МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(x)$ С ПОЛНЫМ ИССЛЕДОВАНИЕМ

(методическое пособие для бакалавров)

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2025

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов химических специальностей

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок, создаваемых на основе требований нового учебного плана – облегчить самостоятельную работу иностранных студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(x)$ С ПОЛНЫМ ИССЛЕДОВАНИЕМ

При решении многих задач математики важную роль играет умение построить график функции $y = f(x)$ с полным исследованием. Чуть позже приведем план, который позволит осуществить это построение (и будет служить пояснением того, что же является этим построением).

Сначала напомним некоторые определения и теоремы.

Замечание. Известны общепринятые обозначения:

$(a; b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ – интервал

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$ – полуинтервал

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ – полуинтервал

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ – отрезок.

Все эти множества называются ***промежутками***. Они отличаются вхождением (или не вхождением) граничных точек, и часто бывает очень важно знать, входит граничная точка в промежуток или нет. Но бывают ситуации, когда это не важно, и можно рассматривать все промежутки сразу. Поэтому введем обозначение

$< a, b >$ – промежуток (интервал, полуинтервал или отрезок).

Кроме того, в дальнейшем всюду предполагается, что производные нужного порядка существуют.

Теорема. Если $f'(x) > 0$ $\forall x \in < a, b >$, то $y = f(x)$ возрастает на всем промежутке $< a, b >$ (то есть, если производная функции положительна во всех точках какого-то промежутка, то функция возрастает на этом промежутке).

Если же $f'(x) < 0$ $\forall x \in < a, b >$, то $y = f(x)$ убывает на всем промежутке $< a, b >$ (то есть, если производная функции отрицательна во всех точках какого-то промежутка, то функция убывает на этом промежутке).

Определение. Точку $x = c$ назовем точкой ***локального максимума*** функции $y = f(x)$, если $\exists$ $(a; b)$, такой, что $c \in (a; b)$ и $\forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x) \leq f(c)$. Точку $x = c$ назовем точкой ***локального минимума*** функции $y = f(x)$, если $\exists$ $(a; b)$, такой, что $c \in (a; b)$ и $\forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x) \geq f(c)$.

Замечание. Локальные экстремумы являются именно ***локальными экстремумами***, то есть при $x \in (a; b)$ значение $f(c)$ может быть самым большим, но вне интервала $(a; b)$ могут существовать точки, значения в которых у функции $f(x)$ могут быть больше. В частности, локальных экстремумов у функции может быть несколько.

Теорема (необходимое условие локального экстремума). Если $x = c$ – точка локального экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$, то $f'(c) = 0$ (обратное может не выполняться, то есть если производная функции в точке равна нулю, то в этой точке не обязательно будет локальный экстремум).

Замечание. У функции в некоторой точке может быть локальный экстремум, даже если функция не является дифференцируемой в этой точке. Например, функция $f(x) = |x|$ имеет в точке $x = 0$ локальный минимум, но при этом у функции $f(x) = |x|$ в точке $x = 0$ производная не существует.

Теорема.

1) Если $f'(c) = 0$ и $\exists\ (a; b)$, такой, что $c \in (a; b)$ и $f'(x) > 0\ \forall x \in (a; c)$, $f'(x) < 0\ \forall x \in (c; b)$, то $x = c$ – точка локального максимума функции $y = f(x)$.

2) Если $f'(c) = 0$ и $\exists\ (a; b)$, такой, что $c \in (a; b)$ и $f'(x) < 0\ \forall x \in (a; c)$, $f'(x) > 0\ \forall x \in (c; b)$, то $x = c$ – точка локального минимума функции $y = f(x)$.

Теорема. Если $f'(c) = 0$ и $f''(c) > 0$, то $x = c$ – точка локального минимума функции $y = f(x)$. Если $f'(c) = 0$ и $f''(c) < 0$, то $x = c$ – точка локального максимума функции $y = f(x)$.

Определение. Будем говорить, что

1) функция ***выпукла вверх*** на промежутке $< a, b >$, если ее график расположен не выше касательной к нему в любой точке этого промежутка (то есть, если ***в любой точке промежутка*** $< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >$ провести касательную к графику функции $y = f(x)$, все точки графика будут лежать ниже касательной или на касательной);

2) функция ***выпукла вниз*** на промежутке $< a, b >$, если ее график расположен не ниже касательной к нему в любой точке этого промежутка (то есть, если ***в любой точке промежутка*** $< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >$ провести касательную к графику функции $y = f(x)$, все точки графика будут лежать выше касательной или на касательной).

Определение. Точку, в которой функция меняет свою выпуклость, назовем ***точкой перегиба***.

Теорема. Если $f''(x) > 0\ \forall x \in< a, b >$, то функция $y = f(x)$ выпукла вниз на промежутке $< a, b >$. Если $f''(x) < 0\ \forall x \in< a, b >$, то функция $y = f(x)$ выпукла вверх на промежутке $< a, b >$.

Определение. Предположим, что функция $y = f(x)$ не определена в точке $x = a$. Если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$ (или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$) и (или) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$ (или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty$), то назовем прямую $x = a$ ***вертикальной асимптотой*** для функции $y = f(x)$.

Замечание. Напомним, что $x \to a + 0$ означает, что x стремится к числу a справа, то есть x всегда остается больше, чем a.

Соответственно, что $x \to a - 0$ означает, что x стремится к числу a слева, то есть x всегда остается меньше, чем a.

Определение. Прямую $y = k_+x + b_+$ назовем ***наклонной асимптотой для графика функции*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ ***при*** $\boldsymbol{x \to +\infty}$, если выполняется условие

$$\lim_{x\to+\infty}\big((k_+x + b_+) - f(x)\big) = 0.$$

Прямую $y = k_-x + b_-$ назовем ***наклонной асимптотой для графика функции*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ ***при*** $\boldsymbol{x \to -\infty}$, если выполняется условие

$$\lim_{x\to-\infty}\big((k_-x + b_-) - f(x)\big) = 0.$$

Напомним, что в этом случае k_+ и k_- — угловые коэффициенты прямых, а b_+ и b_- задают точки пересечения этих прямых с осью Oy.

Теорема. Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ имел наклонные асимптоты $y = k_+x + b_+$ и $y = k_-x + b_-$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

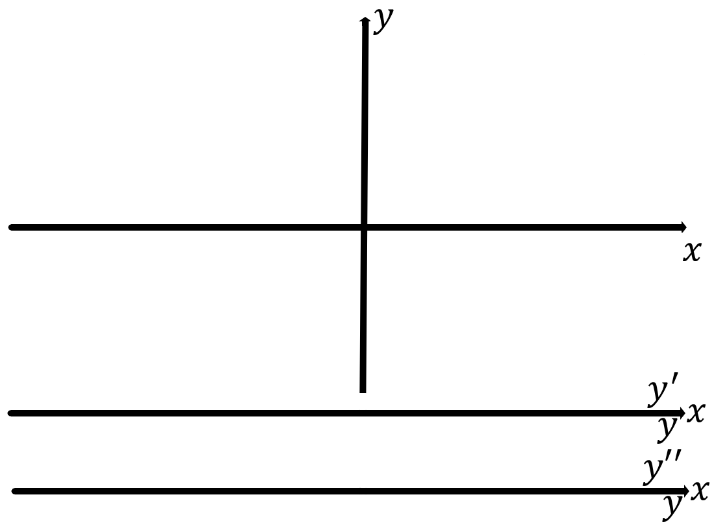
$$k_+ = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b_+ = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - k_+x)$$

$$k_- = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b_- = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - k_-x).$$

Замечание. В каждом случае (при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$) должны существовать ***оба конечных предела***. Если хотя бы один конечный предел не существует, то соответствующей наклонной асимптоты у графика функции нет.

Замечание. Если при нахождении наклонной асимптоты получается $k_+ = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$, и существует конечный предел $b_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то при $x \to +\infty$ асимптота, естественно, будет горизонтальной $(y = b_+)$. Если же при нахождении наклонной асимптоты получается $k_- = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$, и существует конечный предел $b_- = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, то при $x \to -\infty$ асимптота, естественно, также будет горизонтальной $(y = b_-)$.

Перед началом построения графика функции $y = f(x)$ лучше сразу подготовить место, куда мы будем заносить всю получаемую в дальнейшем информацию о поведении функции, то есть подготовить «картинку», которая будет содержать систему координат Oxy и две «копии» оси Ox для отображения связи между знаками первой и второй производной функции $y = f(x)$ и поведением самой функции $y = f(x)$. «Копии» означает, что одинаковые числа на осях должны располагаться строго друг под другом.



ПЛАН ИССЛЕДОВАНИЯ И ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = y(x)$

Приведем план построения графика функции $y = y(x)$ «с полным исследованием». Этот порядок действий, с нашей точки зрения, является наиболее удобным. Но при необходимости его, конечно, можно менять.

1) Найдем область определения $\left(D_{y(x)}\right)$ функции $y = y(x)$. Исследуем четность-нечетность, периодичность функции, возможно, область значений функции (или хотя бы знак функции на различных промежутках).

2) Найдем точки пересечения с координатными осями, то есть найдем координаты точек $(0; y(0))$ и $(x_k; 0)$, где x_k – корни уравнения $y(x) = 0$.

3) Если точка $x = a$ является точкой разрыва функции и определена в окрестности точки $x = a$, то рассмотрим $\lim\limits_{x \to a+0} y(x)$ и $\lim\limits_{x \to a-0} y(x)$.

4) Посчитаем $y'(x)$ и $y''(x)$.

А) Найдем корни уравнения $y'(x) = 0$ и решения неравенств $y'(x) > 0$ и $y'(x) < 0$ (это позволит найти локальные экстремумы и промежутки возрастания-убывания функции $y = y(x)$).

Б) Найдем корни уравнения $y''(x) = 0$ и решения неравенств $y''(x) > 0$ и $y''(x) < 0$ (это позволит найти точки перегиба, исследовать выпуклость).

5) Найдем наклонные асимптоты $y = k_+x + b_+$ и $y = k_-x + b_-$. Для этого посчитаем

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x}, \qquad b_+ = \lim_{x\to+\infty} (y(x) - k_+x)$$

$$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x}, \qquad b_- = \lim_{x\to-\infty} (y(x) - k_-x).$$

6) Если в пункте 5 при $x \to +\infty$ (или при $x \to -\infty$) не существует наклонной асимптоты, то бывает полезно найти $\lim_{x\to+\infty} y'(x)$ и $\lim_{x\to-\infty} y'(x)$, чтобы оценить «предельный наклон касательной к графику функции $y = y(x)$» при $x \to \pm\infty$.

Рассмотрим конкретные примеры, на которых подробно разберем содержание каждого пункта плана исследования.

Пример 1. Построить график функции $y = x^4 - 2x^2$ с полным исследованием.

Нарисуем систему координат Oxy с двумя дополнительными осями Ox под ней.

1) Функция $y = x^4 - 2x^2$ является многочленом. Ее область определения – вся действительная ось $\left(D_{y(x)} = \mathbb{R}\right)$.

Заметим, что функция является четной ($y(x) = y(-x)$), следовательно ее график симметричен относительно оси Oy. Поэтому у нас есть два варианта исследования.

а) Рассматривать функцию на всей оси, используя четность в качестве проверки по мере построения графика.

б) Построить график функции только при $x \geq 0$, а потом сделать симметрию графика относительно оси Oy, внимательно оценив поведение графика в правой полуокрестности нуля.

Мы будем исследовать функцию на всей оси, чтобы в «более явном виде» получить полное исследование (а затем «увидим», что действительно получили график четной функции, то есть полученная кривая симметрична относительно оси Oy).

2) Точки пересечения с координатными осями.

При $x = 0$ получаем $y = 0$.

При $y = 0$ получаем уравнение $x^4 - 2x^2 = 0$, корни которого $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$.

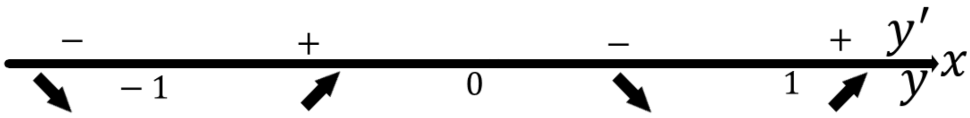
Следовательно, точки пересечения графика функции с координатными осями имеют координаты $(0; 0)$, $(\sqrt{2}; 0)$ и $(-\sqrt{2}; 0)$. Отметим их на нашей «картинке» в системе координат Oxy. Заметим, что точки пересечения с координатными осями симметричны относительно оси Oy (четность!).

3) Так как функция определена на $\mathbb{R}$, то вертикальных асимптот нет.

4) Посчитаем и проанализируем $y'(x)$ и $y''(x)$.

А) $y'(x) = 4x^3 - 4x$.

Решим уравнение $y'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$. Решение неравенств относительно $y'(x)$ методом интервалов позволяет получить следующую «картинку»:



Легко посчитать координаты локальных экстремумов:

$(x_{min}; y_{min}) = (-1; -1)$,

$(x_{min}; y_{min}) = (1; -1)$,

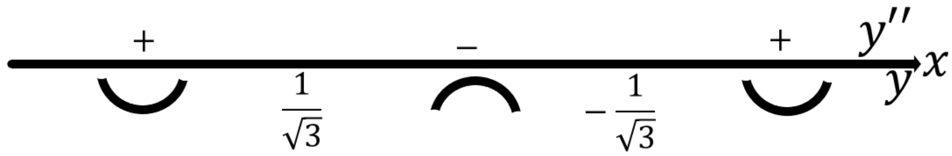
$(x_{max}; y_{max}) = (0; 0)$.

Заметим, что точки локальных экстремумов также симметричны относительно оси Oy (четность!).

Б) $f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Определив знак $y''(x)$ на каждом промежутке, получаем «картинку»:



Найдем координаты точек перегиба (симметричны относительно оси Oy – четность!): $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{9}$. Отметим в системе координат Oxy точки перегиба: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{5}{9}\right)$.

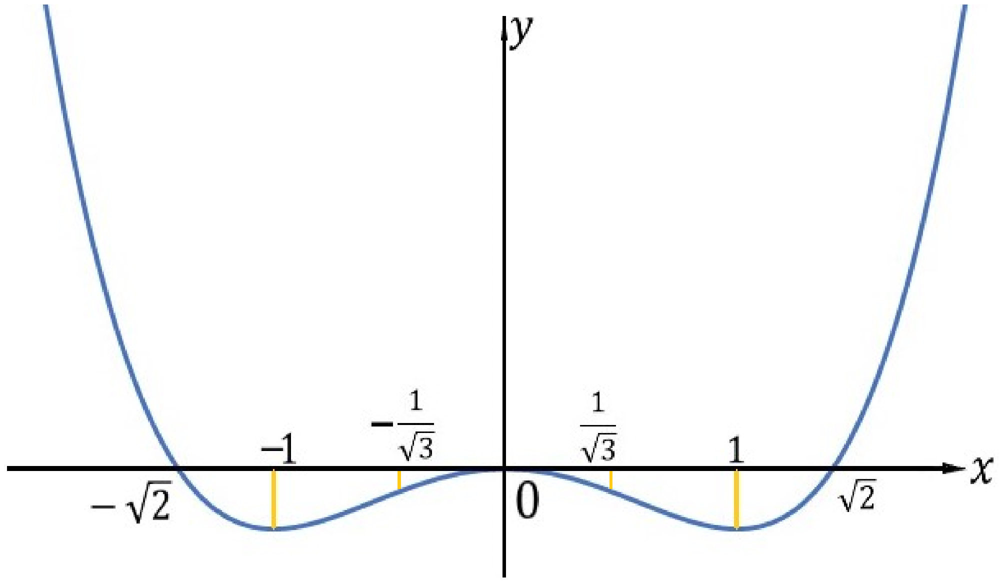
5) Заметим, что

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-2x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\big(x(x^2-2)\big)=\infty.$$

Поэтому наклонных асимптот у графика нашей функции нет.

6) Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y'(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(4x^3-4x)=\infty$, то тангенс угла наклона касательных стремится к бесконечности.

Итак, в системе координат уже проставлены точки пересечения с координатными осями, точки локальных экстремумов, точки перегиба. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и ее выпуклости на различных промежутках. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным (у нас синим цветом изображен график функции, желтым – точки локальных минимумов и точки перегиба).



$\boldsymbol{y=x^4-2x^2.}$

Пример 2. Построить график функции $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ с полным исследованием.

Вновь заранее приготовим систему координат Oxy с двумя дополнительными осями.

1) Функция $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ является рациональной и определена при всех x, при которых знаменатель дроби не равен нулю. Следовательно, область определения функции $D_{y(x)}=\{x\in\mathbb{R}, x\neq 1\}$. В системе координат прямую $x=1$ обозначим пунктиром.

Замечание. На числовой оси условие $x\neq 1$ задает «выколотую точку». На плоскости Oxy условие $x\neq 1$ задает «выколотую вертикальную прямую».

Заметим, что функция не является четной либо нечетной (говорят еще, что она является функцией общего вида).

2) Найдем точки пересечения с координатными осями.

$x = 0 \;\Rightarrow\; y = 1.$

$y = 0 \;\Rightarrow\; x = -1.$

Точки с координатами $(0;1)$ и $(-1;0)$ отметим в системе координат.

3) Проанализируем поведение нашей функции в окрестности точки $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1+0} y(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \left[\frac{2}{0_+}\right] = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 1-0} y(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \left[\frac{2}{0_+}\right] = +\infty.$$

Замечание. Запись $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \left[\frac{2}{0_+}\right]$ будет у нас означать, что при $x \to 1+0$ (то есть аргумент x стремится к 1 справа) числитель дроби стремится к 2, а знаменатель стремится к 0, оставаясь при этом положительным. Дробь при этом, очевидно, стремится к $+\infty$.

Замечание. В начале обучения информацию о том, что $\lim\limits_{x\to 1+0} y(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1-0} y(x) = +\infty$ бывает полезно отметить в системе координат следующим образом: поставить «очень рядом» с пунктиром $x = 1$ левее и правее в самом верху нарисованной системы координат две точки, что будет служить подсказкой в последствии, когда мы будем рисовать кривую (график функции).

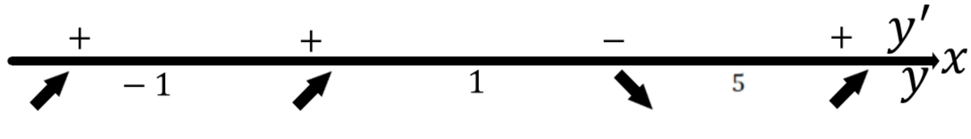
4) Проанализируем поведение производных.

А) Найдем первую производную.

$$y'(x) = \left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}\right)' = \frac{3(x+1)^2(x-1)^2-(x+1)^3\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)^2(3(x-1)-2(x+1)}{(x-1)^3} =$$
$$= \frac{(x+1^2(3x-3-2x-2)}{(x-1^3} = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}.$$

Итак, $y'(x) = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$.

Условие $y' = 0$ задает уравнение $\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5.$ Поэтому, проанализировав знаки $y'(x)$ методом интервалов, получаем следующую «картинку»:



Из «картинки» сразу следует, что при $x = -1$ локального экстремума нет, а при $x = 5$ функция имеет локальный минимум. Найдем вторую координату локального минимума: $y_{min} = \frac{(5+1)^3}{(5-1)^2} = \frac{6\cdot6\cdot6}{4\cdot4} = \frac{27}{2}$. Отметим точку $\left(5; \frac{27}{2}\right)$ локального минимума в системе координат.

Б) Найдем вторую производную.

$$y'' = \left(\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}\right)' = \frac{(2(x+1)(x-5)+(x+1)^2)(x-1)^3-(x+1)^2(x-5)\cdot3(x-1)^2}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)(2(x-5)+x+1)-3(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)(x-1)(3x-9)-3(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{3(x+1)(x^2-4x+3-(x^2-4x-5))}{(x-1)^4} = \frac{3\cdot(x+1)\cdot8}{(x-1)^4} = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}.$$

Итак, $y''(x) = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$.

Условие $y'' = 0$ задает уравнение $\frac{24(x+1)}{(x-1)^4} = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Проанализируем знаки $y''(x)$ методом интервалов и получим «картинку»:

Из «картинки» видно, что при $x = -1$ функция имеет точку перегиба. Найдем ее вторую координату: $x = -1 \Rightarrow y = 0$. Отметим точку перегиба в системе координат (она уже отмечена как точка пересечения с координатными осями).

5) Найдем уравнения наклонных асимптот.

Замечание. Иногда при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ пределы для (k_+, k_-) и для (b_+, b_-) получаются равными. Это означает, что при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ получается одна и та же асимптота, и оба предела можно считать одновременно. В этом случае именно так и получится:

$$k_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-2x^2+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

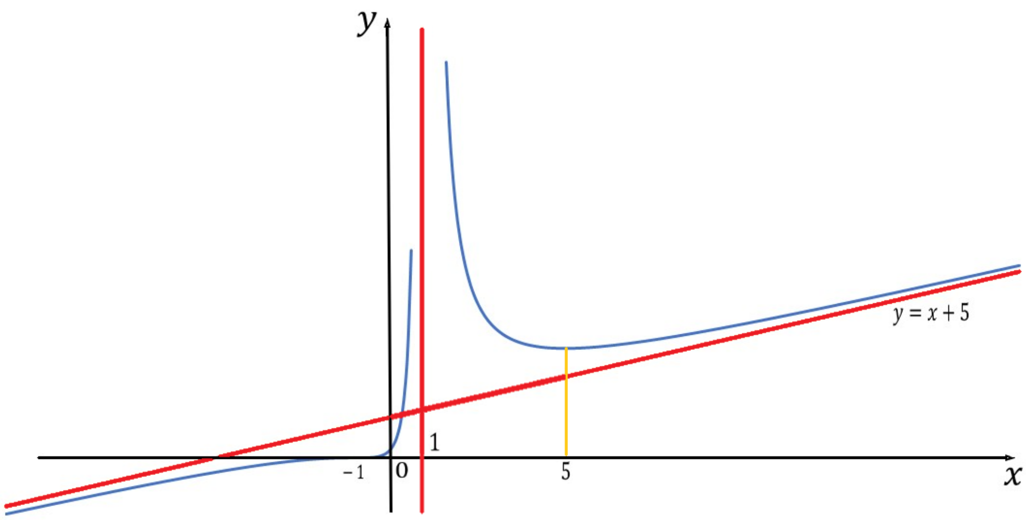
$$b_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty}(y(x) - k_{\pm}x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+3x^2+3x+1-x^3+2x^2-x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^2+2x+1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^2+2x+1}{x^2-2x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 5.$$

Это означает, что прямая $y = x + 5$ является наклонной асимптотой и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$. При вычислении пределов для $k_{\pm}$ и $b_{\pm}$ мы напомнили, как вычисляются пределы рациональных функций при $x \to \pm\infty$.

Итак, в системе координат уже проставлены точки пересечения с координатными осями, точки локальных экстремумов, точки перегиба, пунктиром отмечены вертикальная и наклонная асимптоты, проставлены точки, показывающие, как ведет себя кривая возле вертикальной асимптоты. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и выпуклости графика на различных промежутках. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным (у нас синим цветом изображен график функции, красным – вертикальная и наклонная асимптоты, желтым – точка локального минимума).



$$y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$$

Пример 3. Построить график функции $y = x^3 + 3|x|$ с полным исследованием.

Заранее приготовим систему координат Oxy с двумя дополнительными осями.

1) Функция $y = x^3 + 3|x|$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$ и является функцией общего вида.

Напомним, что $|x| = x$ при $x \geq 0$, и $|x| = -x$ при $x < 0$.

2) Найдем точки пересечения с координатными осями.

При $x \geq 0$ получаем, что $y = x^3 + 3x$. Поэтому

$x = 0 \Rightarrow y = 0$.

$y = 0 \Rightarrow x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Следовательно, при $x \geq 0$ будет только одна точка пересечения с осями координат – $(0; 0)$.

При $x < 0$ получаем, что $y = x^3 - 3x$. Поэтому

$y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$. Следовательно, при $x < 0$ тоже будет одна точка пересечения с осями координат: $\left(-\sqrt{3}; 0\right)$.

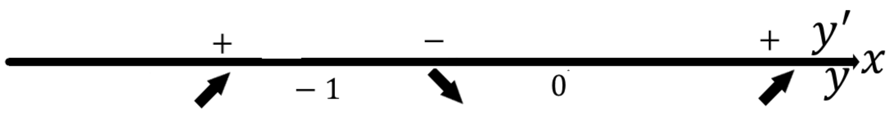
Отметим эти точки в приготовленной системе координат.

3) Так как область определения функции – вся действительная ось, то вертикальных асимптот не будет.

4) Найдем и проанализируем первую производную. При $x \geq 0$ производная функции $y'(x) = 3x^2 + 3$. Очевидно, что $y'(x) > 0\ \forall x \geq 0$, поэтому при $x \in [0; +\infty)$ наша функция возрастает.

При $x < 0$ производная $y'(x) = 3x^2 - 3$. Заметим, что $y'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 \Leftrightarrow x = -1$.

Проанализировав знак $y'(x)$ на интервалах $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; +\infty)$, получаем «картинку» для первой производной.



Из «картинки» сразу получаем, что точка $x = -1$ является точкой локального максимума, а точка $x = 0$ – точкой локального минимума. Посчитав вторую координату, отмечаем в системе координат точки $(-1; 2)$ (локальный максимум) и $(0; 0)$ (локальный минимум) функции $y = x^3 + 3|x|$.

Посчитаем вторую производную. При $x \geq 0$ вторая производная $y''(x) = 6x$. Поэтому $y''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Заметим, что $y''(x) > 0\ \forall x > 0$, следовательно, при $x > 0$ наша функция выпукла вниз.

Аналогично, при $x < 0$ вторая производная $y''(x) = 6x < 0\ \forall x < 0$, следовательно, при $x < 0$ наша функция выпукла вверх.

Получаем «картинку»:

Отсюда сразу следует, что точка $(0; 0)$ является точкой перегиба.

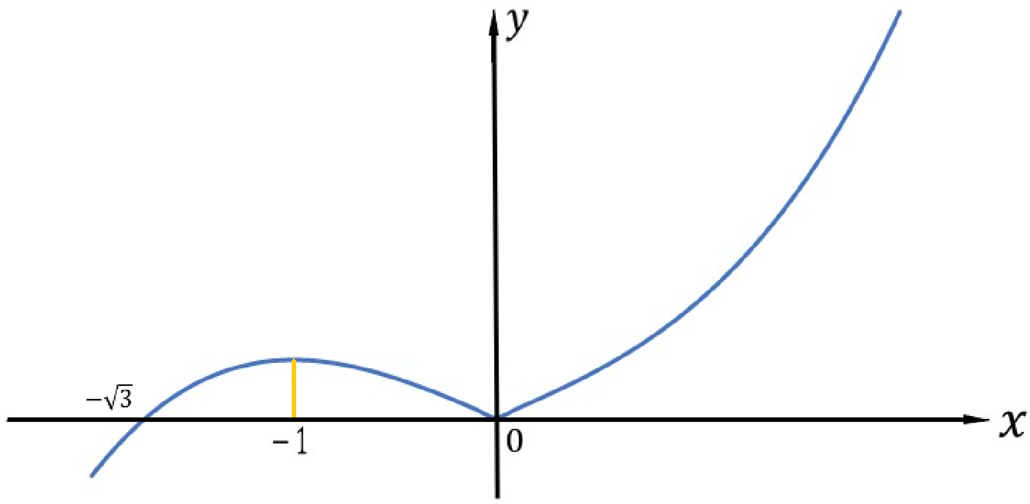
5) Заметим, что

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+3|x|}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(x^2+(\pm3))=\infty,$$

поэтому наклонных асимптот у графика нет.

Отметим, что при $x=0$ функция $y=x^3+3|x|$ не дифференцируема. Поэтому кривая, задающая график функции в точке $x=0$ «теряет гладкость» и «царапается».

Итак, в системе координат уже проставлены точки пересечения с координатными осями, точки локальных экстремумов, точка перегиба. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и выпуклости графика на различных промежутках. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным (у нас синим цветом изображен график функции, желтым – точка локального максимума).



$$\boldsymbol{y=x^3+3|x|}$$

Пример 4. Построить график функции $y=e^{2x-x^2}$ с полным исследованием.

Заранее приготовим систему координат Oxy с двумя дополнительными осями.

1) Функция $y = e^{2x-x^2}$ является показательной, определена при всех $x \in \mathbb{R}$ и является функцией общего вида.

2) Найдем точки пересечения с координатными осями.

Так как показательная функция принимает только положительные значения, то точек пересечения с осью Ox не будет, более того, график функции целиком будет лежать в верхней полуплоскости.

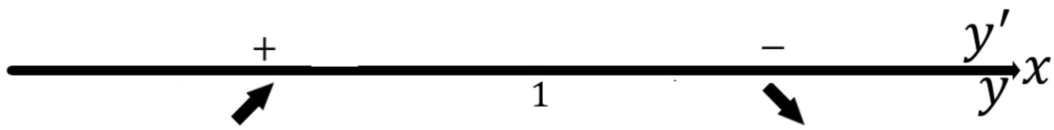
При $x = 0$ получаем, что $y = 1$. Точку $(0; 1)$ отметим в системе координат.

3) Так как область определения функции – вся действительная ось, то вертикальных асимптот не будет.

4) Найдем и проанализируем первую производную.

$$y'(x) = \left(e^{2x-x^2}\right)' = (2-2x)e^{2x-x^2}.$$

Решим уравнение $y'(x) = 0 \Leftrightarrow (2-2x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Проанализировав знак первой производной получаем «картинку».



Из «картинки» сразу видно, что точка $x = 1$ – точка локального максимума. При $x = 1$ значение $y(0) = e^0 = 1$. Поэтому точка с координатами $(1; e)$ – точка графика, в которой у функции локальный максимум (отмечаем ее в приготовленной системе координат).

Найдем и проанализируем вторую производную.

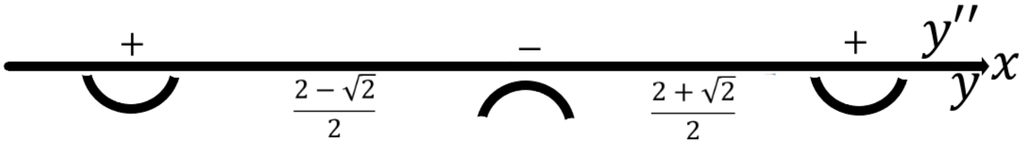
$y'' = (2-2x)^2 e^{2x-x^2} + (-2)e^{2x-x^2} =$

$= e^{2x-x^2}(4x^2 - 8x + 4 - 2) = e^{2x-x^2}(4x^2 - 8x + 2).$

Далее,

$y''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x-x^2}(4x^2 - 8x + 2) = 0 \Leftrightarrow (4x^2 - 8x + 2) = 0 \Leftrightarrow$ $2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}.$

Так как показательная функция принимает только положительные значения, то знак второй производной будет определяться только знаком квадратного трехчлена $4x^2 - 8x + 2$, и для второй производной мы получаем «картинку»:



Из «картинки» следует, что в точках графика функции с абсциссами $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ и $x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ будут находиться точки перегиба. Надо посчитать вторую координату этих точек. Сделаем это так. Сначала напомним, что абсциссы точек перегиба удовлетворяют уравнению

$$2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x - x^2 = \frac{1}{2}.$$

То есть при $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ и $x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ значение $2x - x^2 = \frac{1}{2}$. Следовательно, ординаты точек перегиба равны: $y = e^{2x-x^2} = e^{1/2} = \sqrt{e}$. Точки перегиба с координатами $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \sqrt{e}\right)$ и $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}; \sqrt{e}\right)$ отметим в подготовленной системе координат.

Замечание. Корни квадратных уравнений иногда (как, например, в данном случае) бывает полезно записывать в следующем виде: $x = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда сразу становится видно, что они симметричны относительно точки $x = 1$ и находятся на расстоянии $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$ от нее.

5) Найдем наклонные асимптоты. Заметим, что

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x-x^2}}{x} = 0.$$

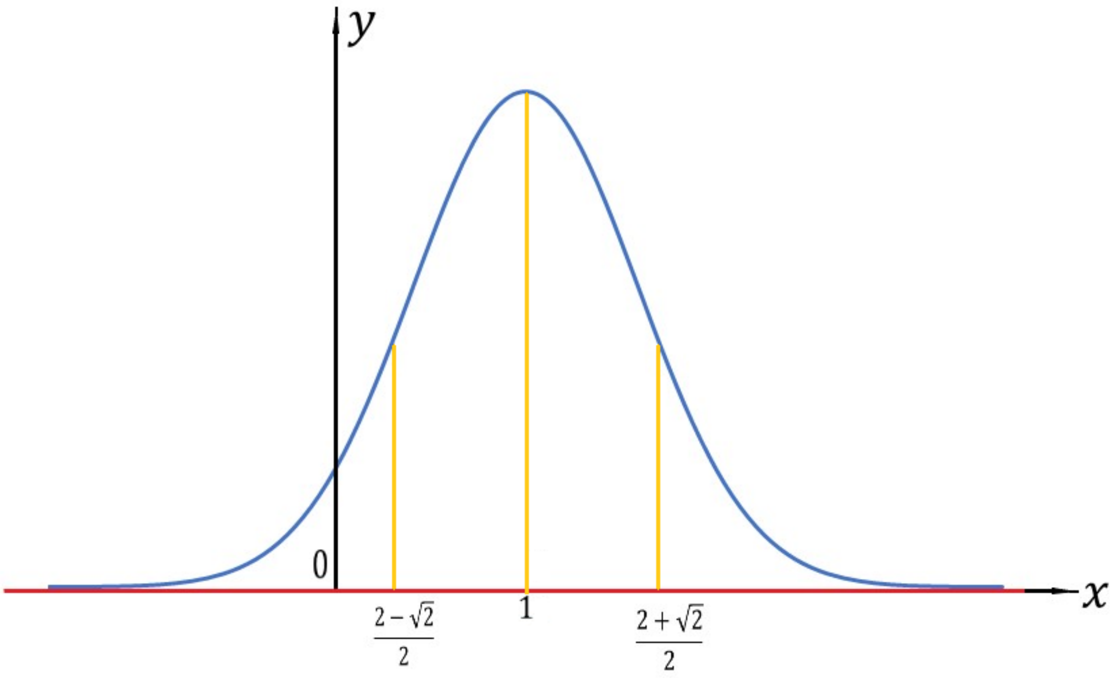
(так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x-x^2}\right) = 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \infty$.)

$$b_+ = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{2x-x^2} - 0 \cdot x\right) = 0.$$

Аналогично считаем такие же пределы при $x \to -\infty$. Следовательно, прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой для графика этой функции при $x \to \pm\infty$.

Итак, в системе координат уже проставлена точка пересечения с координатными осями, точка локального максимума, точки перегиба, горизонтальная асимптота. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и выпуклости графика на различных промежутках. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным (синим цветом изображен график функции, красным – горизонтальная асимптота $y = 0$, желтым – точка локального максимума и точки перегиба).

Заметим, что график этой функции симметричен относительно прямой $x = 1$ (это легко доказать, сделав замену $x' = x - 1$ и получив четную функцию относительно аргумента x').



$$\boldsymbol{y = e^{2x-x^2}}$$

Пример 5. Построить график функции $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ с полным исследованием.

Заранее приготовим систему координат Oxy с двумя дополнительными осями.

1) Областью определения функции $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ является $D_{y(x)} = (0; +\infty)$. Функция общего вида.

2) Найдем точки пересечения графика с координатными осями. Поскольку функция определена только при $x > 0$, то точек пересечения с осью Oy не будет. При $y = 0$ получаем, что $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Если $x = 1$, то $y = y(1) = 0$. Точку $(1; 0)$ отметим в системе координат.

3) Так как функция не определена при $x = 0$, то найдем предел $\lim_{x\to 0+0} y(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{-\infty}{0_+}\right] = -\infty$ (мы уже предлагали в таком случае чуть правее оси Oy в нижней части системы координат поставить точку).

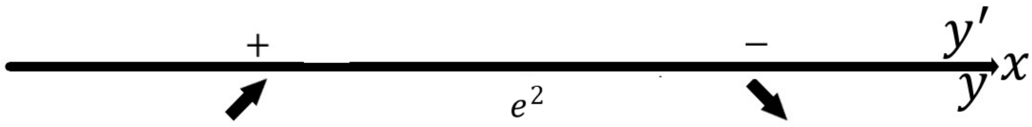
4) Проанализируем поведение производных.

А) Найдем первую производную.

$$y' = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot \ln x}{x} = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

Итак, $y' = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$.

Тогда $y' = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^2$. Анализируем знак y', получаем «картинку»



Следовательно, при $x = e^2$ функция имеет локальный максимум. Посчитаем ординату точки локального максимума: $y = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2\ln e}{e} = \frac{2}{e}$. Точку $\left(e^2; \frac{2}{e}\right)$ отметим в системе координат.

Б) Найдем вторую производную.

$$y'' = \left(\frac{2-\ln x}{2x^{3/2}}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}\cdot 2x^{3/2} - 2\cdot\frac{3}{2}x^{1/2}(2-\ln x)}{4x^3} = \frac{-2\sqrt{x} - 3\sqrt{x}(2-\ln x)}{4x^3} =$$
$$= \frac{-2-6+3\ln x}{4x^2\sqrt{x}} = \frac{3\ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}}.$$

Итак, $y'' = \frac{3\ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}}$.

Тогда $y'' = 0 \Leftrightarrow \frac{3\ln x-8}{4x^2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow 3\ln x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = e^{8/3}$. Анализируем знак y'', получаем «картинку»

Следовательно, при $x = e^{8/3}$ график функции имеет точку перегиба. Ордината этой точки равна $y = \frac{\ln e^{8/3}}{\sqrt{e^{8/3}}} = \frac{\frac{8}{3}\cdot\ln e}{\sqrt{e^{8/3}}} = \frac{8\cdot 1}{3e^{4/3}} = \frac{8}{3e^{4/3}}$. Точку перегиба $\left(e^{8/3}; \frac{8}{3e^{4/3}}\right)$ отметим в системе координат.

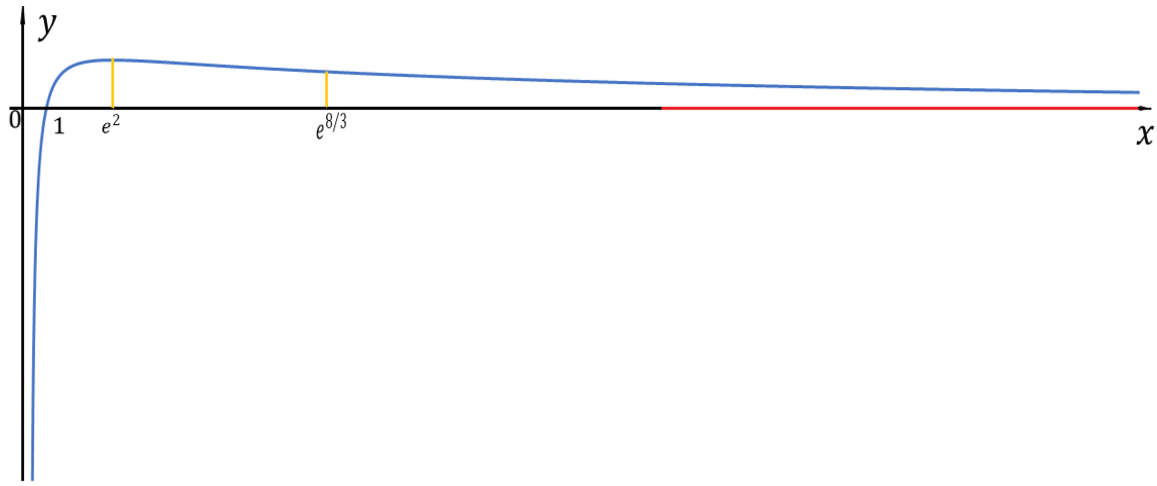
5) Найдем уравнение наклонной асимптоты. При подсчете пределов будем использовать правило Лопиталя – Бернулли.

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}x^{1/2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3x\sqrt{x}} = 0$$

$$b_+ = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = 0$ (ось Ox) является горизонтальной асимптотой для графика функции при $x \to +\infty$.

Итак, в системе координат уже проставлена точка пересечения с координатными осями, точка локального максимума, точки перегиба, вертикальная и горизонтальная асимптоты. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и ее выпуклости на различных промежутках. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным (синим цветом изображен график функции, красным – горизонтальная асимптота $y = 0$, желтым – точка локального максимума и точка перегиба).



$$\boldsymbol{y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}}$$

Пример 6. Построить график функции $y = x + \operatorname{arctg} x$ с полным исследованием.

Нарисуем систему координат Oxy с двумя дополнительными осями.

1) Область определения этой функции $D_{f(x)} = (-\infty; +\infty)$. Функция $y = x + \operatorname{arctg} x$ является нечетной, так как является суммой двух нечетных функций $y = x$ и $y = \operatorname{arctg} x$.

2) Найдем точки пересечения графика с координатными осями. Очевидно, что при $x = 0$ функция принимает значение $y = 0$. Если же $y = 0$, то относительно переменной x получаем уравнение $x + \operatorname{arctg} x = 0$. Значение $x = 0$, конечно же, является корнем этого уравнения. Но, может быть, есть и другие корни? На этом примере мы покажем, что не надо торопиться решать полученное непростое уравнение, так как ответ на вопрос о пересечении графика с координатными осями в дальнейшем будет получен гораздо проще. Точку (0;0) отметим в системе координат.

3) Так как область определения функции – вся действительная ось, то вертикальных асимптот не будет.

4) Проанализируем поведение производных.

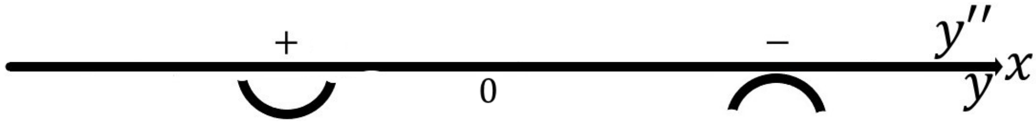
А) Найдем первую производную.

$y' = (x + \operatorname{arctg} x)' = 1 + \frac{1}{1+x^2}$. Заметим, что $y' > 0 \ \ \forall x \in (-\infty; +\infty)$. Это означает, во-первых, что $f(x)$ всюду возрастает, а во-вторых, что точка пересечения с осью Ox только одна (как хорошо, что мы не пытались искать другие!).

Б) Найдем вторую производную.

$y'' = (1 + (1+x^2)^{-1})' = -(1+x^2)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

Тогда $y'' = 0 \Leftrightarrow -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Анализируем знак y'' и получаем «картинку»



5) Найдем уравнения наклонных асимптот.

$k_{\pm} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1.$

Напомним, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

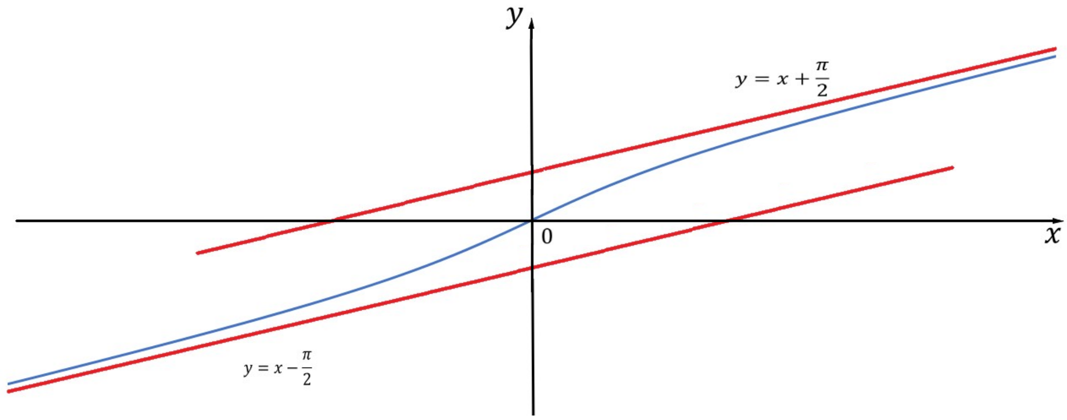
$b_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - k_+ x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x + \operatorname{arctg} x - x) = \frac{\pi}{2}$

$b_- = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - k_- x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x + \operatorname{arctg} x - x) = -\frac{\pi}{2}$.

Итак, получаем асимптоту $y = x + \frac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$ и асимптоту $y = x - \frac{\pi}{2}$ при $x \to -\infty$. Нарисуем эти асимптоты в системе координат пунктиром.

Итак, в системе координат уже проставлены точки пересечения с координатными осями, точка перегиба. Под системой координат помещена информация о возрастании функции и ее выпуклости на различных промежутках. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным (синим цветом изображен график функции, красным – наклонные асимптоты $y = x + \frac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$ и $y = x - \frac{\pi}{2}$ при $x \to -\infty$).

Замечание. Напомним, что функция $y = x + \operatorname{arctg} x$ является нечетной. Поэтому мы могли построить часть графика этой функции при $x \geq 0$, а затем сделать симметрию относительно начала координат. Обратите внимание на то, как непросто при этой симметрии преобразовывается асимптота.



$\boldsymbol{y = x + \operatorname{arctg} x}$

Пример 7. Построить график функции $y = xe^{1-x}$ с полным исследованием.

Нарисуем систему координат Oxy с двумя дополнительными осями.

1) Областью определения функции $y = xe^{1-x}$ является $D_{f(x)} = (-\infty; +\infty)$. Функция общего вида.

2) Найдем точки пересечения графика с координатными осями. $y = 0 \Leftrightarrow xe^{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (так как показательная функция принимает только положительные значения). Поэтому точка $(0; 0)$ – единственная точка пересечения графика функции с координатными осями.

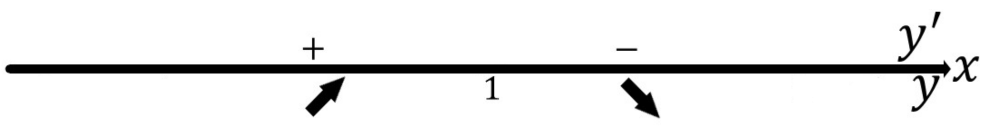
3) Так как область определения функции – вся действительная ось, то вертикальных асимптот не будет.

4) Проанализируем поведение производных.

А) Найдем первую производную.

$y' = (xe^{1-x})' = e^{1-x} + xe^{1-x}(-1) = (1-x)e^{1-x}$.

Тогда $y' = 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$, так как $e^{1-x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Проанализировав $y'(x)$, получим «картинку»



Тогда $x_{max} = 1 \Rightarrow y_{max} = 1 \cdot e^0 = 1 \Rightarrow (1; 1)$ – точка локального максимума.

Б) Найдем вторую производную.

$y'' = \left((1-x)e^{1-x}\right)' = -1 \cdot e^{1-x} + (1-x)e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x}(x-2)$.

Поэтому $y'' = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Анализируем знак y'' и получаем «картинку»

Возникает точка перегиба, причем,
$x_{\text{перегиба}} = 2 \Rightarrow y_{\text{перегиба}} = 2e^{-1} \Rightarrow (2; 2e^{-1})$.

5) Найдем уравнения наклонных асимптот.

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = 0$$

$$b_+ = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k_+x) = \lim_{x\to+\infty} (xe^{1-x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e\cdot x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{e}{e^x} = 0$$

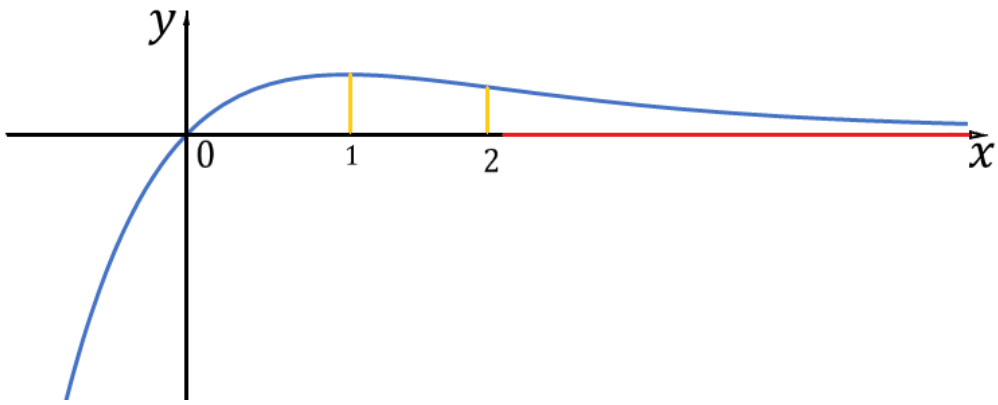
(воспользовались правилом Лопиталя – Бернулли). Таким образом, $y = 0$ – асимптота при $x \to +\infty$.

Далее,

$$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$$

Следовательно, при $x \to -\infty$ наклонной асимптоты нет.

Итак, в системе координат уже проставлена точка пересечения с координатными осями, точка локального максимума, точка перегиба, горизонтальная асимптота. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и ее выпуклости на различных промежутках. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным (синим цветом изображен график функции, красным – наклонная асимптота $y = 0$ при $x \to +\infty$, желтым – точка локального максимума и точка перегиба).



$\boldsymbol{y = xe^{1-x}}$

Пример 8. Построить график функции $y = \sin x$ с полным исследованием.

Нарисуем систему координат Oxy с двумя дополнительными осями.

1) Областью определения функции $y = \sin x$ является $D_{f(x)} = (-\infty; +\infty)$ – вся действительная ось. Функция $y = \sin x$ является нечетной и периодической с наименьшим периодом 2π. Поэтому можно построить график на отрезке $[0; \pi]$, затем сделать симметрию относительно начала координат (получим график функции на $[-\pi; \pi]$), а затем периодически продолжить на всю ось. Получится весь график функции $y = \sin x$. Но мы будем строить график функции $y = \sin x$ сразу на всей действительной оси.

2) Найдем точки пересечения графика с координатными осями.

$y = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Поэтому все точки с координатами $(\pi n; 0), n \in \mathbb{Z}$ будут точками пересечения графика с координатными осями.

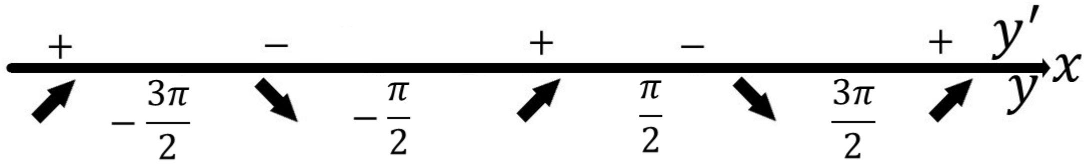
3) Так как область определения функции – вся действительная ось, то вертикальных асимптот не будет.

4) Проанализируем поведение производных.

А) Найдем первую производную. $y' = (\sin x)' = \cos x$.

Тогда $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Проанализировав $y'(x)$, получим «картинку»

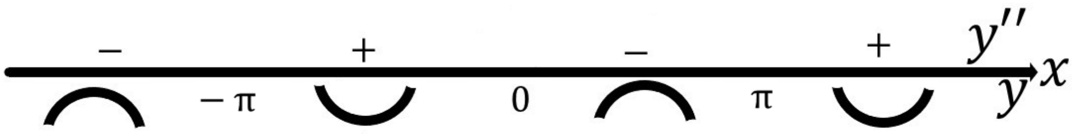


Поэтому, во-первых, $x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow y_{max} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \Rightarrow$ $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 1\right)$ – точки локального максимума функции $y = \sin x$.

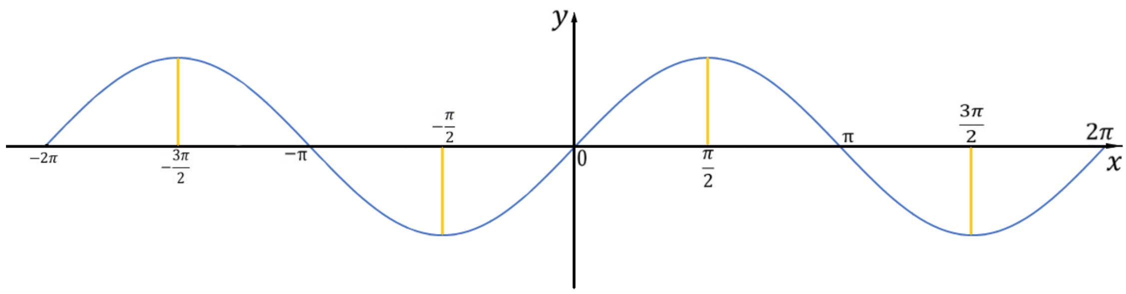
Во-вторых, $x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow y_{max} = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1 \Rightarrow$ $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; -1\right)$ – точки локального минимума функции $y = \sin x$.

Б) Найдем вторую производную. $y'' = -\sin x$.

Тогда $y'' = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Кроме того, $y'' = -\sin x < 0$ при $x \in [\pi n; \pi + \pi n], n \in \mathbb{Z}$, поэтому график $y = \sin x$ является выпуклым вверх на этих промежутках, и $y'' = -\sin x > 0$ при $x \in [-\pi + \pi n; \pi n], n \in \mathbb{Z}$, поэтому график $y = \sin x$ является выпуклым вниз на этих промежутках



Итак, в системе координат уже проставлены точки пересечения с координатными осями, точки локального максимума, точки локального минимума, точка перегиба. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и ее выпуклости на различных промежутках. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным (синим цветом изображен график функции, желтым – точки локальных экстремумов).



$\boldsymbol{y = \sin x}$

Пример 9. Построить график функции $\boldsymbol{y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}}$ с полным исследованием.

Нарисуем систему координат Oxy с двумя дополнительными осями.

1) Областью определения функции $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$ является $D_{f(x)} = (-\infty; +\infty)$. Функция общего вида.

2) Найдем точки пересечения графика с координатными осями.

$$x = 0 \Leftrightarrow y = 0;\ y = 0 \Leftrightarrow (x-5)\sqrt[3]{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 0.$$

Следовательно, $(0; 0)$ и $(5; 0)$ – точки пересечения графика с осями координат.

3) Так как область определения функции – вся действительная ось, то вертикальных асимптот не будет.

4) Проанализируем поведение производных.

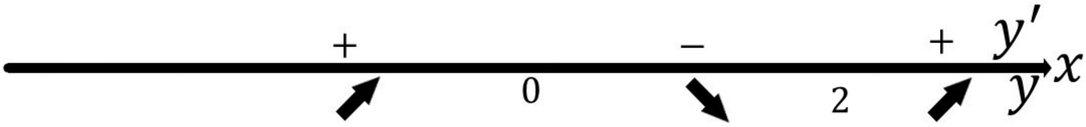
А) Найдем первую производную.

$$y' = \left((x-5)x^{2/3}\right)' = \left(x^{5/3} - 5x^{2/3}\right)' = \frac{5}{3}x^{2/3} - 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} =$$

$$= \frac{5x-10}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Итак, $y' = \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$.

Тогда $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Проанализировав поведение $y'(x)$, получим «картинку»



Сразу видно, что при $x = 2$ будет точка локального минимума, причем, $x_{min} = 2 \Rightarrow y_{min} = -3 \cdot \sqrt[3]{4} \Rightarrow (2; -3 \cdot \sqrt[3]{4})$ – точка локального минимума функции.

Кроме того, мы снова сталкиваемся с ситуацией, когда сама функция в некоторой точке (в данном случае $x = 0$) определена, а ее производная – не определена. Что это означает для функции $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$?

Найдем

$$\lim_{x \to 0+0} y'(x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} = \left[\frac{-10}{0_+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0-0} y'(x) = \lim_{x \to 0-0} \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} = \left[\frac{-10}{0_-}\right] = +\infty.$$

Это означает, что при $x \to 0$ тангенс угла наклона касательной стремится к ∞, то есть при $x = 0$ у кривой ***есть вертикальная касательная*** $x = 0$.

Кроме того, при $x = 0$ у кривой будет точка локального максимума (это видно из «картинки» для $y'(x)$. При этом, $x_{max} = 0 \Rightarrow y_{max} = 0 \Rightarrow (0; 0)$ – ее координаты.

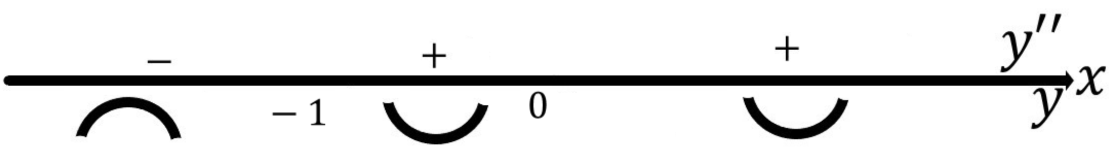
Б) Найдем вторую производную.

$$y'' = \frac{5}{3} \cdot \left((x-2)x^{-1/3}\right)' = \frac{5}{3} \cdot \left(x^{2/3} - 2x^{-1/3}\right)' =$$

$$\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}x^{-1/3} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-4/3}\right) = \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{x+1}{x\sqrt[3]{x}}\right).$$

Тогда $y'' = 0 \Leftrightarrow \frac{10}{9} \cdot \frac{x+1}{x\sqrt[3]{x}} = 0 \Leftrightarrow x = -1$, и не забываем, что при $x = 0$ вторая производная функции не определена.

Анализируем знак y'' и получаем «картинку».



Из «картинки» видно, что при $x = -1$ у графика функции будет точка перегиба. Причем, $x_{\text{перегиба}} = -1 \Rightarrow y_{\text{перегиба}} = -6 \Rightarrow (-1; -6)$ – ее координаты.

5) Исследуем наличие наклонных асимптот.

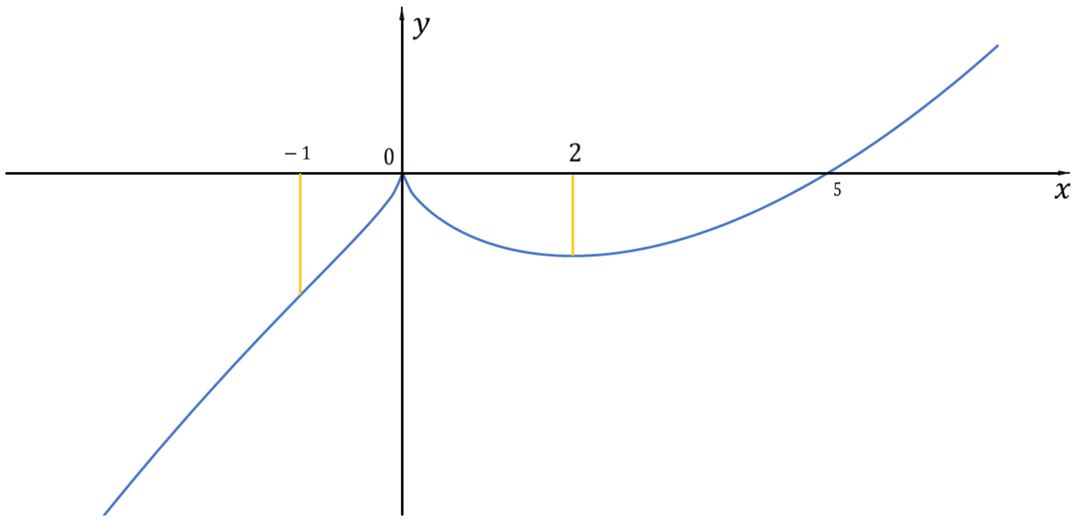
$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-5)\sqrt[3]{x^2}}{x} = +\infty$$

$$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-5)\sqrt[3]{x^2}}{x} = +\infty .$$

Следовательно, наклонных асимптот у графика этой функции нет.

6) Заметим, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y'(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} = +\infty$ $\Rightarrow$ тангенс угла наклона касательной при $x \to \pm\infty$ стремится к $+\infty$ $\Rightarrow$ угол наклона касательной стремится к $\frac{\pi}{2}$ при $x \to \pm\infty$.

Итак, в системе координат уже проставлены точки пересечения с координатными осями, точки локального максимума и минимума, точка перегиба. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и ее выпуклости на различных промежутках. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным (синим цветом изображен график функции, желтым – точка перегиба и точка локального минимума). Обратите внимание на то, что в точке $x = 0$, в которой значение функции существует, а производная не существует, график функции «царапается» (если же в точке существует и значение производной, то график в этой точке «гладкий»).



$$\boldsymbol{y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}}$$

Пример 10. Изобразить множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, с полным исследованием.

Будем считать, что числа a и b положительны.

Заметим, что множество точек, удовлетворяющих этому уравнению, не может быть задано графиком какой-то одной функции $y=f(x)$. Это пример построения функции, заданной неявно.

1) Заметим, что $\frac{x^2}{a^2}\geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2}\leq 1 \Leftrightarrow -b\leq y\leq b$. Аналогично, $\frac{y^2}{b^2}\geq 0 \Rightarrow b=1-\frac{x^2}{a^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}\leq 1 \Leftrightarrow -a\leq x\leq a$. Таким образом, точки кривой будут находиться только внутри прямоугольника $-a\leq x\leq a$, $-b\leq y\leq b$. Кроме того, уравнение является четным по обеим переменным, следовательно, кривая симметрична относительно обеих координатных осей. Ограничимся использованием симметрии кривой относительно оси Ox: построим график кривой в верхней полуплоскости (при $y\geq 0$) и сделаем симметрию относительно оси Ox.

2) Найдем точки пересечения графика с координатными осями. Если $x=0\Rightarrow 1-\frac{y^2}{b^2}=0\Leftrightarrow y=\pm b$. Аналогично, если $y=0\Rightarrow 1-\frac{x^2}{a^2}=0\Leftrightarrow x=\pm a$. Таким образом, в верхней полуплоскости (включая ось Ox) лежат следующие точки пересечения кривой с координатными осями: $(a;0)$, $(-a;0)$, $(0;b)$.

3) Вертикальных асимптот нет.

4) Проанализируем поведение производных.

А) Заметим, что в верхней полуплоскости уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ неявно задает функцию $y=y(x)$, которую в этом случае можно задать и в явном виде: $y=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, и затем найти производные функции $y=y(x)$. Такие примеры уже были разобраны. Поэтому нам будет интереснее считать, что функция задана неявно, и найти производную неявно заданной функции. Для этого продифференцируем по переменной x уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, получим

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'_x}{b^2}=0\Leftrightarrow b^2x+a^2yy'_x=0.$$

Следовательно, при $y\neq 0$ получим, что $y'_x=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$, и поэтому

$$y'_x=0\Leftrightarrow -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}=0\Leftrightarrow x=0,\, y\neq 0.$$

Но при $x=0$ в верхней полуплоскости $y=b$.

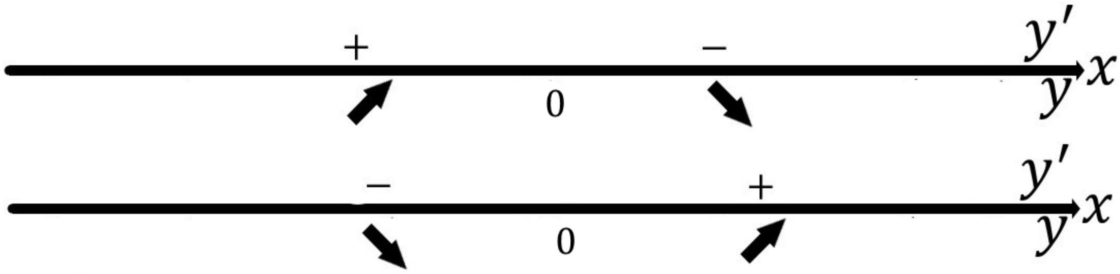
Заметим, кроме того, что $y'_x = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} < 0$ при $x > 0$ и $y > 0$ (то есть в первом квадранте функция $y = y(x)$ убывает) и $y'_x = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} > 0$ при $x < 0$ и $y > 0$ (то есть во втором квадранте функция $y = y(x)$ возрастает). Поэтому точка $(0; b)$ является точкой локального максимума.

Рассмотрим поведение y'_x в окрестностях точек $(a; 0)$ и $(-a; 0)$.

$$\lim_{x \to -a} y'(x) = \lim_{x \to -a, y \to 0} \left(-\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}\right) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \left[\frac{-a}{0_+}\right] = +\infty.$$

Это означает, что тангенс угла наклона касательной стремится к $+\infty$ при $x \to -a$ $\Rightarrow$ угол наклона касательной стремится к $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ касательная в точке $(-a; 0)$ является вертикальной прямой $x = -a$. Аналогично, касательная к кривой в точке $(a; 0)$ является вертикальной прямой $x = a$.

На следующих «картинках» изображена связь между знаком производной неявно заданной функции $y = y(x)$ и возрастанием-убыванием функции в верхней (первая ось) и нижней (вторая ось) полуплоскости.

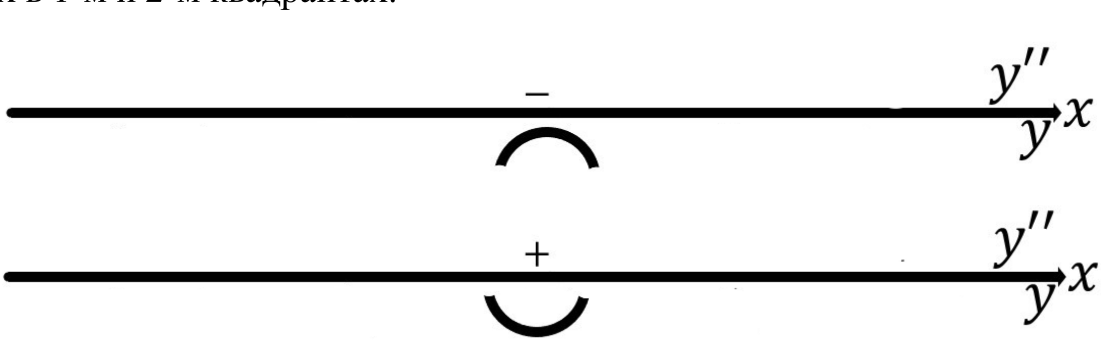


Б) Найдем вторую производную функции $y = y(x)$. Снова будем считать, что функция задана неявно.

$$y'' = (y'_x)'_x = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - x y'_x}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - x \cdot \left(-\frac{b^2}{a^2}\right) \cdot \frac{x}{y}}{y^2} =$$

$$= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 y^2 + b^2 x^2}{a^2 y^3} < 0$$

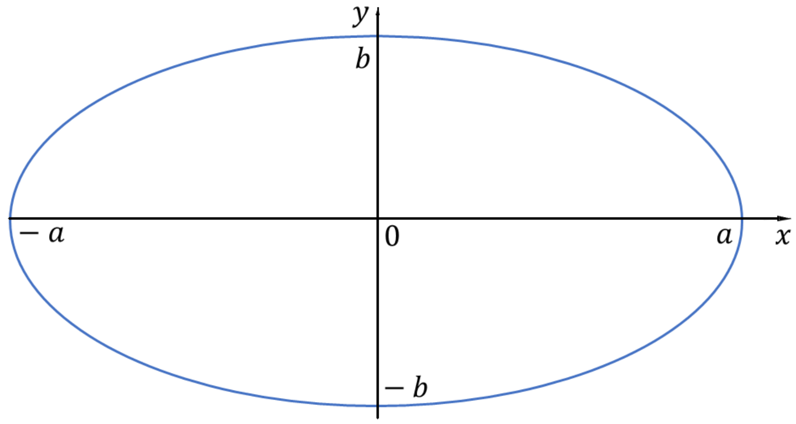
при всех $y > 0$ (то есть в верхней полуплоскости). Поэтому $y = y(x)$ выпукла вверх в 1-м и 2-м квадрантах.



На этих «картинках» изображена связь между знаком второй производной неявно заданной функции $y = y(x)$ и выпуклостью функции в верхней (первая ось) и нижней (вторая ось) полуплоскости.

Итак, в системе координат уже проставлены точки пересечения с координатными осями, точка локального максимума. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и ее выпуклости. Не забываем, что касательные в точках $(-a; 0)$ и $(a; 0)$ являются вертикальными прямыми $x = -a$ и $x = a$, соответственно. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным и получаем часть графика уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащую в верхней полуплоскости.

Делаем симметрию относительно оси Ox и получаем все множество точек, удовлетворяющих уравнению $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Пример 11. Построить график функции $y = x^x$ с полным исследованием.

Нарисуем систему координат Oxy с двумя дополнительными осями.

1) Областью определения показательно-степенной функции $y = x^x$ является множество всех $x > 0$.

2) Точек пересечения графика с координатными осями не будет, так как $x > 0$ (область определения показательно-степенной функции) и $y = x^x > 0$ (область значений показательно-степенной функции). В частности, мы получили, что график функции $y = x^x$ будет целиком находиться в 1-м квадранте.

3) Так как функция не определена при $x = 0$, то найдем предел

$$\lim_{x \to 0+0} y(x) = \lim_{x \to 0+0} x^x = \lim_{x \to 0+0} e^{\ln x^x} = \lim_{x \to 0+0} e^{x \ln x} = e^0 = 1.$$

Здесь мы воспользовались правилом Лопиталя – Бернулли при вычислении предела

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+0} x = 0.$$

Отметим «дыркой» точку с координатами $(0;1)$, так как точки графика функции $y = x^x$ здесь не будет.

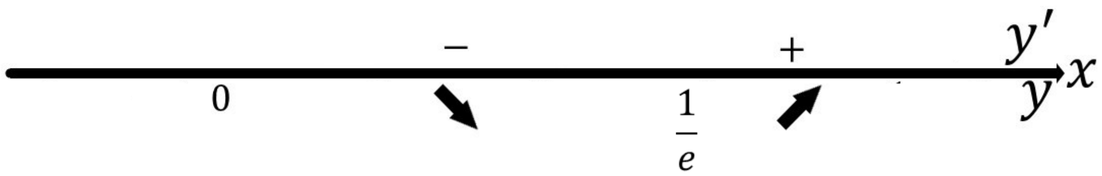
4) Проанализируем поведение производных.

А) Найдем первую производную. Воспользуемся правилом вычисления «логарифмической» производной.

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x \Rightarrow \frac{1}{y}\cdot y'_x = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow$$
$$y'_x = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

Итак, $y'_x = x^x(\ln x + 1)$.

Поэтому, $y'_x = 0 \Leftrightarrow x^x(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$. Проанализировав знаки $y'(x)$, получим «картинку»



Из «картинки» получаем, что при $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ функция имеет локальный минимум, причем, $x_{min} = x = e^{-1} \Rightarrow y_{min} = (e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-e^{-1}}$, то есть $\left(e^{-1}, e^{-e^{-1}}\right)$ – координаты точки локального минимума функции $y = x^x$.

В такой ситуации бывает полезно посчитать

$$\lim_{x\to 0_+} y'_x = \lim_{x\to 0_+} x^x(\ln x + 1) = [1\cdot(-\infty)] = -\infty.$$

Это означает, что при $x \to 0_+$ тангенс угла наклона касательной стремится к $-\infty$, следовательно, угол наклона касательной стремится к $\frac{\pi}{2}$.

Б) Найдем вторую производную функции.

$$y'' = (y'_x)'_x = (x^x)'(\ln x + 1) + x^x(\ln x + 1)' =$$
$$= x^x(\ln x + 1)(\ln x + 1) + x^x\cdot\frac{1}{x} = x^x\left((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x}\right) > 0 \quad \forall x \in (0;+\infty).$$

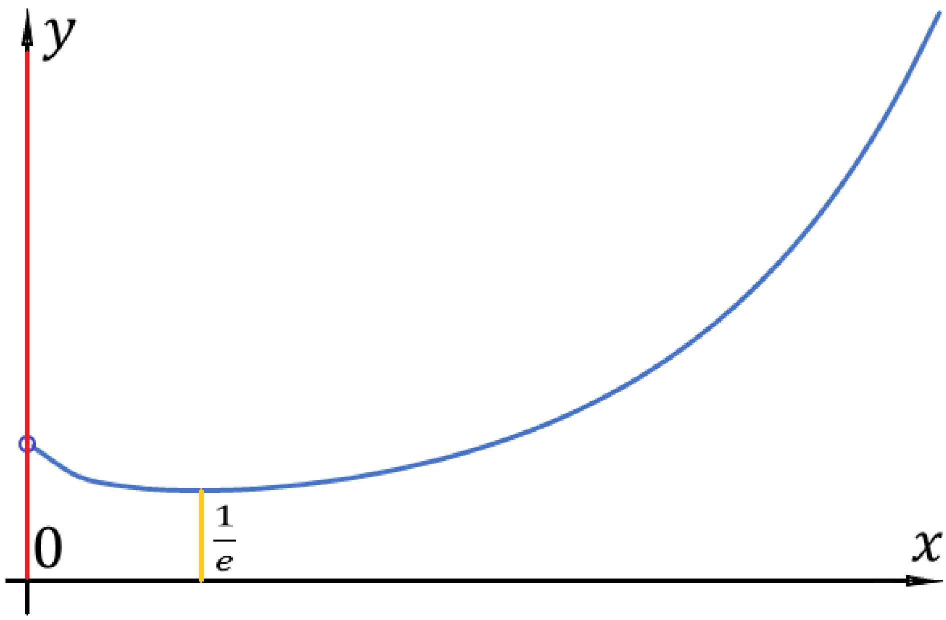
Следовательно, функция $y = x^x$ выпукла вниз на всей области определения.

5) Исследуем наличие наклонных асимптот.

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{x-1} = +\infty.$$

Следовательно, наклонных асимптот у графика функции нет.

Итак, в системе координат уже проставлена точка локального минимума. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и ее выпуклости. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным (синим цветом изображен график функции, желтым – точка локального минимума).



$$\boldsymbol{y = x^x}$$

В заключение рассмотрим пример построения графика функции, заданной параметрически. Отметим, что построение графиков функций, в которых y невозможно в явном виде выразить через x, является сложной задачей.

Пример 12. Построить график функции $\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}} \\ \boldsymbol{y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}} \end{cases}$ **с полным исследованием.**

Сначала построим с полным исследованием график каждой функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

Рассмотрим функцию $x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}$.

Нарисуем систему координат Otx с двумя дополнительными осями.

1) Областью определения функции $x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}$ является множество всех $t \neq 1$. Функция $x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}$ – рациональная функция общего вида.

2) Найдем точки пересечения с координатными осями. Заметим, что $x = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Следовательно, $(0; 0)$ – единственная точка пересечения с осями координат.

3) Так как функция не определена при $t = 1$, то найдем пределы

$$\lim_{t\to 1_+} \frac{t^2}{4(1-t)} = \left[\frac{1}{0_-}\right] = -\infty,$$

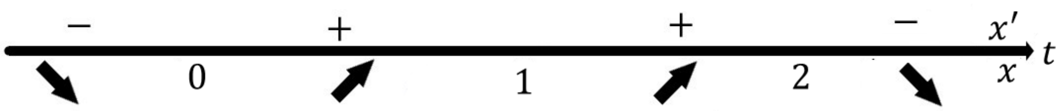
$$\lim_{t\to 1_-} \frac{t^2}{4(1-t)} = \left[\frac{1}{0_+}\right] = +\infty.$$

4) Проанализируем поведение производных.

А) Найдем первую производную функции $x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}$.

$$x'_t = \frac{2t\cdot 4(1-t) - t^2\cdot(-4)}{16(1-t)^2} = \frac{8t - 8t^2 + 4t^2}{16(1-t)^2} = \frac{2t - t^2}{4(1-t)^2} = \frac{t(2-t)}{4(1-t)^2}.$$

Проанализировав $x'(t)$, получим «картинку»

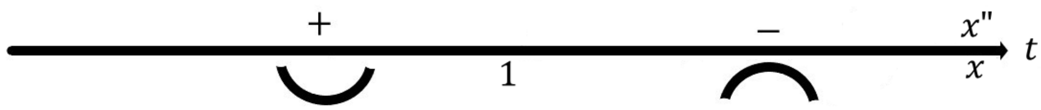


Из «картинки» видно, что $(2; -1)$ – точка локального максимума, а $(0; 0)$ – точка локального минимума функции $x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}$.

Б) Найдем вторую производную функции $x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}$.

$$x''_{tt} = (x'_t)'_t = \frac{(2-2t)\cdot(1-t)^2 + (2t-t^2)\cdot 8(1-t)}{16(1-t)^4} = \frac{(1-t)^2 + 2t - t^2}{2(1-t)^3} = \frac{1}{2(1-t)^3}.$$

Анализируем знак $x''(t)$ и получаем «картинку».



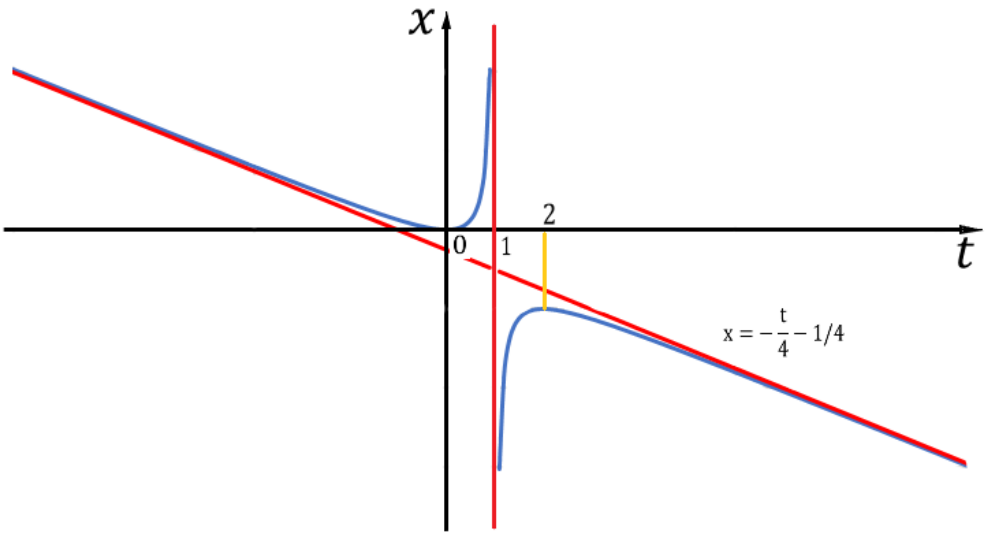
5) Исследуем наличие наклонных асимптот.

$$k_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{x(t)}{t} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t^2}{4t(1-t)} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t}{4(1-t)} = -\frac{1}{4}.$$

$$b_{\pm} = \lim_{t\to\pm\infty}(x(t) - k_{\pm}t) = \lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{t^2}{4(1-t)} + \frac{t}{4}\right) = \lim_{t\to\pm\infty}\frac{t^2+t-t^2}{4(1-t)} =$$
$$= \lim_{t\to\pm\infty}\frac{t}{4(1-t)} = -\frac{1}{4}.$$

Итак, прямая $x = -\frac{t}{4} - \frac{1}{4}$ является асимптотой для функции $x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}$ при $t \to \pm\infty$.

Итак, в системе координат уже проставлены точки пересечения с координатными осями, точки локального минимума и локального максимума, не забываем о вертикальной асимптоте $t = 1$, поведении функции $x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}$ в проколотой окрестности точки $t = 1$. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и ее выпуклости. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным, не забывая нарисовать пунктиром наклонную асимптоту (у нас график изображен синим цветом, вертикальная и наклонная асимптоты – красным цветом, точка локального максимума – желтым цветом).



$$\boldsymbol{x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}}$$

Рассмотрим функцию $y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}$.

Нарисуем систему координат Oty с двумя дополнительными осями.

1) Областью определения функции $y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}$ множество всех $t \neq 1$. $y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}$ – рациональная функция общего вида.

2) Найдем точки пересечения с координатными осями. Заметим, что $y = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Следовательно, $(0; 0)$ – единственная точка пересечения с осями координат.

3) Так как функция $y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}$ не определена при $t = 1$, то найдем пределы

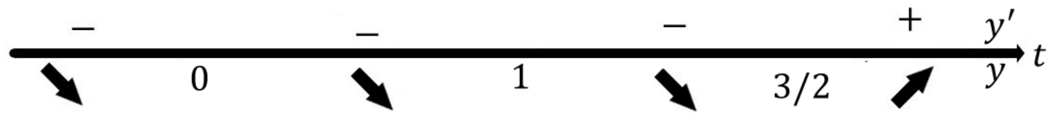
$$\lim_{t \to 1_+} \frac{t^3}{8(t-1)} = \left[\frac{1}{0_+}\right] = +\infty,$$
$$\lim_{t \to 1_-} \frac{t^3}{8(t-1)} = \left[\frac{1}{0_-}\right] = -\infty.$$

4) Проанализируем поведение производных функции $y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}$.

А) Найдем первую производную.

$$y'_t = \left(\frac{t^3}{8(t-1)}\right)' = \frac{3t^2 \cdot 8(t-1) - t^3 \cdot 8}{64(t-1)^2} = \frac{2t^3 - 3t^2}{8(t-1)^2} = \frac{t^2(2t-3)}{8(t-1)^2}.$$

Проанализировав $y'(t)$, получим «картинку»

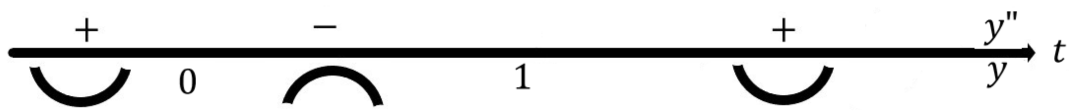


Из «картинки» видно, что у функции $y(t)$ есть точка локального минимума, которая имеет координаты $(t_{min}; y_{min}) = \left(\frac{3}{2}; \frac{27}{32}\right)$.

Б) Найдем вторую производную функции.

$$y''_{tt} = (y'_t)'_t = \left(\frac{2t^3 - 3t^2}{8(t-1)^2}\right)' = \frac{(6t^2 - 6t) \cdot 8(t-1)^2 - 16(t-1)(2t^3 - 3t^2)}{64(t-1)^4} =$$
$$= \frac{(3t^2 - 3t)(t-1) - (2t^3 - 3t^2)}{4(t-1)^3} = \frac{3t^3 - 3t^2 - 3t^2 + 3t - 2t^3 + 3t^2}{4(t-1)^3} = \frac{t^3 - 3t^2 + 3t}{4(t-1)^3} = \frac{t(t^2 - 3t + 3)}{4(t-1)^3}.$$

Анализируем знак y''_{tt} и получаем «картинку».



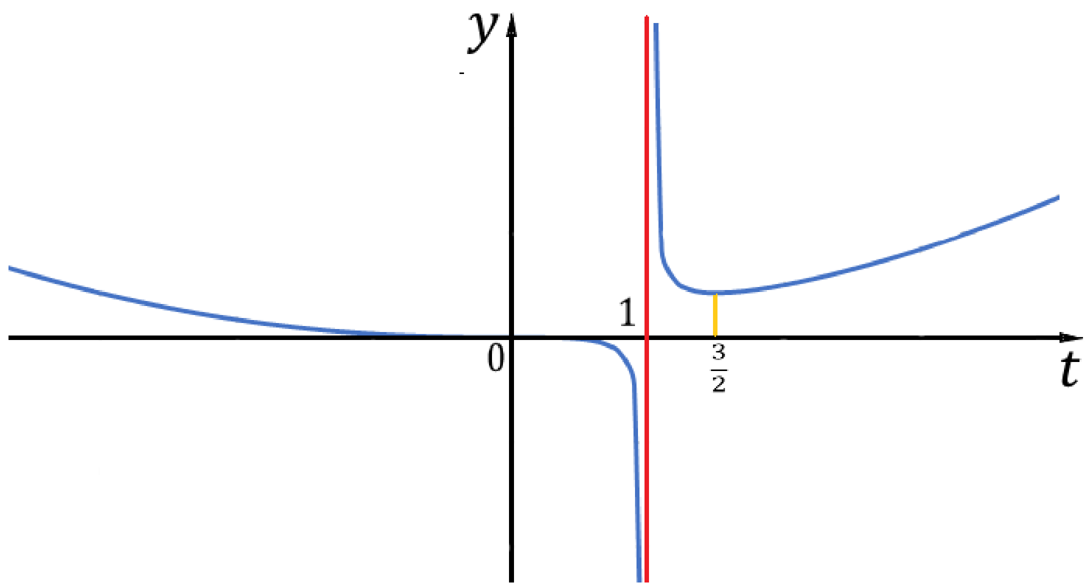
Из «картинки» видно, что график функции $y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}$ имеет точку перегиба, координаты которой $(0; 0)$ (напомним, что при $t = 1$ функция не определена).

5) Исследуем наличие наклонных асимптот.

$$k_{\pm} = \lim_{t\to\pm\infty}\frac{y(t)}{t} = \lim_{t\to\pm\infty}\frac{t^3}{8t(t-1)} = \lim_{t\to\pm\infty}\frac{t}{8\left(1-\frac{1}{t}\right)} = \pm\infty.$$

Следовательно, у графика функции $y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}$ наклонных асимптот нет.

Итак, в системе координат уже проставлена точка пересечения с координатными осями, точка локального минимума, не забываем о вертикальной асимптоте $t = 1$, поведении функции в проколотой окрестности точки $t = 1$. Под системой координат помещена информация о возрастании-убывании функции и ее выпуклости. Аккуратно рисуем кривую, которая соответствует всем полученным данным (у нас график изображен синим цветом, вертикальная асимптота – красным цветом, точка локального минимума – желтым цветом).



$$\boldsymbol{y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}}$$

Для построения графика функции $y = y(x)$, заданной параметрически, нам потребуется найти $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$.

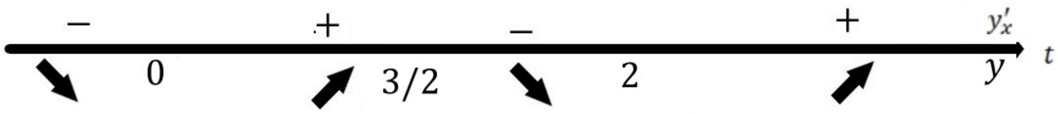
$$y'_x(t) = \frac{y'_x(t)}{x'_t} = \frac{t^2(2t-3)}{8(t-1)^2}\cdot\frac{4(t-1)^2}{t(2-t)} = -\frac{t(2t-3)}{2(t-2)}$$

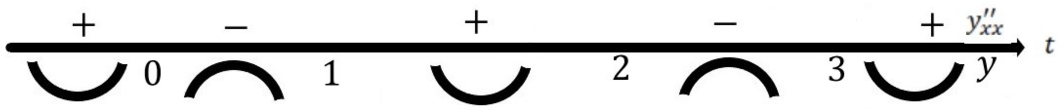
$$y''_{xx}(t)=\frac{y''_{tt}x'_t-x''_{tt}y'_t}{\left(x'_t\right)^3}=\frac{\frac{t\left(t^2-3t+3\right)}{4(t-1)^3}\cdot\frac{t(2-t)}{4(1-t)^2}-\frac{1}{2(1-t)^3}\cdot\frac{t^2(2t-3)}{8(t-1)^2}}{\frac{t^3(2-t)^3}{64(1-t)^6}}=$$

$$=4(t-1)\cdot\frac{t^2(t^2-3t+3)(2-t)+t^2(2t-3)}{t^3(2-t)^3}=\frac{4(t-1)(-t^3+3t^2-3t+2t^2-6t+6+2t-3)}{t(2-t)^3}=$$

$$=\frac{4(t-1)(t^3-5t^2+7t-3)}{t(t-2)^3}=\frac{4(t-1)(t-1)^2(t-3)}{t(t-2)^3}=\frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3}.$$

Итак, $y'_x(t)=-\frac{t(2t-3)}{2(t-2)}$ и $y''_{xx}(t)=\frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3}$. Проанализируем поведение $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$ и получим «картинки» (обратите внимание, что рассматриваются оси Ot и функции $y'_x(t)$, $y''_{xx}(t)$ аргумента t).





Заметим, что на каждой «картинке» возникли «характерные» значения аргумента t, в которых меняются знаки функций $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$ (что будет отражаться на поведении рассматриваемой функции как функции $y=y(x)$).

Рассмотрим t на каждом полученном промежутке отдельно. Нарисуем систему координат Oxy, в которую будем заносить получаемую информацию по построению графика функции $y=y(x)$.

При $t\in(-\infty;0]$ получим, что $t\colon -\infty\nearrow 0 \Longrightarrow x\colon +\infty\searrow 0 \Longrightarrow y\colon +\infty\searrow 0$. Так как $y'_x(t)=-\frac{t(2t-3)}{2(t-2)}>0$ при $t\in(-\infty;0)$, то при $t\in(-\infty;0]$ (в это время $x\in[0;+\infty)$) функция $y=y(x)$ возрастает. Так как $y''_{xx}(t)=\frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3}>0$ при $t\in(-\infty;0)$, то функция $y=y(x)$ выпукла вниз.

Заметим, что у этой части графика функции $y=y(x)$ нет наклонной асимптоты. Действительно (учитываем, что $x\to+\infty$, когда $t\to-\infty$),

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{t^3\cdot4(t-1)}{8(t-1)t^2}\right)=\lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{4(t-1)}{8\left(1-\frac{1}{t}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{(1-t)}{2\left(1-\frac{1}{t}\right)}\right)=+\infty.$$

Просуммировав всю полученную информацию, изобразим эту часть кривой в системе координат Oxy, отметив цифрой (1)).

При $t \in (0;1)$ получим, что $t\colon 0 \nearrow 1 \Longrightarrow x\colon 0 \nearrow +\infty \Longrightarrow\ y\colon 0 \searrow -\infty$. Так как $y'_x(t) = -\frac{t(2t-3)}{2(t-2)} < 0$ при $t \in (0;1)$, то при $t \in (0;1)$ (в это время $x \in (0;+\infty)$) функция $y = y(x)$ убывает. Так как $y''_{xx}(t) = \frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3} < 0$ при $t \in (0;1)$ ($x \in (0;+\infty)$), то функция $y = y(x)$ выпукла вверх.

Покажем, что у этой части графика функции $y = y(x)$ есть наклонная асимптота. Действительно,

$$k = \lim_{t\to 1_-} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 1_-} \left(-\frac{t^3 \cdot 4(t-1)}{8(t-1)t^2}\right) = \lim_{t\to 1_-} \left(-\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{t\to 1_-} (y(t) - kx(t)) = \lim_{t\to 1_-} \left(\frac{t^3}{8(t-1)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{4(1-t)}\right) = \frac{1}{8}\cdot \lim_{t\to 1_-} \frac{t^2(t-1)}{t-1} = \frac{1}{8}.$$

Итак, получаем, что прямая $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{8}$ является наклонной асимптотой для графика функции $y = y(x)$ при $x \to +\infty$ ($t \to 1_-$).

Просуммировав всю полученную информацию, изобразим эту часть кривой $y = y(x)$ в системе координат Oxy, отметив цифрой (2)).

При $t \in \left(1;\frac{3}{2}\right)$ получим, что $t\colon 1 \nearrow \frac{3}{2} \Longrightarrow x\colon -\infty \nearrow -\frac{9}{8} \Longrightarrow y\colon +\infty \searrow \frac{27}{32}$.

Так как $y'_x(t) = -\frac{t(2t-3)}{2(t-2)} < 0$ при $t \in \left(1;\frac{3}{2}\right)$, то при $t \in \left(1;\frac{3}{2}\right)$ $\left(\text{в это время } x \in \left(-\infty;-\frac{9}{8}\right)\right)$ функция $y = y(x)$ убывает.

Так как $y''_{xx}(t) = \frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3} > 0$ при $t \in \left(1;\frac{3}{2}\right)$, то функция $y = y(x)$ выпукла вниз.

Покажем, что у этой части графика функции $y = y(x)$ также есть наклонная асимптота. Действительно,

$$k = \lim_{x\to -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 1_+} \left(-\frac{t^3 \cdot 4(t-1)}{8(t-1)t^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to -\infty} (y(t) - kx(t)) = \lim_{t\to 1_+} \left(\frac{t^3}{8(t-1)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{4(1-t)}\right) = \frac{1}{8}\cdot \lim_{t\to 1_+} \frac{t^2(t-1)}{t-1} = \frac{1}{8}.$$

Итак, получаем, что прямая $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{8}$ является наклонной асимптотой для графика функции $y = y(x)$ при $x \to -\infty$ ($t \to 1_+$).

Просуммировав всю полученную информацию, изобразим эту часть кривой в системе координат Oxy, отметив цифрой (3)).

При $t \in \left(\frac{3}{2};2\right)$ получим, что $t\colon \frac{3}{2} \nearrow 2 \Longrightarrow x\colon -\frac{9}{8} \nearrow -1 \Longrightarrow y\colon \frac{27}{32} \nearrow 1$.

Так как $y'_x(t) = -\frac{t(2t-3)}{2(t-2)} > 0$ при $t \in \left(\frac{3}{2};2\right)$, то при $t \in \left(\frac{3}{2};2\right)$

$\left(\text{в это время } x \in \left(-\frac{9}{8}; -1\right)\right)$ функция $y = y(x)$ возрастает.

Так как $y''_{xx}(t) = \frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3} > 0$ при $t \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$ $\left(\text{тогда } x \in \left(-\frac{9}{8}; -1\right)\right)$, то функция $y = y(x)$ на этом участке выпукла вниз.

Просуммировав всю полученную информацию, изобразим эту часть кривой в системе координат Oxy, отметив цифрой (4)).

Заметим, что при $t = \frac{3}{2}$ $\left(\text{тогда } x = -\frac{9}{8}\right)$ функция $y'_x(t)$ «меняет знак» с «−» на «+». Поэтому при $x = -\frac{9}{8}$ наша функция $y = y(x)$ имеет локальный минимум.

При $t \in [2; 3)$ получим, что t: $2 \nearrow 3 \Longrightarrow x$: $-1 \searrow -\frac{9}{8} \Longrightarrow y$: $1 \nearrow \frac{27}{16}$.

Так как $y'_x(t) = -\frac{t(2t-3)}{2(t-2)} < 0$ при $t \in (2; 3)$, то при $t \in (2; 3)$ $\left(\text{в это время } x \in \left(-\frac{9}{8}; -1\right)\right)$ функция $y = y(x)$ убывает.

Так как $y''_{xx}(t) = \frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3} < 0$ при $t \in (2; 3)$ $\left(x \in \left(-\frac{9}{8}; -1\right)\right)$, то функция $y = y(x)$ на этом участке выпукла вверх.

Просуммировав всю полученную информацию, изобразим эту часть кривой в системе координат Oxy, отметив цифрой (5)).

Заметим, что при $t = 2$ (тогда $x = -1$) функция $y = y(x)$ определена, но производная $y'_x(t)$ не определена. Поэтому рассмотрим

$$\lim_{x \to -1_-} y'_x(t) = \lim_{t \to 2_-} \left(-\frac{t(2t-3)}{2(t-2)}\right) = \left[-\frac{2}{0_-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1_-} y'_x(t) = \lim_{t \to 2_+} \left(-\frac{t(2t-3)}{2(t-2)}\right) = \left[-\frac{2}{0_+}\right] = -\infty.$$

Это означает, что при $x \to -1$ (когда $t \to 2$) тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = y(x)$ стремится к ∞, то есть угол наклона касательной стремится к $\frac{\pi}{2}$, то есть прямая $x = -1$ является вертикальной касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке $(-1; 1)$.

При $t \in [3; +\infty)$ получим, что t: $3 \nearrow +\infty \Longrightarrow x$: $-\frac{9}{8} \searrow -\infty \Longrightarrow y$: $\frac{27}{16} \nearrow +\infty$.

Так как $y'_x(t) = -\frac{t(2t-3)}{2(t-2)} < 0$ при $t \in [3; +\infty)$, то при $t \in (3; +\infty)$ $\left(\text{в это время } x \in \left(-\infty; -\frac{9}{8}\right)\right)$ функция $y = y(x)$ убывает.

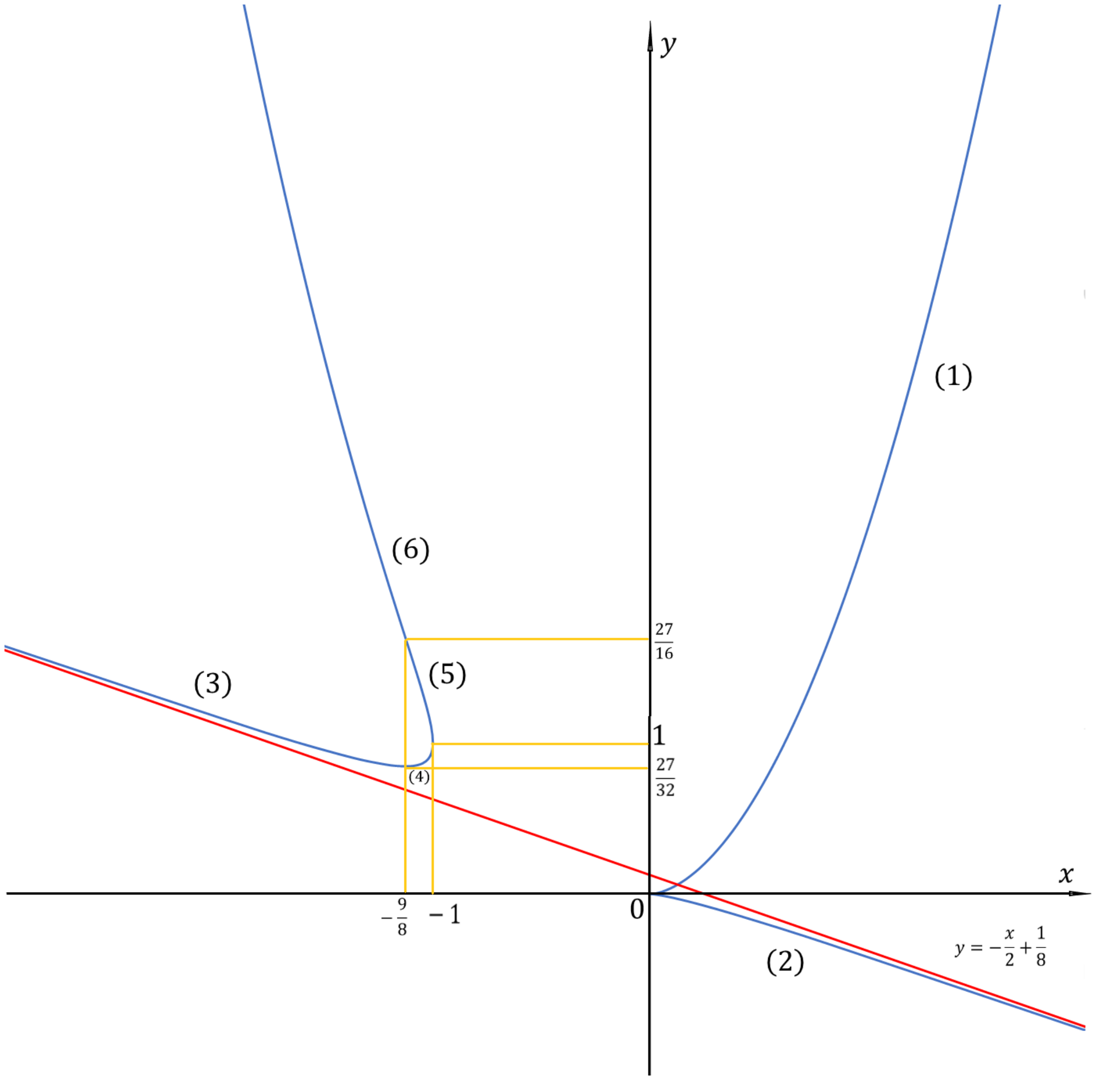
Так как $y''_{xx}(t) = \frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3} > 0$ при $t \in [3; +\infty)$, то функция $y = y(x)$ выпукла вниз.

Покажем, что у этой части графика функции $y = y(x)$ нет наклонной асимптоты. Действительно (учитываем, что $x \to -\infty$, когда $t \to +\infty$),

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{t^3 \cdot 4(t-1)}{8(t-1)t^2}\right) = -\infty.$$

Просуммировав всю полученную информацию, изобразим эту часть кривой в системе координат Oxy, отметив цифрой (6)).

Кроме того, при $t = 3$ $\left(\text{в это время } x = -\frac{9}{8}\right)$ вторая производная $y''_{xx}(t) = \frac{4(t-1)^3(t-3)}{t(t-2)^3}$ «меняет знак» с «$-$» на «$+$». Это означает, что точка с координатами $\left(-\frac{9}{8}; \frac{27}{16}\right)$ является точкой перегиба для графика функции $y = y(x)$.



$$\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}} \\ \boldsymbol{y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}} \end{cases}$$

Все эти шесть кривых дают полный график параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)} \\ y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)} \end{cases}$$

в системе координат Oxy (у нас график изображен синим цветом, наклонная асимптота – красным цветом, точка перегиба, точка локального минимума и точка, в которой график функции имеет вертикальную касательную, – желтым цветом).

Вывод. Поскольку существует много кривых, которые не являются графиками функций $y = y(x)$ или $x = x(y)$, а задаются уравнениями $\varphi(x; y) = 0$, параметрически, в полярных координатах и т.д., то, конечно, надо изучать методы их исследования.

График изотермы газа Ван-дер-Ваальса

Построим график изотермы газа Ван-дер-Ваальса, соответствующей критической температуре. Уравнение имеет вид:

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}, \tag{1}$$

где p – давление, T – температура, V – объем; R – универсальная газовая постоянная; $a, b > 0$ индивидуальные параметры.

Считаем температуру постоянной, имеющей критическое значение, которое будет указано ниже. Тогда уравнение задает p как функцию от одной переменной V, $V > b$. Критическая точка газа определяется уравнениями

$$\begin{cases} p' = 0 \\ p'' = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где производные взяты по переменной V.

Дифференцируем равенство (1):

$$p' = \frac{-RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}$$

$$p'' = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4}.$$

Система (2) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{2a}{V^3} = \frac{RT}{(V-b)^2} \\ \frac{6a}{V^4} = \frac{2RT}{(V-b)^3} \end{cases} \tag{3}$$

откуда находим:

$$2 = \frac{3(V-b)}{V}, \quad 2V = 3V - 3b, \quad V = 3b. \tag{4}$$

Это – величина критического объема.

Критическую температуру находим из равенства $p = 0$, то есть:

$$27b^3RT = 2a \cdot 4b^2, \quad T = \frac{8a}{27bR}. \tag{5}$$

Итак, построим график изотермы для T, принимающей критическое значение (5). Функция p непрерывна при $V > b$. При стремлении $V \to b + 0$ имеем: $p \to +\infty$, что означает, что у графика есть вертикальная асимптота. Производная p' найдена выше, она равна 0, если выполнено первое из уравнений (3),

$$\frac{2a}{V^3} = \frac{RT}{(V-b)^2}, \text{ откуда } \frac{2a}{V^3} = \frac{R \cdot ba}{27b \cdot R \cdot (V-b)^2},$$

что после преобразования дает:

$$4V^3 - 27bV^2 + 54b^2V - 27b^3 = 0. \tag{6}$$

Один корень производной, $V = 3b$, уже найден в (4), поэтому уравнение (6) легко преобразовать к виду:

$$(V - 3b)^2 \cdot (4V - 3b) = 0.$$

В области $V > b$ лежит только точка $V = 3b$, в которой производная знака не меняет, в ней нет экстремума.

Нули второй производной ищем из второго уравнения (3),

$$\frac{6a}{V^4} = \frac{2RT}{(V-b)^3},$$

или, учитывая (5),

$$8V^4 = 81b(V - b)^3.$$

Делим обе части этого уравнения на b^4 и обозначаем $z = \frac{V}{b}$.

Тогда

$$8z^4 = 81(z - 1)^3.$$

Здесь также очевиден корень $z = 3$ (соответствующий точке $V = 3b$).

Для того, чтобы выяснить вид графика вблизи критической точки, вычислим третью производную p''',

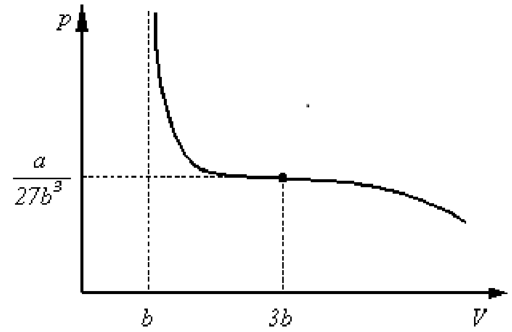
$$p''' = -\frac{6RT}{(V-b)^4} + \frac{24a}{V^5},$$

и подставим в неё найденные значения V и T из равенств (4) и (5):

$$p''' = -\frac{6R \cdot 8a}{27bR \cdot (2b)^4} + \frac{24a}{(3b)^5} = \frac{a}{b^5}\left(-\frac{6 \cdot 8}{27 \cdot 2^4} + \frac{24}{3^5}\right) = \frac{a}{b^5}\left(-\frac{1}{9} + \frac{8}{81}\right) < 0. \tag{7}$$

Неравенство (7) означает, что в точке $V = 3b$, отвечающей температуре (5), график функции $p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$ имеет перегиб.

Таким образом, получаем, что график имеет вид



Примечание: более подробно с этой задачей и, главное, с основными понятиями физической химии, связанными с ней, можно ознакомиться по книге:

Основы физической химии. Теория и задачи: Учеб. пособие для вузов / В.В.Ерёмин, С.И. Каргов, И.А. Успенская, Н.Е. Кузьменко, В.В. Лунин. - М.: Изд-во «Экзамен», 2005, (Серия «Классический университетский учебник»).

График межмолекулярного потенциала Леннард-Джонса

Построим график межмолекулярного потенциала Леннард-Джонса, задаваемого формулой

$$U(r) = U_0\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6\right), \quad r > 0.$$

Это – непрерывная в области определения функция. При $r \to +0$ имеем: $U(r) \to +\infty$, поэтому прямая $r = 0$ является вертикальной асимптотой графика. Если $r \to +\infty$, то $U(r) \to 0$ снизу, прямая $U = 0$ – горизонтальная асимптота. Величина $U(r)$ обращается в нуль при $\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 = 2$, то есть при $r = \frac{r_0}{\sqrt[6]{2}}$, и для $r > \frac{r_0}{\sqrt[6]{2}}$ выполняется неравенство $U(r) < 0$, а для $0 < r < \frac{r_0}{\sqrt[6]{2}}$ – неравенство $U(r) > 0$.

Производная функции $U(r)$ равна

$$U'(r) = U_0\left(-\frac{12}{r_0}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{13} + \frac{12}{r_0}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^7\right) = \frac{12U_0}{r_0}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^7\cdot\left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^6\right),$$

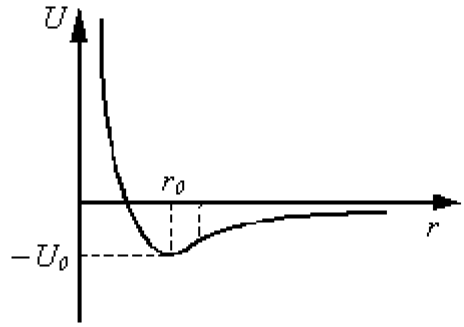
откуда следует, что при $r < r_0$ выполняется $U'(r) < 0$, при $r = r_0$ имеем $U'(r_0) = 0$ и $U'(r) > 0$ при $r > r_0$, так что в точке $r = r_0$ функция достигает своего наименьшего значения, равного $-U_0$.

Вторая производная $U''(r)$ равна

$$U''(r) = U_0\left(\frac{12\cdot 13}{r_0^2}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{14} - \frac{12\cdot 7}{r_0^2}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{8}\right) = \frac{12\cdot U_0}{r_0^2}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{8}\cdot\left(13\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6} - 7\right),$$

откуда $U''(r) < 0$ при $r > r_0\cdot\sqrt[6]{\frac{13}{7}}$, $U''(r) = 0$ при $r = r_0\cdot\sqrt[6]{\frac{13}{7}}$ и $U''(r) > 0$ при $0 < r < r_0\cdot\sqrt[6]{\frac{13}{7}}$. Следовательно, выпуклость графика вниз на интервале $\left(r_0, r_0\cdot\sqrt[6]{\frac{13}{7}}\right)$ меняется на выпуклость вверх на интервале $\left(r_0\cdot\sqrt[6]{\frac{13}{7}},\ +\infty\right)$, точка $r = r_0\cdot\sqrt[6]{\frac{13}{7}}$ – точка перегиба.

График $U(r)$ имеет вид:



Примечание: более подробно с этой задачей и, главное, с основными понятиями физической химии, связанными с ней, можно ознакомиться по книге:

Основы физической химии. Теория и задачи: Учеб. пособие для вузов / В.В.Ерёмин, С.И. Каргов, И.А. Успенская, Н.Е. Кузьменко, В.В. Лунин. - М.: Изд-во «Экзамен», 2005, (Серия «Классический университетский учебник»).