+2)-7\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=$$
$$=\ln(x^2+6x+11)-\frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{2}}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Задачи вида $\int\frac{ax+b}{\sqrt{px^2+qx+r}}dx,\ p\neq 0$ тоже решаются с помощью выделения полного квадрата в подкоренном выражении.

Задача 6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+9}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+5}}=\int\frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+5}}=\left\|\begin{matrix}x+2=t\\ d(x+2)=dt\end{matrix}\right\|=$
$=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+5}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+5}\right|+C=\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+9}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.$

Задача 7. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}}}=$

$$=\left\|\begin{matrix}x-\frac{1}{3}=t\\ d\left(x-\frac{1}{3}\right)=dt\end{matrix}\right\|=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{2}{9}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{2}{9}}\right|=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{1}{3}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}}\right|+C=$$

Заметим, что ответ в задаче уже получен, и это правильный ответ. Но в каждой задаче надо стараться записать ответ в виде, наиболее удобном для дальнейшего применения, либо в виде, соответствующем каким-то договоренностям. Например, в этой задаче добавим и вычтем $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln 3$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{1}{3}+\sqrt{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\ln 3}\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln 3+C} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\ln\left|x-\frac{1}{3}+\sqrt{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}\right|+\ln 3\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln 3+C\right) =$$

сумма логарифмов равна логарифму произведения, а сумма произвольной постоянной и числа снова дает произвольную постоянную, поэтому получаем

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|3x-1+3\sqrt{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}\right|+C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+3}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Вывод: ответ к задаче может быть записан по-разному (в дальнейшем мы к этому еще вернемся).

Задача 8. $\int\frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+4x+7}}=\int\frac{(x+3)dx}{\sqrt{(x+2)^2+3}}=\int\frac{(x+2-2+3)d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+3}}=$

$$=\int\frac{(x+2)d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+3}}+\int\frac{(-2+3)d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+3}}=\|x+2=t\|=\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+3}}+\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+3}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+3)}{\sqrt{t^2+3}}+\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+3}}=\sqrt{t^2+3}+\ln\left|t+\sqrt{t^2+3}\right|+C=$$
$$=\sqrt{x^2+4x+7}+\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+7}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Задача 9. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-(x^2+2x-1)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-((x+1)^2-2)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}}=$

$$=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{2-(x+1)^2}}=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-(x+1)^2}}=\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Задача 10. $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1+\frac{3}{2}x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-\frac{3}{2}x-1\right)}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2-1\right)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-1\right)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\left(x-\frac{3}{4}\right)\cdot 4}{5}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Задача 11. $\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{-((x-1)^2-1-5)}} = \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}} = 8\int \frac{(x-\frac{11}{8})dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}} =$

$= 8\int \frac{(x-1+1-\frac{11}{8})d(x-1)}{\sqrt{6-(x-1)^2}} = 8\int \frac{(x-1)d(x-1)}{\sqrt{6-(x-1)^2}} + 8\int \frac{(1-\frac{11}{8})d(x-1)}{\sqrt{6-(x-1)^2}} = \|x-1=t\| =$

$= 8\int \frac{tdt}{\sqrt{6-t^2}} - 3\int \frac{dt}{\sqrt{6-t^2}} = 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{d(6-t^2)}{\sqrt{6-t^2}} - 3\int \frac{dt}{\sqrt{6-t^2}} =$

$= 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{d(6-t^2)}{\sqrt{6-t^2}} - 3\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-t^2}} =$

$= -8\sqrt{6-t^2} - 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} + C = -8\sqrt{5+2x-x^2} - 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} + C, C \in \mathbb{R}.$

Напомним, что мы называем ***рациональной функцией*** (или рациональной дробью) несократимую дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно.

Если $m < n$ (то есть степень числителя меньше степени знаменателя), то рациональная дробь называется ***правильной***, в противном случае (то есть, если степень числителя больше либо равна степени знаменателя) – ***неправильной***. Если рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ является неправильной, то делением числителя на знаменатель она может быть представлена в виде суммы

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$

в которой $S_{n-m}(x) -$ многочлен степени $m-n$, $R_k(x) -$ многочлен, степень которого меньше m. Таким образом, неправильная рациональная дробь всегда может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Замечание. Мы сможем интегрировать только правильные рациональные дроби. Поэтому в случае, если дробь является неправильной, то ее представление в виде суммы многочлена (целой части) и правильной дроби – обязательная часть решения задачи.

В курсе алгебры доказывается, что всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы конечного числа дробей следующих четырех типов (часто называемых ***простейшими***):

I. $\frac{A}{x-a}$,

II. $\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}, (\alpha = 2,3,4\ldots),$

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$,

IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta}, (\beta = 2,3,4\dots)$,

где $A, M, N, a.p, q \in \mathbb{R}$ и $\frac{p^2}{4} - q < 0$, то есть трехчлен $x^2 + px + q$ не раскладывается на линейные множители.

Теорема 2. ***Интегралы от дробей типа I, II выражаются в виде линейной комбинации логарифмической и рациональной функций. Интегралы от дробей типа III, IV выражаются в виде линейной комбинации рациональной, логарифмической функций и арктангенса. Поэтому интеграл от рациональной функции можно представить в виде линейной комбинации рациональной, логарифмической функций и арктангенса.***

Но всегда при интегрировании рациональной функции возникает задача о разложении правильной рациональной дроби в сумму простейших.

Задача 12. $\int \frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} dx \boxed{\equiv}$

разложим рациональную функцию в сумму простейших методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} \equiv \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2} \equiv \frac{(a+b)x+(2a-3b)}{(x-3)(x+2)} .$$

Два многочлена тождественно равны ⇔ (произносится «тогда и только тогда») одновременно равны все их соответствующие коэффициенты:

$$7x + 4 \equiv (a + b)x + (2a - 3b) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ 2a - 3b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 25 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} \equiv \frac{5}{x-3} + \frac{2}{x+2} ,$$

и под знаком интеграла получаем

$$\boxed{\equiv} \int \left(\frac{5}{x-3} + \frac{2}{x+2}\right) dx = 5 \int \frac{d(x-3)}{x-3} + 2 \int \frac{d(x+2)}{x+2} = 5 \ln|x - 3| + 2 \ln|x + 2| + C,$$

$C \in \mathbb{R}$.

Напомним, что линейные системы решаются методом Крамера или методом Гаусса.

Для того, чтобы многочлен (в частности, квадратный трехчлен) разложить в произведение, надо найти его корни.

Для квадратного трехчлена будет выполнено тождество:

$$ax^2+bx+c\equiv a(x-x_1)(x-x_2),\ \text{где}\ \ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,.$$

Замечание. Напомним, что две функции ***тождественно равны*** на некотором множестве, если они обе определены в каждой точке этого множества и их значения равны в каждой точке этого множества.

Задача 13. $\int\frac{xdx}{x^2-4x-5}=\int\frac{xdx}{(x-5)(x+1)}\ \boxed{\equiv}$

разложим рациональную функцию в сумму простейших методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{x}{(x-5)(x+1)}\equiv\frac{a}{x-5}+\frac{b}{x+1}\equiv\frac{a(x+1)+b(x-5)}{(x-5)(x+1)}\equiv\frac{ax+a+bx-5b}{(x-5)(x+1)}\equiv\frac{(a+b)x+(a-5b)}{(x-5)(x+1)}\,.$$

Получаем, что

$$\frac{x}{(x-5)(x+1)}\equiv\frac{(a+b)x+(a-5b)}{(x-5)(x+1)}\,.$$

Знаменатели этих дробей одинаковы, поэтому одинаковы области определения этих функций. Числители представляют собой многочлены. Но два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ одновременно равны все их соответствующие коэффициенты:

$$x\equiv(a+b)x+(a-5b)\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}a+b=1\\ a-5b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{5}{6}\\ b=\frac{1}{6}\end{cases}.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{(x-5)(x+1)}\equiv\frac{\frac{5}{6}}{x-5}+\frac{\frac{1}{6}}{x+1}\equiv\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x-5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+1}\,,$$

и под знаком интеграла получаем (запишем сразу сумму интегралов)

$$\boxed{\equiv}\ \frac{5}{6}\int\frac{d(x-5)}{x-5}+\frac{1}{6}\int\frac{d(x+1)}{x+1}=\frac{5}{6}\ln|x-5|+\frac{1}{6}\ln|x+1|+C,\ \ C\in\mathbb{R}.$$

Задача 14. $\int \frac{dx}{x^3-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+x+1)} \boxed{=}$

разложим рациональную функцию в сумму простейших методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} \equiv \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} \equiv \frac{a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \equiv \frac{ax^2+ax+a+bx^2-bx+cx-c}{(x-1)(x^2+x+1)} \equiv$$

$$\equiv \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Получаем, что

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} \equiv \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Знаменатели этих дробей одинаковы, поэтому одинаковы области определения этих функций. Числители представляют собой многочлены. Но два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ одновременно равны все их соответствующие коэффициенты:

$$1 \equiv (a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a+b \qquad = 0 \\ a-b+c = 0 \\ a \qquad -c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a \quad = 1 \\ a+b = 0 \\ a-c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} \equiv \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1},$$

и под знаком интеграла получаем (запишем сразу сумму интегралов)

$$\boxed{=} \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx - \frac{1}{3}\int \frac{-\frac{1}{2}+2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx =$$

$$=\left\|\begin{matrix}\text{в последних}\\ \text{двух интегралах}\\ \text{введем } x+\frac{1}{2}=t\end{matrix}\right\| = \frac{1}{3}\int\frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} =$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t\cdot 2}{\sqrt{3}} + C =$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + C =$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Задача 15. $\int\frac{(x^2-3x+2)dx}{x(x^2+2x+1)} = \int\frac{(x^2-3x+2)dx}{x(x+1)^2} \boxed{\equiv}$

разложим рациональную функцию в сумму простейших методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{(x^2-3x+2)}{x(x+1)^2} \equiv \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} \equiv \frac{a(x+1)^2+bx(x+1)+cx}{x(x+1)^2} \equiv$$

$$\equiv \frac{ax^2+2ax+a+bx^2+bx+cx}{x(x+1)^2} \equiv \frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(x+1)^2}.$$

Получаем, что

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} \equiv \frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(x+1)^2}.$$

Два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ одновременно равны все их соответствующие коэффициенты:

$$x^2-3x+2 \equiv (a+b)x^2+(2a+b+c)x+a,$$

поэтому получим систему

$$\begin{cases} a+b &= 1\\ 2a+b+c &= -3\\ a &= 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2\\ b=-1\\ c=-6.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} \equiv \frac{2}{x} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-6}{(x+1)^2},$$

и под знаком интеграла получаем (запишем сразу сумму интегралов)

$$\boxed{=}\ 2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{d(x+1)}{x+1}-6\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2}=2\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{6}{x+1}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Задача 16. $\int\frac{(x^3+1)dx}{x^3-x^2}=$

заметим, что под знаком интеграла стоит неправильная дробь, поэтому выделим сначала у нее целую часть (напомним, что это можно сделать делением столбиком, либо последовательно выделяя в числителе слагаемые, которые делятся на знаменатель):

$$\int\frac{(x^3-x^2+x^2+1)dx}{x^3-x^2}=\int\frac{\left((x^3-x^2)+(x^2+1)\right)dx}{x^3-x^2}=$$
$$=\int\left(\frac{(x^3-x^2)}{x^3-x^2}+\frac{(x^2+1)}{x^3-x^2}\right)dx=\int\left(1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}\right)dx\ \boxed{=}$$

и только теперь разложим полученную рациональную функцию $\frac{x^2+1}{x^3-x^2}$ (правильную дробь!) в сумму простейших методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2}\equiv\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-1}\equiv\frac{ax(x-1)+b(x-1)+cx^2}{x^3-x^2}\equiv\frac{ax^2-ax+bx-b+cx^2}{x^3-x^2}\equiv$$
$$\equiv\frac{(a+c)x^2+(-a+b)x-b}{x^3-x^2}.$$

Получили, что

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2}\equiv\frac{(a+c)x^2+(-a+b)x-b}{x^3-x^2}.$$

А два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ одновременно равны все их соответствующие коэффициенты:

$$x^2+1\equiv(a+c)x^2+(-a+b)x-b,$$

поэтому получим систему

$$\begin{cases}a+\qquad c=1\\-a+b\qquad=0\\\qquad -b\qquad=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1\\c=2\end{cases}$$

$$\boxed{=}\ \int\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}\right)dx=\int 1\cdot dx-\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x^2}dx+2\int\frac{1}{x-1}d(x-1)=$$
$$=x+\ln|x|+\frac{1}{x}+2\ln|x-1|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Некоторые интегралы от тригонометрических функций вычисляются с помощью применения формул преобразования произведения синусов и косинусов в сумму синусов и косинусов.

Напомним некоторые формулы.

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$.

Кроме того, хорошо бы осознать и запомнить, что при $a \neq 0$

$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a} \cdot \sin ax + C,\ C \in \mathbb{R}$

$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos ax + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Задача 16. $\int \cos x \sin 3x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin(3x + x)\, dx + \frac{1}{2}\int \sin(3x - x)\, dx =$
$= \frac{1}{2}\int \sin 4x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx =$
$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + C = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 17. $2\int \sin 2x \sin 5x\, dx = \int \cos(5x - 2x)\, dx - \int \cos(5x + 2x)\, dx =$
$= \int \cos 3x\, dx - \int \cos 7x\, dx = \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{7}\sin 7x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 18. $4\int \cos x \cos 2x \cos 3x\, dx = 2\int(\cos 3x + \cos x)\cos 3x\, dx =$
$= 2\int \cos^2 3x\, dx + 2\int \cos x \cos 3x\, dx =$
$= \int(1 + \cos 6x)dx + \int(\cos 4x + \cos 2x)dx =$
$= x + \frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

При вычислении интеграла $2\int \cos^2 3x\, dx$ использована формула понижения степени:

$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Задача 19. $2\int \cos(ax + b)\cos(ax - b)\, dx = \int \cos 2ax\, dx + \int \cos 2b\, dx =$
$= \int \cos 2ax\, dx + \underbrace{\cos 2b}_{\text{константа!}} \cdot \int dx \boxed{=}$

1) если $a \neq 0$, то
   $\boxed{=} \frac{1}{2a}\sin 2ax + \cos 2b \cdot x + C,\ C \in \mathbb{R},$
2) если $a = 0$, то
   $\boxed{=} \int \cos 0\, dx + \cos 2b \int dx = \int 1 \cdot dx + \cos 2b \int dx =$
   $= x + \cos 2b \cdot x + C = (1 + \cos 2b)x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Рассмотрим интегралы вида

$\int \sin^m x \cos^{2n+1} x\, dx$ и $\int \sin^{2m+1} x \cos^n x\, dx$,

то есть интегралы, в которых рассматриваются произведения степеней синусов и косинусов одного аргумента, причем, хотя бы одна степень – нечетная.

Задача 20. $\int \sin^3 x\, dx \ \boxed{=}$

под знаком интеграла стоит $\sin x$ в нечетной степени. «Отщипнем» от $\sin^3 x$ один множитель $\sin x$, то есть запишем $\sin^3 x$ в виде $\sin^2 x \cdot \sin x$ и получим под знаком интеграла:

$$\boxed{=} \int \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} \underbrace{\sin x\, dx}_{-d\cos x} = -\int (1-\cos^2 x) d\cos x =$$
$$= -\left(\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right) + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Мы воспользовались также основным тригонометрическим тождеством в виде:

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Замечание. Если кому-то нужно, можно перейти к вычислению «вспомогательного» интеграла $\int (1-t^2)dt = t - \frac{t^3}{3} + C, C \in \mathbb{R}$, то лучше это сделать «в сторонке», а не в основном тексте решения.

Задача 21. $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx \ \boxed{=}$

под знаком интеграла стоит $\cos x$ в нечетной степени. «Отщипнем» от $\cos^3 x$ один множитель $\cos x$, то есть запишем $\cos^3 x$ в виде $\cos^2 x \cdot \cos x$, получим под знаком интеграла (снова воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$):

$$\boxed{=} \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x\, dx =$$
$$= \int \sin^2 x \cos^2 x\, d\sin x = \int \sin^2 x\,(1-\sin^2 x)\, d\sin x =$$
$$= \int (\sin^2 x - \sin^4 x) d\sin x = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Замечание. Если кому-то нужно, можно перейти к «вспомогательному» интегралу $\int (t^2 - t^4)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C, C \in \mathbb{R}$, но лучше это сделать «в сторонке», а не в основном тексте решения.

Задача 22. $\int \underbrace{\sin^3 x}_{(!)} \cos^9 x\, dx \ \boxed{=}$

В этой задаче обе функции в нечетной степени: $\sin^3 x$ и $\cos^9 x$. Один множитель в первой степени можно отщипнуть и от $\sin^3 x$, и от $\cos^9 x$. Можно сделать и то, и другое. Ответы при решении получатся разные. Но возникает вопрос: что лучше? Ответ на этот вопрос надо хорошо осознать, чтобы избежать лишних трудностей в дальнейшем.

Отметим, что

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x,\ \forall x \in \mathbb{R},$

в то время, как

$\cos^8 x = (1 - \sin^2 x)^4,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Становится понятно, что лучше использовать

$\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x,\ \forall x \in \mathbb{R},$

и тогда под знаком интеграла получим

$$\boxed{\equiv} \int \sin^2 x \sin x \cos^9 x\, dx =$$
$$= -\int \sin^2 x \cos^9 x\, d\cos x = -\int (1 - \cos^2 x)\cos^9 x\, d\cos x =$$
$$= -\int (\cos^9 x - \cos^{11} x) d\cos x = -\frac{\cos^{10} x}{10} + \frac{\cos^{12} x}{12} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Приведем и решение, связанное с использованием $\cos^8 x = (1 - \sin^2 x)^4$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\int \sin^3 x \cos^9 x\, dx = \int \sin^3 x \cos^8 x \cos x\, dx =$$
$$= \int \sin^3 x\, (1 - \sin^2 x)^4 d\sin x =$$
$$= \int \sin^3 x\, (1 - 4\sin^2 x + 6\sin^4 x - 4\sin^6 x + \sin^8 x) d\sin x =$$
$$= \int (\sin^3 x - 4\sin^5 x + 6\sin^7 x - 4\sin^9 x + \sin^{11} x) d\sin x =$$
$$= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{4\sin^6 x}{6} + \frac{6\sin^8 x}{8} - \frac{4\sin^{10} x}{10} + \frac{\sin^{12} x}{12} + C =$$
$$= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{2\sin^6 x}{3} + \frac{3\sin^8 x}{4} - \frac{2\sin^{10} x}{5} + \frac{\sin^{12} x}{12} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Это тоже верное решение и верный ответ. Но сравните, насколько проще первое решение, и ответ к первому решению гораздо удобнее для дальнейшего использования.

Задача 23. $\int \underbrace{\sin^5 x}_{(!)} \cos^9 x\, dx$ $\boxed{\equiv}$

В этой задаче обе функции в нечетной степени: $\sin^5 x$ и $\cos^9 x$.

Уже понятно, что лучше использовать

$\sin^5 x = \sin^4 x \cdot \sin x, \forall x \in \mathbb{R},$

и тогда под знаком интеграла получим

$$\int \sin^4 x \sin x \cos^9 x\, dx =$$
$$= -\int \sin^4 x \cos^9 x\, d\cos x = -\int (1-\cos^2 x)^2 \cos^9 x\, d\cos x =$$
$$= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \cos^9 x\, d\cos x =$$
$$= -\int (\cos^9 x - 2\cos^{11} x + \cos^{13} x) d\cos x =$$
$$= -\frac{\cos^{10} x}{10} + 2\frac{\cos^{12} x}{12} - \frac{\cos^{14} x}{14} + C =$$
$$= -\frac{\cos^{10} x}{10} + \frac{\cos^{12} x}{6} - \frac{\cos^{14} x}{14} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Идею «отщипывания» можно использовать и в некоторых других задачах. Рассмотрим, например, такие.

Задача 24. $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^7 x} = \int \frac{2\sin x \cos x dx}{\cos^7 x} = -2\int \frac{\cos x d\cos x}{\cos^7 x} = -2\int \frac{d\cos x}{\cos^6 x} =$
$= -2\int \cos^{-6} x\, d\cos x = -2 \cdot \frac{\cos^{-5} x}{-5} + C = \frac{2}{5\cos^5 x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Мы воспользовались формулой «удвоенного аргумента»:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\ \forall\alpha \in \mathbb{R}.$

Задача 25. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^4 x \sin x dx}{\cos^3 x} = -\int \frac{\sin^4 x d\cos x}{\cos^3 x} = -\int \frac{(\sin^2 x)^2 d\cos x}{\cos^3 x} =$
$= -\int \frac{(1-\cos^2 x)^2 d\cos x}{\cos^3 x} = -\int \frac{(1-2\cos^2 x+\cos^4 x) d\cos x}{\cos^3 x} =$

поделим почленно числитель подынтегральной дроби на ее знаменатель и запишем степени $\cos x$ в наиболее удобном для интегрирования виде

$$= \int \left(-\cos^{-3} x + 2\frac{1}{\cos x} - \cos x\right) d\cos x =$$
$$= -\frac{\cos^{-2} x}{-2} + 2\ln|\cos x| - \frac{\cos^2 x}{2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + 2\ln|\cos x| - \frac{\cos^2 x}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Использование ***формул понижения степени***:

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2},\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

позволяет вычислять интегралы вида

$\int \sin^{2n} x \cos^{2m} x\, dx, \quad n, m \geq 0.$

В этом случае степени $\sin x$ и $\cos x$ являются четными, и процедура «отщипывания» ни к чему хорошему не приведет. Поэтому воспользуемся формулами понижения степени.

Заметим, что понижение степени по этим формулам возможно только для $\cos^2 x$ и $\sin^2 x$. Поэтому в этом случае для нас всегда $\sin^{2n} x = (\sin^2 x)^n$ и $\cos^{2m} x = (\cos^2 x)^m,\ \forall x \in \mathbb{R}$, то есть четная степень синуса или косинуса для нас – натуральная степень квадрата, соответственно, синуса или косинуса.

Задача 26. $\int \sin^6 x\,dx = \int (\sin^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx =$
$= \int \frac{1-3\cos 2x+3\cos^2 2x-\cos^3 2x}{8} dx =$
$= \frac{1}{8}\int 1\cdot dx - \frac{3}{8}\int \cos 2x\,dx + \frac{3}{8}\int \cos^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx =$

здесь первые два интеграла – табличные, в третьем интеграле снова будем понижать степень, а в четвертом интеграле будем «отщипывать» $\cos 2x$:

$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{8}\int \cos 2x\,dx + \frac{3}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x \cos 2x\,dx =$
$= \frac{1}{8}\cdot x - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{3}{16}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int \cos^2 2x\,d\sin 2x =$
$= \frac{5}{16}x - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{16}\int (1-\sin^2 2x) d\sin 2x =$
$= \frac{5}{16}x - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{16}\left(\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3}\right) + C =$
$= \frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{\sin^3 2x}{48} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Замечание. Использование разных формул понижения степени будет приводить к записи ответа в разных видах. Чтобы осознать это, рассмотрим следующий пример.

Задача 27. $\int \cos^2 x \sin^4 x\,dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \sin^2 x\,dx =$
$= \int \sin^2 x\,(\sin x \cos x)^2 dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 dx =$
$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) dx =$
$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 2x - \cos 4x + \cos 2x \cos 4x) dx =$
$= \frac{1}{16}\int \left(1-\cos 2x - \cos 4x + \frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx =$
$= \frac{1}{16}\int \left(1-\frac{1}{2}\cos 2x - \cos 4x + \frac{1}{2}\cos 6x\right) dx =$
$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x\right) + C =$
$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{192}\sin 6x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Но эту же задачу можно решать по-другому:

$\int \cos^2 x \sin^4 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\cdot\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$
$= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} dx =$
$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1-\cos 2x) dx =$

$$= \frac{1}{8}\int(1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x)dx =$$
$$= \frac{1}{8}x-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int(1+\cos 4x)dx+\frac{1}{8}\int\cos^2 2x\cdot\cos 2x\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}x-\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{16}x-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int(1-\sin^2 2x)d\sin 2x =$$
$$= \frac{1}{8}x-\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{16}x-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3}+C =$$
$$= \frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Обратите внимание, что снова ответы оказались записаны по-разному. Но оба ответа – верны!

Основное тригонометрическое тождество и следствия из него

$\cos^2 x+\sin^2 x=1, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}+1=\frac{1}{\cos^2 x}$,

$1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$, $1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}$, $\forall x\in$ области определения функций,

а также дифференциалы

$$\frac{1}{\cos^2 x}dx=d\operatorname{tg}x,\qquad \frac{1}{\sin^2 x}dx=-d\operatorname{ctg}x$$

позволяют вычислить следующие интегралы.

Задача 27. $\int\frac{1}{\sin^4 x}dx=\int\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\int\frac{1}{\sin^2 x}d\operatorname{ctg}x\ \boxed{=}$

так как $\frac{1}{\sin^2 x}=1+\operatorname{ctg}^2 x$ и $\frac{1}{\sin^2 x}=-d\operatorname{ctg}x$, то под знаком интеграла получаем

$$\boxed{=}-\int(1+\operatorname{ctg}^2 x)d\operatorname{ctg}x=-\operatorname{ctg}x-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Задача 28. $\int\frac{dx}{\cos^6 x}=\int\frac{1}{\cos^4 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx\ \boxed{=}$

так как $\frac{1}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}^2 x+1$ и $\frac{1}{\cos^2 x}dx=d\operatorname{tg}x$, то под знаком интеграла получаем

$$\boxed{=}\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 d\operatorname{tg}x=\int(\operatorname{tg}^2 x+1)^2 d\operatorname{tg}x=\int(\operatorname{tg}^4 x+2\operatorname{tg}^2 x+1)d\operatorname{tg}x =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\operatorname{tg}x+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Задача 29. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx =$
$= -\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} d \operatorname{ctg} x \boxed{=}$

так как $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$, $\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} + 1 = \frac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x}$ и $\frac{1}{\sin^2 x} dx = -d \operatorname{ctg} x$, то под знаком интеграла получаем

$\boxed{=} -\int \frac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x} \cdot (1 + \operatorname{ctg}^2 x) d \operatorname{ctg} x = -\int \frac{1+2\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^4 x}{\operatorname{ctg}^2 x} d \operatorname{ctg} x \boxed{=}$

под знаком интеграла поделим почленно числитель дроби на ее знаменатель и запишем степени $\operatorname{ctg} x$ в наиболее удобном для интегрирования виде

$\boxed{=} -\int (\operatorname{ctg}^{-2} x + 2 + \operatorname{ctg}^2 x) d \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C, C \in \mathbb{R}.$

Следующую задачу можно решать аналогично, но можно сначала применить формулу $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$ понижения степени. Эта формула хороша тем, что, понижая степень, не приводит к появлению сумм в знаменателе.

Задача 30. $\int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^4 x} = \int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^4} = \int \frac{16dx}{\sin^4 2x} =$
$= 8 \int \frac{1}{\sin^2 2x} \cdot \frac{1}{\sin^2 2x} d(2x) = -8 \cdot \int (1 + \operatorname{ctg}^2 2x) d \operatorname{ctg} 2x =$
$= -8 \operatorname{ctg} 2x - \frac{8 \operatorname{ctg}^3 x}{3} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

При интегрировании рациональных функций относительно $\sin x$ и $\cos x$ используются формулы универсальной тригонометрической подстановки:

$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$,

$\forall x \in$ области определения функций.

Если при этом положить $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, то получим, что

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$,

и задача сводится к интегрированию рациональной функции (что было рассмотрено ранее).

Задача 31. $\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \left\| \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \right\| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}} \boxed{=}$

для того, чтобы «избавиться от 4-этажной дроби», проще всего числитель и знаменатель «основной» дроби умножить на $1+t^2$:

$$\boxed{\equiv}\int\frac{2dt}{3(1+t^2)+5(1-t^2)}=\int\frac{2dt}{3+3t^2+5-5t^2}=\int\frac{dt}{4-t^2}=\int\frac{dt}{2^2-t^2}=\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|+C=$$
$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Задача 32. $\int\frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}\,\boxed{\equiv}$

так как дробь под знаком интеграла является «неправильной относительно $\cos x$», сначала сделаем следующее преобразование:

$$\boxed{\equiv}\int\frac{(\cos x+1-1)dx}{1+\cos x}=\int\left(1-\frac{1}{1+\cos x}\right)dx=\int 1\cdot dx-\int\frac{1}{1+\cos x}dx=$$
$$=\left\|\begin{matrix}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\\ \text{во втором}\\ \text{интеграле}\end{matrix}\right\|=x-\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=x-\int\frac{2dt}{1+t^2+1-t^2}=x-\int dt=x-t+C=$$
$$=x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Если не сообразить выделить целую часть и сразу сделать универсальную тригонометрическую подстановку, то можно столкнуться с «проблемой», которую полезно обсудить:

$$\boxed{\equiv}\left\|\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\right\|=\int\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\boxed{\equiv}$$

под знаком интеграла умножим числитель и знаменатель «основной» дроби на $(1+t^2)^2$:

$$\boxed{\equiv}\int\frac{2(1-t^2)dt}{(1+t^2)^2+(1-t^2)(1+t^2)}=\int\frac{2(1-t^2)dt}{1+2t^2+t^4+1-t^4}=\int\frac{1-t^2}{1+t^2}dt=-\int\frac{t^2-1}{t^2+1}dt=$$
$$=-\int\frac{t^2+1-1-1}{t^2+1}dt=-\int dt+2\int\frac{dt}{1+t^2}=-t+2\operatorname{arctg}t+C=$$
$$=-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C=-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\left(\frac{x}{2}+\pi n\right)+C=$$
$$=-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+x+\underbrace{2\pi n+C}_{=C_n}=-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+x+C_n,\ C_n\in\mathbb{R}.$$

Важное замечание. В этой задаче в первом решении мы получили константу в виде $C\in\mathbb{R}$, а во втором решении – в виде $C_n\in\mathbb{R}$. Как же так? Второй ответ ***явно показывает***, что будет своя константа при интегрировании на каждом отдельном промежутке непрерывности подынтегральной функции, а первый ответ подразумевает, что мы это понимаем, но записываем ответ, используя меньше символов. Напомним, что мы с этим уже сталкивались в табличных интегралах.

1) Мы договорились записывать

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$$

и понимать, что эта запись означает

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R} \text{ при } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R} \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

2) Мы договорились записывать

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

и понимать, что эта запись означает

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C_n,\ C_n \in \mathbb{R},$$

что при интегрировании на каждом промежутке $\pi n < x < \pi(n+1),\ n \in Z$ следует выбирать свою постоянную $C_n \in \mathbb{R}$.

Задача 33. $\int \frac{1+\cos x}{1+\sin x} dx = \left\| \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \right\| = \int \frac{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2+2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$
$= \int \frac{4dt}{(t+1)^2(1+t^2)} \boxed{\equiv}$

разложим правильную дробь $\frac{4}{(t+1)^2(1+t^2)}$ в сумму простейших дробей:

$$\frac{4}{(t+1)^2(1+t^2)} \equiv \frac{a}{t+1} + \frac{b}{(t+1)^2} + \frac{ct+d}{1+t^2} \equiv \frac{a(t+1)(1+t^2)+b(1+t^2)+(ct+d)(t+1)^2}{(t+1)^2(1+t^2)} \equiv$$

$$\equiv \frac{at^3+at^2+at+a+bt^2+b+ct^3+2ct^2+ct+dt^2+2dt+d}{(t+1)^2(1+t^2)} \equiv$$

$$\equiv \frac{(a+c)t^3+(a+b+2c+d)t^2+(a+c+2d)t+(a+b+d)}{(t+1)^2(1+t^2)}.$$

Получим, что

$$\frac{4}{(t+1)^2(1+t^2)} \equiv \frac{(a+c)t^3+(a+b+2c+d)t^2+(a+c+2d)t+(a+b+d)}{(t+1)^2(1+t^2)}.$$

Два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ одновременно равны все их соответствующие коэффициенты:

$$4 \equiv (a+c)t^3 + (a+b+2c+d)t^2 + (a+c+2d)t + (a+b+d),$$

поэтому получим систему

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b + 2c + d = 0 \\ a + c + 2d = 0 \\ a + b + d = 4 \end{cases}$$

Решив эту систему методом Гаусса или методом Крамера (или, увидев, что вычитание четвертой строки из второй позволяет сразу найти $c = -2$, затем из первой строки найти $a = 2$ и так далее), получим

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = -2 \\ d = 0\,. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{4}{(t+1)^2(1+t^2)} \equiv \frac{2}{t+1} + \frac{2}{(t+1)^2} + \frac{-2t}{1+t^2}\,,$$

и под знаком интеграла получаем

$$\boxed{=}\ \int \left(\frac{2dt}{t+1} + \frac{2dt}{(t+1)^2} - \frac{2t}{1+t^2}\right) dt = 2\int \frac{d(t+1)}{t+1} + 2\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2} - \int \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} =$$

$$= 2\ln|t+1| - \frac{2}{t+1} - \ln|t^2+1| + C =$$

$$= 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right| - \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1} - \ln\left|\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2 + 1\right| + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Замечание. Увидев рациональную относительно $\sin x$ и $\cos x$ функцию, не спешите использовать универсальную тригонометрическую подстановку (вы уже поняли, что она приводит к непростым интегралам относительно рациональных функций, повышая степень выражений), попробуйте увидеть более простое решение, как, например, в следующей задаче:

Задача 34. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 5} = \int \frac{d\sin x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5} = \|\sin x = t\| = \int \frac{dt}{t^2 - 6t + 5} =$

$$= \int \frac{dt}{(t-3)^2 - 4} = \int \frac{d(t-3)}{(t-3)^2 - 2^2} = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-3-2}{t-3+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x - 5}{\sin x - 1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{5-\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{5-\sin x}{1-\sin x}\right) + C,\ \ C \in \mathbb{R},$$

так как $\frac{5-\sin x}{1-\sin x} > 0$ на области определения, то $\left|\frac{5-\sin x}{1-\sin x}\right| = \left(\frac{5-\sin x}{1-\sin x}\right)$ при всех x из области определения функции $\ln\left(\frac{5-\sin x}{1-\sin x}\right)$.

Гиперболические функции, гиперболические подстановки

При решении некоторых задач приходится рассматривать так называемые ***гиперболические функции***:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,,\ \ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\,.$$

Легко вывести следующие формулы:

$$\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}}$$

Действительно,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

$\boxed{\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x}$, $\boxed{\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x}$.

Действительно,

$$\operatorname{ch}' x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{sh}' x = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x\ .$$

Можно вывести формулы, аналогичные тригонометрическим. Рассмотрим и докажем некоторые из них.

$$\boxed{2\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x - 1}$$

$$\boxed{2\operatorname{ch}^2 x = \operatorname{ch} 2x + 1}$$

$$\boxed{2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x}$$

$$\boxed{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x}$$

Действительно,

$$2\operatorname{sh}^2 x = 2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = 2\cdot\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{2} = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} - \frac{2}{2} = \operatorname{ch} 2x - 1$$

$$2\operatorname{ch}^2 x = 2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 = 2\cdot\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{2} = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} + \frac{2}{2} = \operatorname{ch} 2x + 1$$

$$2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x$$

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}+e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{4} =$$
$$= \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch} 2x.$$

Если в формулах $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ и $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ решить уравнения относительно переменной x, то можно получить выражения для обратных гиперболических функций.

$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = y \geq 1$ (как полусумма двух взаимно-обратных величин)

$$e^x + e^{-x} = 2y$$

$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$

$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$, но так как $e^x > 0$ и $y \geq 1$, то получаем, что

$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$

$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right),\ y \geq 1.$

Перепишем это в более привычном для записи функций виде:

$y = \operatorname{Arcch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),\ x \geq 1.$

Аналогично получим

$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$

$e^x - e^{-x} = 2y$

$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$

$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$, но так как $e^x > 0$ и $\sqrt{y^2 + 1} > |y|$, то получаем, что

$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$

$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$

Перепишем это в более привычном для записи функций виде:

$y = \operatorname{Arcsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$

Итак, мы получили выражения для обратных гиперболических функций:

$\boxed{y = \operatorname{Arcch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),\ x \geq 1}$

$\boxed{y = \operatorname{Arcsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}$

Легко получить, что

$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C, C \in \mathbb{R}$

$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C, C \in \mathbb{R}.$

Задача 35. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x\, dx = \int \operatorname{sh} x \cdot 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x\, dx = \int \operatorname{ch} x \cdot 2 \operatorname{sh}^2 x\, dx =$
$= 2 \int \operatorname{sh}^2 x\, d(\operatorname{sh} x) = 2 \cdot \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} + C = \frac{2}{3} \operatorname{sh}^3 x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Рассмотрим пример использования гиперболической подстановки.

Задача 36. $\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \left\| \begin{matrix} x = \operatorname{sh} t \\ dx = \operatorname{ch} t\,dt \end{matrix} \right\| = \int \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1}\operatorname{ch} t\,dt =$
$= \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t}\operatorname{ch} t\,dt = \int |\operatorname{ch} t| \operatorname{ch} t\,dt \underbrace{=}_{\substack{\text{так как} \\ \operatorname{ch} t>0}} \int \operatorname{ch} t \operatorname{ch} t\,dt = \int \operatorname{ch}^2 t\,dt =$
$= \frac{1}{2}\int (1+\operatorname{ch} 2t)dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t + C = \frac{1}{2}\operatorname{Arcsh} x + \frac{1}{4}\cdot 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + C =$
$= \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sh} t\sqrt{\operatorname{sh}^2 t+1} + C =$
$= \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + C = \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + C,$
$C \in \mathbb{R}.$

Заметим, что $\operatorname{ch} t = +\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1}$, так как $\operatorname{ch} t > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Сравните это решение и решение с помощью интегрирования по частям и получения уравнения относительно интеграла.