

**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА**

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ, ЧАСТЬ 1
(учебное пособие для бакалавров)

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2025

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу иностранных бакалавров и способствовать успешной сдаче ими экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке показаны общие методы интегрирования: подведение под знак дифференциала, интегрирование по частям, получение уравнения относительно интеграла, замена переменной, подстановка.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Определение. $F(x)$ называется *первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке*, если $F(x)$ непрерывна на этом промежутке, дифференцируема в каждой внутренней точке промежутка, причем, $F'(x) = f(x)$.

Определение. Совокупность (множество) всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$, то есть

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – произвольная действительная постоянная ($C \in \mathbb{R}$), а $F(x)$ – некоторая первообразная.

Замечание. Очень важно, чтобы *функция $f(x)$ была определена в каждой точке рассматриваемого промежутка.*

Свойства неопределенного интеграла

- 1) $(\int f(x)dx)' = f(x)$
- 2) $\int f'(x)dx = f(x) + C, C \in \mathbb{R}$
- 3) $\int af(x)dx = a \int f(x)dx, a \neq 0$
- 4) $\int (f(x) \pm \varphi(x)) dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx.$

Таблица интегралов

Используя формулы для производных элементарных функций, получим следующую таблицу:

- 1) $\int 0 \cdot dx = C, C \in \mathbb{R}$
- 2) $\int 1 \cdot dx = x + C, C \in \mathbb{R}$
- 3) $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \mu \neq -1, C \in \mathbb{R}$
в частности, $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C, C \in \mathbb{R}$
 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, C \in \mathbb{R}$

$$4) \int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x + C_1, & \text{если } x > 0, C_1 \in \mathbb{R} \\ \ln(-x) + C_2, & \text{если } x < 0, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Формулы 4) часто объединяют в одну:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$$

При этом следует иметь в виду, что множество, на котором определена функция $f(x) = \frac{1}{x}$, состоит из двух промежутков, задаваемых неравенствами $x > 0$ и $x < 0$, соответственно. На каждом из этих промежутков возникает свой неопределенный интеграл, в частности, произвольную постоянную нужно выбирать независимо на каждом промежутке, что и отражено в формуле 4. Так что формулу $\ln|x| + C$ не следует понимать так, что к функции $\ln|x|$ прибавляется одна и та же постоянная C как при $x > 0$, так и при $x < 0$. Еще раз повторим – точный смысл дан равенством 4). $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$ – более компактная форма записи, поэтому она и используется.

Это же замечание можно сделать для формулы 3) при $\mu < 0$ и таком, что x^μ определена как при $x > 0$, так и при $x < 0$.

$$5) \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C, C \in \mathbb{R}$$

$$6) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C, C \in \mathbb{R}$$

$$7) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\text{в частности, } \int e^x dx = e^x + C, C \in \mathbb{R}$$

$$8) \int \sin x dx = -\cos x + C, C \in \mathbb{R}$$

$$9) \int \cos x dx = \sin x + C, C \in \mathbb{R}$$

$$10) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, C \in \mathbb{R}$$

точнее говоря, так как функция $\frac{1}{\sin^2 x}$ определена на бесконечном множестве промежутков $\pi n < x < \pi(n+1), n \in \mathbb{Z}$, то для каждого n (то есть на каждом

промежутке) следует выбирать свою постоянную C_n (так же, как это было сделано в пункте 4).

$$11) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

разумеется, и здесь, так как функция $\frac{1}{\cos^2 x}$ определена на бесконечном множестве промежутков $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, то для каждого n (то есть на каждом промежутке) следует выбирать свою постоянную C_n .

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \ln|x + \sqrt{a+x^2}| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$13) \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Рассмотрим несколько простых примеров (табличные интегралы и интегралы, которые легко сводятся к табличным).

$$\begin{aligned} \text{Задача 1. } \int (x^2 - 2x) dx &= \int x^2 dx - 2 \int x dx = \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C = \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Сделаем здесь практически очевидное, но важное

Замечание. Мы разбили этот интеграл на два интеграла и, вроде бы, нужно было бы приписать произвольную постоянную к каждой из двух первообразных. Однако множество значений, принимаемых разностью (или суммой) произвольных постоянных, совпадает со всем множеством действительных чисел, то есть с множеством значений произвольной постоянной $C \in \mathbb{R}$. Это и отражают написанные здесь и далее формулы. Запишем это замечание в формальном виде:

$$\begin{aligned} \int (f(x) \pm \varphi(x)) dx &= \int f(x) dx \pm \int \varphi(x) dx = \\ &= F(x) + C_1 \pm (\Phi(x) + C_2) = F(x) \pm \Phi(x) + (C_1 \pm C_2) = F(x) \pm \Phi(x) + C, \end{aligned}$$

$C_1, C_2, C \in \mathbb{R}$, так как сумма или разность произвольных постоянных является произвольной постоянной.

$$\begin{aligned} \text{Задача 2. } \int (x^6 + 3 \sin x) dx &= \frac{x^7}{7} + 3(-\cos x) + C = \frac{x^7}{7} - 3 \cos x + C, \\ C &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{Задача 3. } \int \left(e^x + 5 \cos x + \frac{1}{x} \right) dx = e^x + 5 \sin x + \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Замечание. Здесь и далее в подобных примерах мы рассматриваем подынтегральную функцию на нескольких промежутках, в данном примере — на двух промежутках, $x < 0$ и $x > 0$. На каждом из них мы получаем сумму трёх

произвольных постоянных, то есть снова произвольную постоянную. Поэтому в данном примере $C \in \mathbb{R}$ обозначает C_1 , если $x > 0$ и C_2 , если $x < 0$. Это замечание относится и ко всем остальным подобным задачам.

Задача 4.
$$\int \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x} + 3^x \right) dx = \int \left(x^{-2} + x^{\frac{1}{2}} + 3^x \right) dx =$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + \frac{3^x}{\ln 3} + C = -\frac{1}{x} + \frac{2}{3} \cdot x\sqrt{x} + \frac{3^x}{\ln 3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Замечание. Полезно включить в табличные интегралы (запомнить!)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

так как эти интегралы очень часто встречаются.

Замечание. Обратите внимание, что интеграл от произведения функций не выражается через множители и интегралы множителей (как это было для производной произведения $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$), а также нет общей формулы для интеграла от дроби. Поэтому в записи подынтегральной функции часто бывает полезно перейти от произведения или частного функций к сумме или разности (если, конечно, это возможно).

Задача 5.
$$\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx \equiv$$

перемножим скобки под знаком интеграла, получим

$$\equiv \int \left(x^{\frac{3}{2}} - x + \sqrt{x} + x - \sqrt{x} + 1 \right) dx =$$

$$= \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 1 \right) dx = \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} + x + C = \frac{2}{5} \cdot x^2 \sqrt{x} + x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Задача 6.
$$\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx \equiv$$

под знаком интеграла поделим почленно числитель дроби на знаменатель, получим

$$\equiv \int \left(x^{-\frac{5}{2}} - e^x + \frac{1}{x} \right) dx = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{3}{2}} - e^x + \ln |x| + C =$$

$$= -\frac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Задача 7. В следующих простых интегралах нужно переписать подынтегральную функцию в виде, «максимально близком к табличному»:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{dx}{7+x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{7})^2+x^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Задача 8. } \int 3 \cos^2 \frac{x}{2} dx \equiv$$

применим формулу понижения степени:

$$\equiv 3 \int \frac{1+\cos x}{2} dx = \frac{3}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{3}{2} (x + \sin x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Задача 9. } \int 5 \operatorname{ctg}^2 x dx \equiv$$

в задачах «про тангенсы и котангенсы» очень часто бывает полезно перейти «к синусам и косинусам»:

$$\equiv 5 \int \frac{(\cos x)^2}{(\sin x)^2} dx = 5 \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx \equiv$$

поделим почленно числитель дроби на знаменатель, получим

$$\equiv 5 \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -5 \operatorname{ctg} x - 5x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Задача 10. } \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx \equiv$$

применим в числителе дроби формулу двойного аргумента для $\cos 2x$, получим:

$$\equiv \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx \equiv$$

под знаком интеграла поделим почленно числитель дроби на знаменатель, получим разность двух табличных интегралов:

$$\equiv \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Задача 11. } \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \equiv$$

применим основное тригонометрическое тождество: в числителе дроби подставим вместо 1 выражение $\cos^2 x + \sin^2 x$, получим

$$\equiv \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx \equiv$$

под знаком интеграла поделим почленно числитель дроби на знаменатель, и вновь получим сумму двух табличных интегралов:

$$\equiv \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

ОБЩИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. ПОДВЕДЕНИЕ ПОД ЗНАК ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Но тогда

$$\int f(t)dt = F(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int f(u)du = F(u) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

И вообще,

$$\int f(\dots)d(\dots) = F(\dots) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

главное, чтобы вместо $(\dots)$ везде стояло одно и то же выражение.

В первом семестре вы научились вычислять дифференциал функции $df(x) = f'(x)dx$. Теперь надо освоить обратный переход $f'(x)dx = df(x)$. Основная идея подведения под знак дифференциала заключается в осуществлении следующих преобразований (которые надо сообразить сделать!):

$$\int \Phi(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

В следующих примерах мы проделаем несколько подведений под знак дифференциала, которые надо осознать. Простые случаи надо запомнить, и понять, какие действия надо предпринять в более сложных ситуациях.

Заметим, что при $a \neq 0$

$$d(ax + b) = (ax + b)'dx = adx$$

$$\Rightarrow d(ax + b) = adx$$

$$\Rightarrow \boxed{dx = \frac{1}{a} d(ax + b)}$$

Замечание. Постоянные множители, которые возникают под знаком интеграла, лучше сразу из-под знака интеграла выносить, чтобы не усложнять подынтегральное выражение.

$$\text{Задача 1. } \int \sin 3x \, dx \equiv$$

$$\text{так как } dx = \frac{1}{3}d(3x)$$

$$\equiv \int \sin 3x \left(\frac{1}{3} d(3x) \right) = \frac{1}{3} \int \sin(3x) d(3x) = -\frac{1}{3} \cos(3x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Задача 2. $\int \cos(2x + 1) dx \equiv$

так как $dx = \frac{1}{2} d(2x + 1)$

$$\equiv \frac{1}{2} \int \cos(2x + 1) d(2x + 1) = \frac{1}{2} \sin(2x + 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Задача 3. $\int e^{-5x+3} dx \equiv$

так как $dx = -\frac{1}{5} d(-5x + 3)$

$$\equiv -\frac{1}{5} \int e^{-5x+3} d(-5x + 3) = e^{-5x+3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Задача 4. $\int (7x + 2)^5 dx \equiv$

так как $dx = \frac{1}{7} d(7x + 2)$

$$\equiv \frac{1}{7} \int (7x + 2)^5 d(7x + 2) = \frac{1}{7} \cdot \frac{(7x+2)^6}{6} + C = \frac{(7x+2)^6}{42} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Задача 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+2}} \equiv$

так как $dx = \frac{1}{4} d(4x + 2)$

$$\equiv \frac{1}{4} \int \frac{d(4x+2)}{\sqrt{4x+2}} = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{4x+2} + C = \frac{1}{2} \sqrt{4x+2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Задача 6. $\int \frac{dx}{\sin^2(3x-4)} \equiv$

так как $dx = \frac{1}{3} d(3x - 4)$

$$\equiv \frac{1}{3} \int \frac{d(3x-4)}{\sin^2(3x-4)} = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}(3x - 4) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Задача 7. $\int \frac{dx}{2-8x} \equiv$

так как $dx = -\frac{1}{8} d(2 - 8x)$

$$\equiv -\frac{1}{8} \int \frac{d(2-8x)}{2-8x} = -\frac{1}{8} \ln |2 - 8x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что можно получить обобщение предыдущей формулы:

$$df(x) = f'(x)dx, \quad d(af(x) + b) = af'(x)dx$$

$$\Rightarrow \boxed{df(x) = \frac{1}{a} d(af(x) + b)}.$$

Кроме того, легко получить, что

$$d \sin x = \cos x \, dx \Rightarrow \boxed{\cos x \, dx = d \sin x}$$

$$d \cos x = -\sin x \, dx \Rightarrow \boxed{\sin x \, dx = -d \cos x}$$

$$dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} dx \Rightarrow \boxed{x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha} dx^\alpha}, \quad \alpha \neq 0$$

$$d \ln x = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x} dx = d \ln x} \quad \text{и другие формулы.}$$

Задача 8. $\int \operatorname{ctg} x \, dx \equiv$

переходим к синусам и косинусам, получаем

$$\equiv \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln |\sin x| + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

так как $\cos x \, dx = d(\sin x)$.

Задача 9. $\int \frac{\cos x \, dx}{2 \sin x + 1} = \int \frac{d \sin x}{2 \sin x + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2 \sin x + 1)}{2 \sin x + 1} = \frac{1}{2} \ln |2 \sin x + 1| + C,$
 $C \in \mathbb{R}.$

Задача 10. $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^3 x} = \int \cos^{-3} x \sin x \, dx = -\int \cos^{-3} x \, d \cos x =$
 $= -\left(-\frac{1}{2}\right) \cos^{-2} x + C = \frac{1}{2 \cos^2 x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Задача 11. $\int \sin^4 3x \cos 3x \, dx \equiv$

заметим, что $d \sin 3x = (\sin 3x)' dx = \cos 3x \cdot 3 dx \Rightarrow \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} d(\sin 3x)$,
 ПОЭТОМУ

$$\equiv \frac{1}{3} \int \sin^4 3x \, d(\sin 3x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin^5 3x}{5} + C = \frac{\sin^5 3x}{15} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Задача 12. $\int e^{-5x^3+2} x^2 \, dx = \frac{1}{3} \int e^{-5x^3+2} dx^3 =$
 $= \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{5}\right) \int e^{(-5x^3+2)} d(-5x^3+2) = -\frac{1}{15} e^{-5x^3+2} + C, \quad C \in \mathbb{R},$

так как $x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3$ и $dx^3 = -\frac{1}{5} d(-5x^3+2)$.

Задача 13. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx \equiv$

заметим, что $d\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2d\sqrt{x}}$, ПОЭТОМУ

$$\equiv 2 \int e^{\sqrt{x}} d\sqrt{x} = 2e^{\sqrt{x}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Задача 14. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+2x^3}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx^3}{\sqrt[3]{1+2x^3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(1+2x^3)}{\sqrt[3]{1+2x^3}} =$
 $= \frac{1}{6} \int (1+2x^3)^{-\frac{1}{3}} d(1+2x^3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} (1+2x^3)^{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{4} (1+2x^3)^{\frac{2}{3}} + C, \quad C \in \mathbb{R},$

так как $x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3$ и $dx^3 = \frac{1}{2} d(1+2x^3)$.

Задача 15. $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int \ln x d \ln x = \frac{1}{2} \ln^2 x + C, \quad C \in \mathbb{R},$

так как $d \ln x = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x} dx = d \ln x}$.

Задача 16. $\int \frac{e^x dx}{3-4e^x} = \int \frac{de^x}{3-4e^x} = -\frac{1}{4} \int \frac{d(3-4e^x)}{3-4e^x} = -\frac{1}{4} \ln|3-4e^x| + C, \quad C \in \mathbb{R},$

так как $e^x dx = de^x$ и $de^x = -\frac{1}{4} d(3-4e^x)$.

Задача 17. $\int \frac{e^{5x+2} dx}{1-3e^{5x+2}} = \frac{1}{5} \int \frac{de^{5x+2}}{1-3e^{5x+2}} = \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \int \frac{d(1-3e^{5x+2})}{1-3e^{5x+2}} =$
 $= -\frac{1}{15} \ln|1-3e^{5x+2}| + C, \quad C \in \mathbb{R},$

заметим, что $de^{5x+2} = e^{5x+2} \cdot 5dx \Rightarrow e^{5x+2} dx = \frac{1}{5} de^{5x+2}$.

Задача 18. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2} = \int e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx = -\int e^{\frac{1}{x}} \cdot d\frac{1}{x} = -e^{\frac{1}{x}} + C, \quad C \in \mathbb{R},$

так как $d\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} dx \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x^2} dx = -d\frac{1}{x}}$.

Задача 19. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = \int \sin(\ln x) d \ln x =$
 $= -\cos \ln x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Задача 20. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx = \int \sqrt{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \sqrt{\arcsin x} d \arcsin x =$
 $= \int (\arcsin x)^{\frac{1}{2}} d \arcsin x = \frac{2}{3} (\arcsin x)^{\frac{3}{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R},$

так как $d \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, то $\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d \arcsin x}$.

Задача 21. $\int \frac{5+3 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int (5+3 \operatorname{arctg} x) \cdot \frac{1}{1+x^2} dx =$
 $= \int (5+3 \operatorname{arctg} x) d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{3} \int (5+3 \operatorname{arctg} x) d(5+3 \operatorname{arctg} x) =$
 $= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} (5+3 \operatorname{arctg} x)^2\right) + C = \frac{1}{6} (5+3 \operatorname{arctg} x)^2 + C, \quad C \in \mathbb{R},$

так как $d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} dx$, то $\boxed{\frac{1}{1+x^2} dx = d(\operatorname{arctg} x)}$.

Рассмотрим немного другое решение этой задачи:

$$\begin{aligned}\int \frac{5+3 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx &= \int (5+3 \operatorname{arctg} x) \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= \int (5+3 \operatorname{arctg} x) d(\operatorname{arctg} x) = 5 \operatorname{arctg} x + \frac{3}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + C, C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Как же так? В первом случае получится (после возведения в квадрат) три «содержательных слагаемых», а во втором случае их только два...

Рассмотрим результат первого решения и немного преобразуем его:

$$\begin{aligned}\frac{1}{6} (5+3 \operatorname{arctg} x)^2 + C &= \frac{1}{6} (25 + 30 \operatorname{arctg} x + 9 (\operatorname{arctg} x)^2) + C = \\ &= \frac{3}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + 5 \operatorname{arctg} x + \frac{25}{6} + C = \frac{3}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + 5 \operatorname{arctg} x + \underbrace{\frac{25}{6} + C}_{=C, C \in \mathbb{R}} = \\ &= \frac{3}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + 5 \operatorname{arctg} x + C, C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

То есть оказывается, что это две формы записи верного ответа.

Важное замечание. Подведение под знак дифференциала является одним из важнейших навыков в интегрировании. Чтобы овладеть им, нужно самостоятельно решить много задач.

Введем следующие определения.

Определение. Дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n , а $Q_m(x)$ – многочлен степени m , называется **правильной**, если степень числителя меньше степени знаменателя, то есть $n < m$.

Определение. Дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n , а $Q_m(x)$ – многочлен степени m , называется **неправильной**, если степень числителя не меньше (то есть больше либо равна) степени знаменателя, то есть $n \geq m$.

Мы сможем интегрировать только правильные дроби.

Замечание. Неправильную дробь можно записать в виде «многочлен + правильная дробь» (выделив целую часть, которая является многочленом, с помощью, например, «деления столбиком»). В простых ситуациях целую часть можно выделить с помощью «хорошей записи числителя» и затем почленного деления числителя на знаменатель. Рассмотрим это преобразование в следующих примерах.

$$\begin{aligned}
 \text{Задача 22. } \int \frac{2x+3}{x-1} dx &= 2 \int \frac{x+\frac{3}{2}}{x-1} dx = 2 \int \frac{(x-1)+\left(1+\frac{3}{2}\right)}{x-1} dx = \\
 &= 2 \int \left(\frac{(x-1)}{x-1} + \frac{\left(1+\frac{3}{2}\right)}{x-1} \right) dx = 2 \int \left(1 + \frac{\frac{5}{2}}{x-1} \right) dx = 2 \int dx + 2 \cdot \frac{5}{2} \int \frac{1}{x-1} dx = \\
 &= 2x + 5 \int \frac{1}{x-1} d(x-1) = 2x + 5 \ln|x-1| + C, \quad C \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Задача 23. } \int \frac{x^2-2x}{x+1} dx \quad \square$$

поделив «столбиком» $x^2 - 2x$ на $x + 1$, получаем

$$\begin{aligned}
 \square \int \left(x - 3 + \frac{3}{x+1} \right) dx &= \int (x-3) dx + \int \left(\frac{3}{x+1} \right) d(x+1) = \\
 &= \frac{x^2}{2} - 3x + 3 \ln|x+1| + C, \quad C \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Деление столбиком в этой задаче можно заменить такими преобразованиями:

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2-2x}{x+1} &= \frac{x^2+x-x-2x}{x+1} = \frac{(x^2+x)-3x}{x+1} = \frac{(x^2+x)-3x-3+3}{x+1} = \frac{x(x+1)-3(x+1)+3}{x+1} = \\
 &= \frac{x(x+1)}{x+1} + \frac{-3(x+1)}{x+1} + \frac{3}{x+1} = x - 3 + \frac{3}{x+1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Задача 24. } \int \frac{3x+1}{2+5x^2} dx &= 3 \int \frac{xdx}{2+5x^2} + \int \frac{dx}{2+5x^2} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \int \frac{d(2+5x^2)}{2+5x^2} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\frac{2}{5}+x^2} = \\
 &= \frac{3}{10} \int \frac{d(2+5x^2)}{2+5x^2} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2 + x^2} = \frac{3}{10} \ln|2+5x^2| + \frac{1}{5} \sqrt{\frac{5}{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{2}} + C = \\
 &= \frac{3}{10} \ln(2+5x^2) + \frac{1}{\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R},
 \end{aligned}$$

так как $xdx = \frac{1}{2} dx^2$ и $\frac{1}{2} dx^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} d(2+5x^2)$, и не забыть табличный интеграл $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

$$\text{Задача 25. } \int \frac{dx}{2^x+3} = \int \frac{2^x dx}{2^x(2^x+3)} \quad \square$$

Заметим, что $d2^x = 2^x \ln 2 \, dx \Rightarrow \boxed{2^x dx = \frac{d2^x}{\ln 2}}$, поэтому

$$\square \frac{1}{\ln 2} \int \frac{d2^x}{2^x(2^x+3)} \square$$

обратите внимание на то, что до сих пор мы не оформляли замену переменной в неопределенных интегралах, сводя их к интегралам от какого-то простого выражения, зависящего от переменной x . Но когда выражения становятся сложнее, как, например, в этой задаче, оформление замены переменной

становится оправданным. Обозначим $2^x = t$, тогда интеграл переписывается в виде

$$\begin{aligned} \square \int \frac{1}{\ln 2} \frac{dt}{t(t+3)} &= \frac{1}{3 \ln 2} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+3} \right) dt = \frac{1}{3 \ln 2} (\ln |t| - \ln |t+3|) + C = \\ &= \frac{1}{3 \ln 2} \ln \left| \frac{t}{t+3} \right| + C = \frac{1}{3 \ln 2} \ln \frac{2^x}{2^x+3} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Выражение $\frac{2^x}{2^x+3}$ является положительным при всех значениях x , поэтому $\left| \frac{2^x}{2^x+3} \right| = \frac{2^x}{2^x+3}$.

Замечание. Возвращение к исходной переменной надо проделывать обязательно.

К замене переменной мы еще вернемся в более интересных и сложных ситуациях.

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Формула интегрирования по частям выглядит так:

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x).$$

Но очень часто приходится проделывать некоторую работу *до* и *после* применения формулы интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int F(x) dx &= \int u(x)v'(x) dx = \\ &= \boxed{\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x)} = \\ &= u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx. \end{aligned}$$

В частности, надо запомнить, что пока под знаком интеграла не получен дифференциал dx , интегрирование по частям не завершено.

Задача 25. $\int \underbrace{\ln x}_u \underbrace{dx}_v = \ln x \cdot x - \int x d \ln x = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx =$
 $= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Задача 26. $\int \underbrace{\arctg x}_u \underbrace{dx}_v = \arctg x \cdot x - \int x d \arctg x = x \arctg x - \int \frac{x dx}{1+x^2} =$
 $= x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)} = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

$$\begin{aligned} \text{Задача 27. } \int \underbrace{x}_u \underbrace{\sin x}_{v'} dx &= - \int \underbrace{x}_u d \underbrace{\cos x}_v = -x \cos x + \int \cos x dx = \\ &= -x \cos x + \sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

В некоторых задачах интегрирование по частям приходится проводить несколько раз. Рассмотрим следующие интегралы:

$$\begin{aligned} \text{Задача 27. } \int \underbrace{(3x^2 + x)}_u \underbrace{\cos x}_{v'} dx &= \int (3x^2 + x) d \sin x = \\ &= (3x^2 + x) \sin x - \int \sin x d(3x^2 + x) = \\ &= (3x^2 + x) \sin x - \int \sin x (6x + 1) dx = \\ &= (3x^2 + x) \sin x - \int \underbrace{(6x + 1)}_u \underbrace{\sin x}_{v'} dx = \\ &= (3x^2 + x) \sin x + \int (6x + 1) d \cos x = \\ &= (3x^2 + x) \sin x + (6x + 1) \cos x - \int \cos x d(6x + 1) = \\ &= (3x^2 + x) \sin x + (6x + 1) \cos x - 6 \int \cos x dx = \\ &= (3x^2 + x) \sin x + (6x + 1) \cos x - 6 \sin x + C = \\ &= (3x^2 + x - 6) \sin x + (6x + 1) \cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Задача 28. } \int \underbrace{(x^3 + 2x)}_u \underbrace{e^{2x+5}}_{v'} dx &= \frac{1}{2} \int (x^3 + 2x) d e^{2x+5} = \\ &= \frac{1}{2} (x^3 + 2x) e^{2x+5} - \frac{1}{2} \int e^{2x+5} d(x^3 + 2x) = \\ &= \frac{1}{2} (x^3 + 2x) e^{2x+5} - \frac{1}{2} \int (3x^2 + 2) e^{2x+5} dx = \\ &= \frac{1}{2} (x^3 + 2x) e^{2x+5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int (3x^2 + 2) d e^{2x+5} = \\ &= \frac{1}{2} (x^3 + 2x) e^{2x+5} - \frac{1}{4} (3x^2 + 2) e^{2x+5} + \frac{1}{4} \int e^{2x+5} d(3x^2 + 2) = \\ &= \frac{1}{2} (x^3 + 2x) e^{2x+5} - \frac{1}{4} (3x^2 + 2) e^{2x+5} + \frac{1}{4} \cdot 6 \int x e^{2x+5} dx = \\ &= \frac{1}{2} (x^3 + 2x) e^{2x+5} - \frac{1}{4} (3x^2 + 2) e^{2x+5} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \int x d e^{2x+5} = \\ &= \frac{1}{2} (x^3 + 2x) e^{2x+5} - \frac{1}{4} (3x^2 + 2) e^{2x+5} + \frac{3}{4} x e^{2x+5} - \frac{3}{4} \int e^{2x+5} dx = \\ &= \frac{1}{2} (x^3 + 2x) e^{2x+5} - \frac{1}{4} (3x^2 + 2) e^{2x+5} + \frac{3}{4} x e^{2x+5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} e^{2x+5} + C = \\ &= \frac{1}{8} (4x^3 + 8x - 6x^2 - 4 + 6x - 3) e^{2x+5} + C = \\ &= \frac{1}{8} (4x^3 - 6x^2 + 14x - 7) e^{2x+5} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Замечание. Возникает вопрос: какой множитель подводить под знак дифференциала? Ответ: тот, который удобнее, или в крайнем случае тот, который возможно подвести под знак дифференциала...

$$\text{Задача 29. } \int \underbrace{x}_{v'} \underbrace{\ln(x-1)}_u dx \quad \square$$

Заметим, что нам «не хочется» подводить под знак дифференциала функцию x , так как тогда получим $x dx = \frac{1}{2} dx^2$, то есть под знаком дифференциала получится более сложное выражение. Но, к сожалению, мы не знаем, производная какой функции равна $\ln(x-1)$. Поэтому мы не можем «отправить» выражение $\ln(x-1)$ под знак дифференциала. Остается единственная возможность:

$$\begin{aligned} \square \frac{1}{2} \int \ln(x-1) dx^2 &= \frac{1}{2} \ln(x-1) \cdot x^2 - \frac{1}{2} \int x^2 d \ln(x-1) = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{x-1} = \frac{x^2}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2-1+1)dx}{x-1} = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \int \left(\frac{(x^2-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \int \left(x+1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} (x^2-1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Задача 30. $\int \underbrace{x}_{v'} \underbrace{\arctg x}_u dx = \frac{1}{2} \int \arctg x dx^2 =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \arctg x \cdot x^2 - \frac{1}{2} \int x^2 d \arctg x = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1-1)dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} (x - \arctg x) + C = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 \arctg x + \arctg x - x) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Задача 31. $\int \ln^2 x dx = \ln^2 x \cdot x - \int x d \ln^2 x = x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx =$

$$\begin{aligned} &= x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2 \int x d \ln x = \\ &= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2 \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Задача 32. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x} = \int x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx = - \int x d \operatorname{ctg} x =$

$$\begin{aligned} &= -x \operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg} x dx = -x \operatorname{ctg} x + \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = -x \operatorname{ctg} x + \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \\ &= -x \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Задача 33. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx =$

$$\begin{aligned} &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int x d \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int x \cdot \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) dx = \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int x \cdot \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \\
&= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{\sqrt{1+x^2}} = \\
&= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \\
&= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Задача 34. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx = \int \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx \equiv$

так как $d\sqrt{x+1} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx$, то $\frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = 2d(\sqrt{x+1})$ и поэтому получаем, что

$$\begin{aligned}
&\equiv 2 \int \arcsin x d(\sqrt{x+1}) = 2 \arcsin x \cdot \sqrt{x+1} - 2 \int \sqrt{x+1} d(\arcsin x) = \\
&= 2 \arcsin x \cdot \sqrt{x+1} - 2 \int \sqrt{x+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \equiv
\end{aligned}$$

так как областью определения функции $\arcsin x$ является отрезок $[-1; 1]$, то будет справедлив переход $\sqrt{x+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{x+1}{(1-x)(1+x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ (поскольку все множители под корнем положительные)

$$\begin{aligned}
&\equiv 2\sqrt{x+1} \arcsin x - 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = 2\sqrt{x+1} \arcsin x + 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} d(1-x) = \\
&= 2\sqrt{x+1} \arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Задача 35. $\int x \ln\left(3 - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2} \int \ln \frac{3x-1}{x} dx^2 =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \ln \frac{3x-1}{x} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \int x^2 d \ln \frac{3x-1}{x} = \\
&= \frac{x^2}{2} \ln \frac{3x-1}{x} - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{x}{3x-1} \cdot \frac{3x-(3x-1)}{x^2} dx = \\
&= \frac{x^2}{2} \ln \frac{3x-1}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{x}{3x-1} dx = \frac{x^2}{2} \ln \frac{3x-1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \int \frac{3x}{3x-1} dx = \\
&= \frac{x^2}{2} \ln \frac{3x-1}{x} - \frac{1}{6} \int \frac{3x-1+1}{3x-1} dx = \frac{x^2}{2} \ln \frac{3x-1}{x} - \frac{1}{6} \int \left(1 + \frac{1}{3x-1}\right) dx = \\
&= \frac{x^2}{2} \ln \frac{3x-1}{x} - \frac{1}{6} x - \frac{1}{18} \ln|3x-1| + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ИНТЕГРАЛА

В некоторых задачах интегрирование по частям не приводит к «упрощению» выражения под знаком интеграла, процесс в некотором смысле «зацикливается». Рассмотрим следующие примеры.

Задача 36. $\boxed{\int e^x \sin x dx} = \int \sin x de^x =$

интегрируем по частям

$$= e^x \sin x - \int e^x d \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x =$$

снова интегрируем по частям

$$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d \cos x = \boxed{e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx}$$

Уравнение, составленное из выражений «в рамочках», позволяет вычислить искомый интеграл:

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что каждый из интегралов $\int e^x \sin x dx$ в уравнении относительно этого интеграла содержит свою (!) произвольную постоянную: C_1 и C_2 соответственно. Но $C_1 \pm C_2 = C, C \in \mathbb{R}$. В нашем случае коротко это выглядит так:

$$\underbrace{\int f(x) dx}_{F(x)+C_1} = \varphi(x) - \underbrace{\int f(x) dx}_{F(x)+C_2}$$

$$2 \int f(x) dx = \varphi(x) + C$$

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \varphi(x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Задача 37. $\boxed{\int \cos(\ln x) dx} =$

интегрируем по частям

$$= \cos(\ln x) \cdot x - \int x d \cos(\ln x) = x \cos(\ln x) + \int x \cdot \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx =$$

еще раз интегрируем по частям

$$= x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int x d \sin(\ln x) =$$

$$= \boxed{x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx}.$$

Уравнение, составленное из выражений «в рамочках», позволяет вычислить искомый интеграл:

$$\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

$$2 \int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{1}{2}(x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим 3 интеграла:

- 1) $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$
- 2) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$
- 3) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Эти интегралы можно вычислять по-разному (с помощью различных подстановок), а можно – одинаково (с помощью получения уравнения относительно интеграла).

Задача 38. $\boxed{\int \sqrt{x^2 - a^2} dx} =$

интегрируем по частям

$$\begin{aligned}
 &= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int x d\sqrt{x^2 - a^2} = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \\
 &= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \\
 &= x\sqrt{x^2 - a^2} - \boxed{\int \sqrt{x^2 - a^2} dx} - \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \\
 &= x\sqrt{x^2 - a^2} - \boxed{\int \sqrt{x^2 - a^2} dx} - a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}|.
 \end{aligned}$$

Уравнение, содержащее выражения «в рамочках», позволяет вычислить иско-
мый интеграл:

$$\begin{aligned}
 \boxed{\int \sqrt{x^2 - a^2} dx} &= x\sqrt{x^2 - a^2} - \boxed{\int \sqrt{x^2 - a^2} dx} - a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| \\
 2 \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \\
 \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \quad C \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Задача 39. $\boxed{\int \sqrt{x^2 + a^2} dx} =$

интегрируем по частям

$$\begin{aligned}
 &= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int x d\sqrt{x^2 + a^2} = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \\
 &= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \\
 &= x\sqrt{x^2 + a^2} - \boxed{\int \sqrt{x^2 + a^2} dx} + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \\
 &= x\sqrt{x^2 + a^2} - \boxed{\int \sqrt{x^2 + a^2} dx} + a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}|.
 \end{aligned}$$

Уравнение, содержащее выражения «в рамочках», позволяет вычислить иско-
мый интеграл:

$$\boxed{\int \sqrt{x^2 + a^2} dx} = x\sqrt{x^2 + a^2} - \boxed{\int \sqrt{x^2 + a^2} dx} + a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}|$$

$$2 \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Задача 40. $\boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2} dx} =$

интегрируем по частям

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int x d\sqrt{a^2 - x^2} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2} dx} + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2} dx} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}.$$

Уравнение, содержащее выражения «в рамочках», позволяет вычислить иско-
мый интеграл:

$$\boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2} dx} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2} dx} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$$

$$2 \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ. ПОДСТАНОВКА

Мы называем *заменой переменной* действие, когда получаем задачу отно-
сительно выражения $\varphi(x)$ и вводим новую переменную равенством $\varphi(x) = t$.
Подстановкой мы называем действие, когда вместо задачи относительно пе-
ременной x мы начинаем рассматривать задачу относительно новой пере-
менной t , связанной с переменной x равенством $x = g(t)$.

Задача 41. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} \equiv$

Сделаем замену переменной: $\sqrt{x+1} = t$. Тогда $x+1 = t^2$, $x = t^2 - 1$,
 $dx = 2t dt$ и

$$\begin{aligned} \square \int \frac{(t^2-1)}{t} \cdot 2t dt &= 2 \int (t^2 - 1) dt = \frac{2}{3} t^3 - 2t + C = \\ &= \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Задача 42. $\int \frac{x + \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx \square$

Сделаем замену переменной: $\sqrt[6]{x+1} = t$. Тогда $x+1 = t^6$, $x = t^6 - 1$, $dx = 6t^5 dt$ и

$$\begin{aligned} \square \int \frac{(t^6-1)+t^2}{t^3} \cdot 6t^5 dt &= 6 \int (t^6 - 1 + t^2) t^2 dt = 6 \int (t^8 - t^2 + t^4) dt = \\ &= 6 \left(\frac{t^9}{9} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) + C = \frac{2}{3} (\sqrt[6]{x+1})^9 + \frac{6}{5} (\sqrt[6]{x+1})^5 - 2(\sqrt[6]{x+1})^3 + C = \\ &= \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 + \frac{6}{5} (\sqrt[6]{x+1})^5 - 2\sqrt{x+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Задача 43. $\int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}} dx = \left\| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \geq 0 \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right\| = \int \frac{\arccos t}{\sqrt{t^2-t^4}} 2t dt = 2 \int \frac{\arccos t \cdot t dt}{t\sqrt{1-t^2}} =$

$$= 2 \int \arccos t \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2 \cdot (-1) \int \arccos t d \arccos t = -2 \frac{(\arccos t)^2}{2} + C =$$

$$= -(\arccos \sqrt{x})^2 + C = -\arccos^2 \sqrt{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

В задаче 43 представлен пример оформления замены переменной.

Задача 44. $\int \frac{dx}{e^x+1} \square$

Сделаем подстановку: $x = -\ln t$. Тогда $dx = -\frac{1}{t} dt$, $e^x = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}$ и

$$\square \int \frac{-\frac{1}{t} dt}{\frac{1}{t}+1} = - \int \frac{dt}{1+t} = - \int \frac{d(1+t)}{1+t} = -\ln|1+t| = -\ln(1+e^{-x}) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

так как $|1+e^{-x}| = 1+e^{-x} > 0$.

Задача 45. Рассмотрим третью из предложенных задач с корнями под знаком интеграла: $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$. Будем считать $a > 0$. Сделаем тригонометрическую подстановку $x = a \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Заметим, что это соответствие между x и t является взаимно-однозначным, и если

$$t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ то}$$

$$\sin t \in [-1; 1] \text{ и}$$

$a \sin t = x \in [-a; a]$, но именно этот промежуток является областью определения функции $\sqrt{a^2 - x^2}$.

Тогда $dx = a \cos t dt$ и

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \\ = a^2 \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = a^2 \int |\cos t| \cos t dt \quad \square$$

так как $\cos t \geq 0$ при $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$\square a^2 \int \cos t \cdot \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt =$$

воспользуемся формулой понижения степени

$$= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \\ = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \sin 2 \arcsin \frac{x}{a} + C = \\ = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \cdot 2 \sin \arcsin \frac{x}{a} \cdot \cos \arcsin \frac{x}{a} + C = \\ = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

так как, если $z \in [-1; 1]$, то $\varphi = \arcsin z \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\cos \varphi \geq 0$ при $\varphi = \arcsin z \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому

$$\cos \arcsin z = +\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin z} = \sqrt{1 - (\sin \arcsin z)^2} = \\ = \sqrt{1 - z^2}.$$

Сравните это решение с решением, предложенным в задаче 40.

Задача 46. В некоторых задачах без этой тригонометрической подстановки не обойтись. Рассмотрим простой (пока!) пример:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left\| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ dx = a \cos t dt \end{array} \right\| = \int \frac{(a \sin t)^2 \cdot a \cos t dt}{\sqrt{a^2 - (a \sin t)^2}} = \frac{a^2 \cdot a}{a} \int \frac{\sin^2 t \cdot \cos t dt}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} = \\ = a^2 \int \frac{\sin^2 t \cdot \cos t dt}{\sqrt{\cos^2 t}} = a^2 \int \frac{\sin^2 t \cdot \cos t dt}{|\cos t|} \quad \square$$

так как $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos t \geq 0$ и $|\cos t| = \cos t$, поэтому

$$\square a^2 \int \frac{\sin^2 t \cdot \cos t dt}{\cos t} = a^2 \int \sin^2 t dt = \\ = \frac{a^2}{2} \int (1 - \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \\ = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} - \sin t \cos t \right) + C = \\ = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right) + C =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C = \\
&= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

В дальнейшем рассмотрим и более сложные примеры с такой подстановкой.

Задача 47. Найти $\int x(1-x)^n dx$, $n > 0$, $x \leq 1$.

Положим $t = 1 - x$, тогда $x = 1 - t$ и $dx = -dt$. Получим интеграл, который гораздо проще заданного:

$$\begin{aligned}
\int x(1-x)^n dx &= -\int (1-t) t^n dt = -\int (t^n - t^{n+1}) dt = -\frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{t^{n+2}}{n+2} + C = \\
&= -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{(1-x)^{n+2}}{n+2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Эта идея применяется в интегралах $\int x^m(1-x)^n dx$, когда $n > m$, n и m – натуральные числа.