

**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА**

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

**(учебно-методическое пособие
для бакалавров химического факультета)**

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2026

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок, создаваемых на основе требований нового учебного плана – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

1.1. Напомним коротко основные определения и теоремы.

Определение. Система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется *ортogonalной* на $[a; b]$, если интеграл

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx$$

равен нулю при $n \neq m$ и не равен нулю при $n = m$.

Теорема. Система функций $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на любом отрезке длины 2π .

Доказательство.

Докажем, например, что эта система ортогональна на отрезке $[0, 2\pi]$.

Напомним, что в лекционном курсе доказано, что эта система ортогональна на отрезке $[-\pi; \pi]$. Это два отрезка, на которых чаще всего рассматривается эта система.

Заметим, что при $n = 0$ мы получим $\cos(0 \cdot x) \equiv 1$. То есть в системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ мы реально имеем функции $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Докажем, что функции из системы $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональны.

Рассмотрим при $n \neq m, n, m = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m+n} (\sin(2\pi(m+n)) - \sin(0)) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m-n} (\sin(2\pi(m-n)) - \sin(0)) = 0, \end{aligned}$$

так как при любых $n, m = 0, 1, 2, \dots$ выражения $(m+n)$ и $(m-n)$ являются целыми числами, и известно, что $\sin 0 = 0$ и $\sin 2\pi k = 0$ при любых целых значениях k . Следовательно, функции $\cos mx$ и $\cos nx$ ортогональны при различных $n, m = 0, 1, 2, \dots$

Рассмотрим при $n \neq m, n, m = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) \, dx = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x \Big|_0^{2\pi} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m-n} (\sin(2\pi(m-n)) - \sin(0)) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m+n} (\sin(2\pi(m+n)) - \sin(0)) = 0
\end{aligned}$$

(аналогично предыдущему случаю).

Следовательно, функции $\sin mx$ и $\sin nx$ ортогональны при различных $n, m = 1, 2, 3, \dots$

Рассмотрим при $n = 0, 1, 2, \dots$ и $m = 1, 2, 3, \dots$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x) \, dx \quad \square$$

при $m = n$ получим

$$\begin{aligned}
\square \int_0^{2\pi} \sin mx \cos mx \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2mx \, dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2m} \cos 2mx \Big|_0^{2\pi} = \\
&= -\frac{1}{4m} (\cos 4\pi - \cos 0) = -\frac{1}{4m} (1 - 1) = 0,
\end{aligned}$$

при $n \neq m$ получим

$$\begin{aligned}
\square -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m+n} \cos(m+n)x \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m-n} \cos(m-n)x \Big|_0^{2\pi} &= \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m+n} (\cos 2\pi(m+n) - \cos 0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m-n} (\cos 2\pi(m-n) - \cos 0) = \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m+n} (1 - 1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m-n} (1 - 1) = 0,
\end{aligned}$$

так как при любых $n = 0, 1, 2, \dots$ и $m = 1, 2, 3, \dots$ выражения $(m+n)$ и $(m-n)$ являются целыми числами, и известно, что $\cos 0 = 1$ и $\cos 2\pi k = 1$ при любых целых значениях k . Следовательно, функции $\sin mx$ и $\cos nx$ ортогональны при любых $n = 0, 1, 2, \dots$ и $m = 1, 2, 3, \dots$

Отметим, что оба случая сразу рассматривать нельзя, так как при $m = n$ знаменатель дроби $\frac{1}{m-n}$ станет равным нулю, что не допустимо.

Доказано, что система $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на отрезке $[0, 2\pi]$.

Доказательство того, что $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на любом отрезке длины 2π технически немного более сложно.

Замечание. О том, что система $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на любом отрезке длины 2π , полезно не забывать при вычислениях интегралов. Иначе придется выполнять много лишней работы.

Определение. Функции из системы $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ принято называть «*синусами и косинусами кратных дуг*».

Теорема. Пусть $f(x)$ – кусочно-гладкая функция на интервале $(a; b)$ длины 2π , $\tilde{f}(x)$ – 2π -периодическое продолжение функции $f(x)$.

Тогда $\tilde{f}(x) = S(x)$, где

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \sin nx dx,$$

причем, если x – точка непрерывности 2π -периодического продолжения функции $f(x)$, то $S(x) = \tilde{f}(x)$, если x – точка разрыва 1-го рода 2π -периодического продолжения функции $f(x)$, то

$$S(x) = \frac{\tilde{f}(x+0) + \tilde{f}(x-0)}{2},$$

где

$$\tilde{f}(x+0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0_+} \tilde{f}(x+\alpha),$$

$$\tilde{f}(x-0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0_+} \tilde{f}(x-\alpha).$$

То есть в точках непрерывности 2π -периодического продолжения функции $f(x)$ значение суммы $S(x)$ тригонометрического ряда Фурье для этой функции совпадает со значением функции $\tilde{f}(x)$ в этой точке. Если же точка является точкой разрыва 1-го рода функции $\tilde{f}(x)$, то значение суммы $S(x)$ тригонометрического ряда Фурье для этой функции в этой точке равно среднему арифметическому пределов функции $\tilde{f}(x)$ слева и справа.

Напомним простую теорему об интегрировании четных и нечетных функций.

Теорема. Если $f(x)$ является четной функцией на $[-a, a]$, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$. Если же $f(x)$ является нечетной функцией на $[-a, a]$, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Эта теорема также позволяет сократить вычисление интегралов, надо лишь внимательно отслеживать симметричные промежутки и четность-нечетность подынтегральных функций.

Задача 1. Разложить функцию $f(x) = \text{sign}(x)$ на интервале $(-\pi; \pi)$ в ряд по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. С помощью полученного разложения найти сумму ряда Лейбница $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

Решение.

Заметим, что функция $f(x) = \text{sign}(x)$ на интервале $(-\pi; \pi)$ является нечетной, поэтому функция $f(x) \cos nx = \text{sign}(x) \cos nx$, $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ на интервале $(-\pi; \pi)$ является нечетной, и

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\text{sign}(x) \cos nx}_{\text{нечетная}} \, dx = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

(кстати, отсюда мы делаем вывод, что нечетная на интервале $(-\pi; \pi)$ функция раскладывается в ряд только по синусам кратных дуг).

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\text{sign}(x) \sin nx}_{\text{четная}} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{\text{sign}(x)}_{=1 \text{ при } x>0} \sin nx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = -\frac{2}{\pi n} (\cos nx \Big|_0^{\pi}) = -\frac{2}{\pi n} (\cos n\pi - \cos 0) = \\ &= -\frac{2}{\pi n} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, n = 2k, \\ \frac{4}{\pi(2k-1)}, n = 2k-1, k = 1, 2, 3 \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно получаем, что

$$f(x) \underset{(-\pi; \pi)}{=} \text{sign}(x) \underset{(-\pi; \pi)}{=} \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \sin(2k-1)x.$$

Заметим, что 2π -периодическое продолжение функции $f(x) = \text{sign}(x)$ непрерывно в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$, поэтому $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = S\left(\frac{\pi}{2}\right)$, то есть

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \sin\left((2k-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \sin\left(\pi k - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \cos \pi k = -\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)}, \end{aligned}$$

поэтому получаем, что

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} = 1,$$

и следовательно

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Ответ: } f(x) \underset{(-\pi; \pi)}{=} \text{sign}(x) \underset{(-\pi; \pi)}{=} \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \sin(2k-1)x;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} = \frac{\pi}{4}.$$

Замечание. При решении этой задачи мы заметили, что нечетная на интервале $(-\pi; \pi)$ функция раскладывается в ряд только по синусам кратных дуг. В дальнейшем мы увидим, что четная на интервале $(-\pi; \pi)$ функция раскладывается в ряд только по косинусам кратных дуг. Это надо осознать и научиться использовать при решении задач.

Замечание. Напомним, что когда изучались числовые ряды, было рассмотрено очень мало задач, в которых требовалось найти сумму числового ряда. Тогда это была очень непростая задача, в которой требовалось записать несколько первых частичных сумм, угадать и доказать общую формулу для n -ых частичных сумм и найти предел последовательности этих частичных сумм. Заметьте при этом, что догадаться, что сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)}$ будет как-то связана с числом π , было бы невозможно. В следующих задачах вы увидите, как много рядов можно легко просуммировать, используя разложение функций в тригонометрические ряды.

Задача 2. Разложить функцию $f(x) = x^2$ на интервале $(-\pi; \pi)$ в ряд по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. С помощью полученного разложения найти суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Решение.

Заметим, что функция $f(x) = x^2$ на интервале $(-\pi; \pi)$ является четной, поэтому функция $f(x) \sin nx = x^2 \sin nx$ на интервале $(-\pi; \pi)$ является нечетной, и $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2 \sin nx \, dx}_{\text{нечетная}} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (мы уже сделали вывод, что четная на интервале $(-\pi; \pi)$ функция раскладывается в ряд только по косинусам кратных дуг, но это полезно проделать несколько раз).

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2}_{\text{четная}} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3} = a_0.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2 \cos nx}_{\text{четная}} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} x^2 \, d \sin nx = \frac{2}{\pi n} \left(x^2 \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx^2 = \\ &= -\frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{4}{\pi n^2} \int_0^{\pi} x \, d \cos nx = \frac{4}{\pi n^2} x \cos nx \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = \\ &= \frac{4}{\pi n^2} \pi (-1)^n - 0 - \frac{4}{\pi n^2} \cdot \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{n^2} (-1)^n - 0 = \frac{4(-1)^n}{n^2} = a_n. \end{aligned}$$

$$\text{Поэтому } f(x) \underset{(-\pi; \pi)}{=} x^2 \underset{(-\pi; \pi)}{=} \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n^2} \cos nx.$$

$$\text{Ответ: } f(x) \underset{(-\pi; \pi)}{=} x^2 \underset{(-\pi; \pi)}{=} \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n^2} \cos nx.$$

Замечание. Постройте в трех системах координат графики функций:

1. $y = f(x) = x^2$ с областью определения $D_f = \mathbb{R}$.

2. $y = f(x) = x^2$ с областью определения $D_f = (-\pi; \pi)$ и его 2π -периодическое продолжение.

3. $y = S(x)$ с областью определения $D_S = \mathbb{R}$.

Осознайте, что получаются разные кривые.

Заметим, что 2π -периодическое продолжение функции $f(x) = x^2$ непрерывно в точке $x_0 = \pi$, поэтому $f(\pi) = S(\pi)$, то есть

$$\begin{aligned}\pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^2} = \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},\end{aligned}$$

поэтому получаем, что

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2,$$

и следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2π -периодическое продолжение функции $f(x) = x^2$ непрерывно и в точке $x_0 = 0$, поэтому $f(0) = S(0)$, то есть

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n \cdot 0) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot 1 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

поэтому получаем, что

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0,$$

и следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$\text{Ответ: } f(x) \underset{(-\pi; \pi)}{=} x^2 \underset{(-\pi; \pi)}{=} \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Задача 3. Разложить функцию $f(x) = x^2$ на интервале $(0; 2\pi)$ в ряд по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Заметим, что функция $f(x) = x^2$ рассматривается на интервале $(0; 2\pi)$, который не является симметричным относительно $x = 0$, поэтому никакой речи о четности функция $f(x) = x^2$ быть не может.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{8\pi^3}{3} = \boxed{\frac{8\pi^2}{3} = a_0}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} x^2 d \sin nx = \\ &= \frac{1}{\pi n} (x^2 \sin nx \Big|_0^{2\pi}) - \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} \sin nx dx^2 = 0 - \frac{2}{\pi n} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx = \\ &= \frac{2}{\pi n^2} \int_0^{2\pi} x d \cos nx = \frac{2}{\pi n^2} x \cos nx \Big|_0^{2\pi} - \underbrace{\frac{2}{\pi n^2} \int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos nx dx}_{=0 \text{ (ортогональность!)}} = \\ &= \frac{2}{\pi n^2} \cdot 2\pi \cdot 1 = \boxed{\frac{4}{n^2} = a_n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = -\frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} x^2 d \cos nx = \\ &= -\frac{1}{\pi n} (x^2 \cos nx \Big|_0^{2\pi}) + \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} \cos nx dx^2 = \\ &= -\frac{1}{\pi n} \cdot 4\pi^2 \cdot \cos 2\pi n + \frac{2}{\pi n} \int_0^{2\pi} x d \cos nx = \\ &= -\frac{4\pi}{n} \cdot 1 + \frac{2}{\pi n^2} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx = \\ &= -\frac{4\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^2} x \sin nx \Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{\pi n^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin nx dx}_{=0 \text{ (ортогональность!)}} = \boxed{-\frac{4\pi}{n} = b_n}. \end{aligned}$$

$$\text{Поэтому } f(x) \underset{(0;2\pi)}{=} x^2 \underset{(0;2\pi)}{=} \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx - \frac{\pi}{n} \sin nx.$$

$$\text{Ответ: } f(x) \underset{(0;2\pi)}{=} x^2 \underset{(0;2\pi)}{=} \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx - \frac{\pi}{n} \sin nx.$$

Постройте в трех системах координат графики функций:

1. $y = f(x) = x^2$ с областью определения $D_f = \mathbb{R}$.
2. $y = f(x) = x^2$ с областью определения $D_f = (0; 2\pi)$ и его 2π -периодическое продолжение.
3. $y = S(x)$ с областью определения $D_S = \mathbb{R}$.

Осознайте, что получаются разные кривые.

Кроме того, заметьте, что получаются разные кривые и в задачах 2 и 3. Но все эти кривые совпадают на $(0; \pi)$! Значит, на интервале $(0; \pi)$ можно получить разные разложения 2π -периодической функции по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Задача 4. Разложить функцию $f(x) = |x|$ на интервале $(-\pi; \pi)$ в ряд по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Заметим, что функция $f(x) = |x|$ на интервале $(-\pi; \pi)$ является четной, поэтому функция $f(x) \sin nx = |x| \sin nx$ на интервале $(-\pi; \pi)$ является нечетной, и $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|x| \sin nx \, dx}_{\text{нечетная}} = 0$. Следовательно

функция $f(x) = |x|$ раскладывается в ряд только по косинусам кратных дуг.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|x| \, dx}_{\text{четная}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \boxed{\pi = a_0}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} x \, d \sin nx = \frac{2}{\pi n} \left(x \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = 0 + \frac{2}{\pi n^2} \left(\cos nx \Big|_0^{\pi} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, n = 2k, k = 1, 2, 3, \dots \\ \frac{2 \cdot (-2)}{\pi(2k-1)^2}, n = 2k-1, k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Поэтому } f(x) \underset{(-\pi; \pi)}{=} |x| \underset{(-\pi; \pi)}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x.$$

$$\text{Ответ: } f(x) \underset{(-\pi; \pi)}{=} |x| \underset{(-\pi; \pi)}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x.$$

Задача 5. Разложить функцию $f(x) = 2 \sin x \sin 4x$ на интервале $(-\pi; \pi)$ в ряд по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Преобразуем выражение для $f(x)$:

$$f(x) = 2 \sin x \sin 4x = \cos 3x - \cos 5x.$$

Легко видеть, что $f(x)$ – четная функция, следовательно она раскладывается в ряд только по косинусам кратных дуг.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 3x - \cos 5x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos 3x dx}_{=0 \text{ (ортогональность)}} - \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos 5x dx}_{=0 \text{ (ортогональность)}} = 0, \end{aligned}$$

так как функции $1, \cos 3x, \cos 5x$ ортогональны на $(-\pi; \pi)$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 3x - \cos 5x) \cos nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 3x \cos nx dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 5x \cos nx dx, \end{aligned}$$

причем, первый интеграл будет равен нулю при всех $n \neq 3$, а второй – будет равен нулю при всех $n \neq 5$ (опять же в силу ортогональности системы функций $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ на $(-\pi; \pi)$). Поэтому $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 3 \text{ и } n \neq 5$.

Найдем a_3 и a_5 . Заметим сразу, что интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 3x \cos 5x dx$ равен нулю, так как функции $\cos 3x$ и $\cos 5x$ ортогональны на $(-\pi; \pi)$.

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 3x \cos 3x dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 6x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos 6x dx}_{=0 \text{ (ортогональность)}} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi + 0 = 1, \end{aligned}$$

второй интеграл равен нулю, так как функции 1 и $\cos 6x$ ортогональны на $(-\pi; \pi)$.

$$\begin{aligned} a_5 &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 5x \cos 5x dx = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 10x) dx = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos 10x dx = -\frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi + 0 = -1, \end{aligned}$$

второй интеграл равен нулю, так как функции 1 и $\cos 10x$ ортогональны на $(-\pi; \pi)$.

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } f(x) &= 2 \sin x \sin 4x = \cos 3x - \cos 5x = \\ &= a_3 \cos 3x + a_5 \cos 5x = 1 \cdot \cos 3x - 1 \cdot \cos 5x = \cos 3x - \cos 5x. \end{aligned}$$

Определение. Тригонометрическим многочленом называется выражение вида

$$P_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Из предыдущей задачи можно сделать вывод, что для тригонометрического многочлена тригонометрическим рядом Фурье является сам тригонометрический многочлен! Так же было: для многочлена рядом Маклорена (степенным рядом!) является сам многочлен.

Ответ: $f(x) = \cos 3x - \cos 5x$.

Задача 6. Разложить функцию $f(x) = |\sin x|$ на интервале $(-\pi; \pi)$ в ряд по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Легко видеть, что $f(x)$ – четная функция, следовательно она раскладывается в ряд только по косинусам кратных дуг. Действительно,

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|\sin x| \sin nx}_{\text{нечетная}} \, dx = 0.$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin x| \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot 2 = \boxed{\frac{4}{\pi} = a_0}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{|\sin x|}_{\substack{=\sin x \\ \text{на } (0, \pi)}} \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(1+n)x + \sin(1-n)x) \, dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+n} \cos(1+n)x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{1-n} \cos(1-n)x \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+n} \cos(1+n)x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{n-1} \cos(n-1)x \Big|_0^{\pi} \quad \boxed{=}$$

и хорошо видно, что дальнейшие вычисления мы можем проводить только при $n \neq 1$, так как при $n = 1$ знаменатель дроби $\frac{1}{n-1}$ будет равен 0, и значение a_1 придется считать отдельно,

$$\begin{aligned}
& \equiv -\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+n} ((-1)^{n+1} - 1) + \frac{1}{\pi} \frac{1}{n-1} ((-1)^{n-1} - 1) = \\
& = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+n} ((-1)^n + 1) - \frac{1}{\pi} \frac{1}{n-1} ((-1)^n + 1) = \frac{1}{\pi} ((-1)^n + 1) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right) = \\
& = \frac{1}{\pi} ((-1)^n + 1) \frac{n-1-n-1}{n^2-1} = -\frac{2}{\pi} ((-1)^n + 1) = \\
& = \boxed{\begin{cases} 0, n = 2k - 1, & k = 2, 3 \dots \\ -\frac{4}{\pi(4k^2-1)}, & n = 2k, k = 1, 2, 3 \dots \end{cases}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{|\sin x|}_{=\sin x \text{ на } (0, \pi)} \cos x \, dx = \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{\sin 2x}_{T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi} \, dx = \boxed{0 = a_1}.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались еще одним фактом, который полезно запомнить.

Замечание. Минимальный период T_0 функций $\cos px$ и $\sin px$ равен $T_0 = \frac{2\pi}{p}$. Если длина промежутка $[a; b]$ равна периоду функции $\cos px$ и $\sin px$, то есть $b - a = n \cdot \frac{2\pi}{p}, n \in \mathbb{N}$, то интегралы $\int_a^b \sin px \, dx$ и $\int_a^b \cos px \, dx$ равны нулю.

Проверьте это самостоятельно и используйте в дальнейшем.

Следовательно, получаем, что

$$f(x) \underset{(-\pi; \pi)}{\equiv} |\sin x| \underset{(-\pi; \pi)}{\equiv} \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos 2kx.$$

$$\text{Ответ: } f(x) \underset{(-\pi; \pi)}{\equiv} |\sin x| \underset{(-\pi; \pi)}{\equiv} \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos 2kx.$$

Задача 7. Разложить функцию $f(x) = x \sin x$ на интервале $(-\pi; \pi)$ в ряд по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Легко видеть, что $f(x)$ – четная функция (является произведением двух нечетных функций), следовательно она раскладывается в ряд только по косинусам кратных дуг, то есть $b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, действительно,

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x \sin x \sin nx \, dx}_{\text{нечетная}} = 0.$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x d \cos x = \\ &= -\frac{2}{\pi} \cdot x \cos x \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \, dx = -\frac{2}{\pi} \cdot \pi \cos \pi + \frac{2}{\pi} \sin x \Big|_0^{\pi} = \boxed{2 = a_0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos nx \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x (\sin(1+n)x + \sin(1-n)x) \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(1+n)x \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(1-n)x \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{-1}{n+1} \int_0^{\pi} x d \cos(1+n)x + \frac{1}{\pi} \frac{-1}{1-n} \int_0^{\pi} x d \cos(1-n)x = \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{n+1} \int_0^{\pi} x d \cos(n+1)x + \frac{1}{\pi} \frac{1}{n-1} \int_0^{\pi} x d \cos(n-1)x \quad \equiv \end{aligned}$$

и мы видим, что дальнейшие вычисления можно проводить только при $n \neq 1$, и значение a_1 придется считать отдельно,

$$\begin{aligned} \equiv & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{n+1} x \cos(n+1)x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{n+1} \int_0^{\pi} \cos(n+1)x \, dx + \\ & + \frac{1}{\pi} \frac{1}{n-1} x \cos(n-1)x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{n-1} \int_0^{\pi} \cos(n-1)x \, dx = \\ & = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{n+1} \pi \cos(n+1)\pi + \frac{1}{\pi} \frac{1}{(n+1)^2} \sin(n+1)x \Big|_0^{\pi} + \\ & + \frac{1}{\pi} \frac{1}{n-1} \pi \cos(n-1)\pi + \frac{1}{\pi} \frac{1}{(n-1)^2} \sin(n-1)x \Big|_0^{\pi} = \\ & = -\frac{1}{n+1} (-1)^{n+1} + 0 + \frac{1}{n-1} (-1)^{n-1} + 0 = \frac{1}{n+1} (-1)^n - \frac{1}{n-1} (-1)^n = \\ & = (-1)^n \frac{n-1-n-1}{n^2-1} = \boxed{\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1} = a_n}, \quad n \neq 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos x \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x d \cos 2x = \\ &= -\frac{1}{2\pi} x \cos 2x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{\cos 2x}_{T_0 = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{2} = \pi} \, dx = -\frac{1}{2\pi} \cdot \pi \cdot \cos 2\pi + 0 = \boxed{-\frac{1}{2} = a_1}. \end{aligned}$$

Поскольку значение коэффициента a_1 не описывается общей формулой, то слагаемое $a_1 \cos x$ будет записано отдельно:

$$f(x) \underset{(-\pi; \pi)}{=} x \sin x \underset{(-\pi; \pi)}{=} 1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2-1} \cos kx$$

$$\text{Ответ: } f(x) \underset{(-\pi; \pi)}{=} x \sin x \underset{(-\pi; \pi)}{=} 1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - 1} \cos kx.$$

Задача 8. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ на интервале $(-\pi; \pi)$ в ряд по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ и найти сумму этого ряда в точке $x_0 = -\pi$.

Решение.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2} = a_0}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \int_0^{\pi} x d \sin nx = \frac{1}{\pi n} (x \sin nx \Big|_0^{\pi}) - \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx dx = 0 + \frac{1}{\pi n^2} (\cos nx \Big|_0^{\pi}) = \\ &= \boxed{\frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = a_n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \\ &= -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \int_0^{\pi} x d \cos nx = -\frac{1}{\pi n} (x \cos nx \Big|_0^{\pi}) + \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \\ &= -\frac{1}{\pi n} (\pi \cos \pi n - 0) + \frac{1}{\pi n^2} (\sin nx \Big|_0^{\pi}) = -\frac{1}{n} (-1)^n + 0 = \\ &= \boxed{\frac{1}{n} (-1)^{n+1} = b_n}. \end{aligned}$$

Тогда

$$f(x) \underset{(-\pi; \pi)}{=} \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos nx + \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \sin nx.$$

Найдем сумму этого ряда в точке $x_0 = -\pi$.

$$\begin{aligned} S(-\pi) &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos n\pi - \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \sin n\pi = \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1)(-1)^n - \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \cdot 0 = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Заметим, что $f(-\pi) = 0 \neq \frac{\pi}{2} = S(-\pi)$, так как 2π -периодическое продолжение функции $f(x)$ на всю действительную ось не является непрерывным в этой точке.

$$\text{Ответ: } f(x) \underset{(-\pi; \pi)}{=} \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos nx + \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \sin nx;$$

$$S(-\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

Задача 9. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} -2x, & -\pi \leq x < 0 \\ 3x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ на интервале $(-\pi; \pi)$ в ряд по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ и найти значение суммы ряда при $x = \pi$.

Решение.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-2x) \cdot dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 3x dx = \\ &= \frac{-2}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^0 \right) + \frac{3}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{-1}{\pi} (0 - \pi^2) + \frac{3}{2\pi} (\pi^2 - 0) = \boxed{\frac{5\pi}{2} = a_0}. \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-2x) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 3x \cos nx dx = \\ &= \frac{-2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \int_{-\pi}^0 x d \sin nx + \frac{3}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \int_0^{\pi} x d \sin nx = \\ &= \frac{-2}{\pi n} (x \sin nx \Big|_{-\pi}^0) + \frac{2}{\pi n} \int_{-\pi}^0 \sin nx dx + \\ &+ \frac{3}{\pi n} x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{3}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \\ &= 0 - \frac{2}{\pi n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 + 0 + \frac{3}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \\ &= -\frac{2}{\pi n^2} (1 - (-1)^n) + \frac{3}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = \boxed{\frac{5}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = a_n}. \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-2x) \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 3x \sin nx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \int_{-\pi}^0 x d \cos nx - \frac{3}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \int_0^{\pi} x d \cos nx = \\ &= \frac{2}{\pi n} (x \cos nx \Big|_{-\pi}^0) - \frac{2}{\pi n} \int_{-\pi}^0 \cos nx dx - \\ &- \frac{3}{\pi n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{3}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi n} (0 - (-\pi) \cos \pi n) - \frac{2}{\pi n} \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 - \frac{3}{\pi n} (\pi \cos \pi n - 0) + \frac{3}{\pi n} \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} = \\
&= \frac{2}{\pi n} \pi (-1)^n - 0 - \frac{3}{\pi n} \pi (-1)^n + 0 = \boxed{\frac{(-1)^{n+1}}{n} = b_n}.
\end{aligned}$$

Следовательно, получаем, что

$$f(x) \underset{(-\pi; \pi)}{=} \frac{5\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Найдем $S(\pi)$:

$$\begin{aligned}
S(\pi) &= \frac{5\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos \pi n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \pi n = \\
&= \frac{5\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5((-1)^n - 1)}{\pi n^2} (-1)^n + 0 = \frac{5\pi}{4} + \frac{5}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{5}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \\
&= \frac{5\pi}{4} + \frac{5}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{6} + \frac{5}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{12} = \frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi}{12} = \frac{30\pi}{12} = \frac{5\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Напомним, что в задаче 2, решенной ранее, мы уже получили, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Заметим, что $f(\pi) = 3\pi \neq \frac{5\pi}{2} = S(\pi)$, потому что 2π -периодическое продолжение функции $f(x)$ не является непрерывным в точке $x = \pi$ (нарисуйте “картинку» для 2π -периодического продолжения функции $f(x)$ и $S(x)$).

$$\text{Ответ: } f(x) \underset{(-\pi; \pi)}{=} \frac{5\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx;$$

$$S(\pi) = \frac{5\pi}{2}.$$

Важное замечание. Обратите внимание, что если мы раскладываем функцию в тригонометрический ряд Фурье по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$, то она должна быть задана на промежутке длины 2π . А что делать, если функция задана на промежутке меньшей длины, например, на промежутке $(0; \pi)$? Конечно, надо ее продолжить на промежутки $(-\pi; 0)$. Это можно сделать бесконечным числом способов. Вопрос: какие продолжения будут самыми полезными для дальнейших задач?

Рассмотрим четные и нечетные продолжения.

Задача 10. Разложить функцию $f(x) = x^2$ на интервале $(0; \pi)$ в ряд по системе $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Поскольку мы хотим получить разложение некоторой функции в ряд по системе $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$, то функция должна быть нечетной.

Итак, пусть $\varphi(x)$ – нечетное продолжение $f(x) = x^2$, заданной на интервале $(0; \pi)$, на интервал $(-\pi; 0)$, то есть $\varphi(x)$ – нечетная на интервале $(-\pi; \pi)$ функция, которая при $x \in (0; \pi)$ совпадает с функцией $f(x) = x^2$.

Разложим функцию $\varphi(x)$ в тригонометрический ряд. Так как $\varphi(x)$ – нечетная функция, заданная на интервале $(-\pi; \pi)$ то все коэффициенты a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ в ее разложении в тригонометрический ряд Фурье будут равны нулю, действительно,

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\varphi(x) \cos nx}_{\text{нечетная}} dx = 0, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Найдем коэффициенты b_n .

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\varphi(x) \sin nx}_{\text{четная}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx \stackrel{\substack{\varphi(x)=f(x) \\ \text{на } (0;\pi)}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx = -\frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} x^2 d \cos nx = \\ &= -\frac{2}{\pi n} (x^2 \cos nx \Big|_0^{\pi}) + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos nx dx^2 = \\ &= -\frac{2}{\pi n} \cdot \pi^2 \cdot \cos \pi n + \frac{2 \cdot 2}{\pi n} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \\ &= -\frac{2\pi}{n} \cdot (-1)^n + \frac{4}{\pi n^2} \int_0^{\pi} x d \sin nx = \\ &= \frac{2\pi}{n} \cdot (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^2} x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \\ &= \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + 0 + \frac{4}{\pi n^3} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \boxed{\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^n - 1) = b_n}. \end{aligned}$$

Мы можем получить разложение функции $\varphi(x)$ на интервале $(-\pi; \pi)$.

$$\varphi(x) \stackrel{\substack{= \\ (-\pi;\pi)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^n - 1) \right) \sin nx.$$

Но на интервале $(0; \pi)$ функция $\varphi(x)$ совпадает с функцией $f(x) = x^2$. Следовательно, совпадают и их разложения в тригонометрический ряд, то есть

$$f(x) \underset{(0;\pi)}{=} x^2 \underset{(0;\pi)}{=} \varphi(x) \underset{(0;\pi)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^n - 1) \right) \sin nx.$$

$$\text{Ответ: } f(x) \underset{(0;\pi)}{=} x^2 \underset{(0;\pi)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^n - 1) \right) \sin nx.$$

Замечание. Постройте в трех системах координат графики функций:

1. $y = f(x) = x^2$ с областью определения $D_f = \mathbb{R}$.
2. Нечетное продолжение $y = f(x) = x^2$ с областью определения $D_f = (0; \pi)$ на интервал $(-\pi; 0)$ и его 2π -периодическое продолжение.
3. $y = S(x)$ с областью определения $D_S = \mathbb{R}$.

Осознайте, что получаются разные кривые. Сравните полученный результат с теми, что были получены в задачах 2 и 3. Заметьте, что получаются разные кривые и различные разложения! Но все эти кривые совпадают на интервале $(0; \pi)$! Значит, на интервале $(0; \pi)$ можно получить разные разложения 2π -периодической функции по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. Здесь важным является то, что функция *изначально задается не на всем промежутке длины 2π* .

Задача 11. Разложить функцию $f(x) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$ на интервале $(0; \pi)$ в ряд по системе $\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Поскольку мы хотим получить разложение некоторой функции в ряд по системе $\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$, то функция должна быть четной.

Итак, пусть $\varphi(x)$ – четное продолжение $f(x) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$, заданной на интервале $(0; \pi)$, на интервал $(-\pi; 0)$, то есть $\varphi(x)$ – четная на интервале $(-\pi; \pi)$ функция, которая при всех $x \in (0; \pi)$ совпадает с функцией $f(x) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$.

Так как $\varphi(x)$ – четная функция, то все коэффициенты $b_n, n = 1, 2, \dots$ в ее разложении в тригонометрический ряд Фурье будут равны нулю (если еще не привыкли к этому, то запишите интегралы для b_n и поймите, что они будут равны нулю).

Найдем коэффициенты a_n .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\varphi(x)}_{\text{четная}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) dx \stackrel{\substack{\varphi(x)=f(x) \\ \text{на } (0;\pi)}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} \right) = \boxed{0 = a_0}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\varphi(x) \cos nx}_{\text{четная}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx \stackrel{\substack{\varphi(x)=f(x) \\ \text{на } (0;\pi)}}{=} \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos nx dx = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) d \sin nx =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi^2 n} \int_0^{\pi} \sin nx d \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 0 + \frac{4}{\pi^2 n} \int_0^{\pi} \sin nx dx =$$

$$= -\frac{4}{\pi^2 n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad k = 1, 2, 3 \dots \\ \frac{8}{\pi^2 (2k-1)^2}, & n = 2k-1, \quad k = 1, 2, 3 \dots \end{cases}$$

Мы можем получить разложение функции $\varphi(x)$ на интервале $(-\pi; \pi)$:

$$\varphi(x) \stackrel{\substack{\varphi \\ (-\pi;\pi)}}{=} \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k-1)^2} \right) \cos(2k-1)x.$$

Но на интервале $(0; \pi)$ функция $\varphi(x)$ совпадает с функцией

$f(x) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$. Следовательно, совпадают и их разложения в тригонометрический ряд, то есть

$$f(x) \stackrel{\substack{\varphi \\ (0;\pi)}}{=} \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \stackrel{\substack{\varphi \\ (0;\pi)}}{=} \varphi(x) \stackrel{\substack{\varphi \\ (0;\pi)}}{=} \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k-1)^2} \right) \cos(2k-1)x.$$

$$\text{Ответ: } f(x) \stackrel{\substack{\varphi \\ (0;\pi)}}{=} \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \stackrel{\substack{\varphi \\ (0;\pi)}}{=} \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k-1)^2} \right) \cos(2k-1)x.$$

Задача 12. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$ на интервале

$(0; \pi)$ в ряд по системе $\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Поскольку мы хотим получить разложение некоторой функции в ряд по системе $\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$, то функция должна быть четной.

Итак, пусть $\varphi(x)$ – четное продолжение $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$, заданной

на интервале $(0; \pi)$, на интервал $(-\pi; 0)$. Так как $\varphi(x)$ – четная функция, то все коэффициенты $b_n, n = 1, 2, \dots$ в ее разложении в тригонометрический ряд Фурье будут равны нулю. Найдем коэффициенты a_n .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\varphi(x)}_{\text{четная}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) dx \stackrel{\varphi(x)=f(x) \text{ на } (0;\pi)}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{8}\right) = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{8} = \boxed{\frac{\pi}{4} = a_0}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\varphi(x) \cos nx}_{\text{четная}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx \stackrel{\varphi(x)=f(x) \text{ на } (0;\pi)}{=}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) d \sin nx =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx d \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi n^2} \left(\cos \frac{\pi n}{2} - 1\right) = \frac{2}{\pi n^2} \left(1 - \cos \frac{\pi n}{2}\right) = \boxed{\frac{4 \sin^2 \frac{\pi n}{4}}{\pi n^2} = a_n}.$$

Мы можем получить разложение функции $\varphi(x)$ на интервале $(-\pi; \pi)$.

$$\varphi(x) \stackrel{(-\pi;\pi)}{=} \frac{\pi}{8} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi n}{4}}{n^2} \cos nx.$$

Но на интервале $(0; \pi)$ функция $\varphi(x)$ совпадает с функцией

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}. \text{ Следовательно, совпадают и их разложения в тригонометрический ряд, то есть}$$

гонометрический ряд, то есть

$$f(x) \stackrel{(0;\pi)}{=} \varphi(x) \stackrel{(0;\pi)}{=} \frac{\pi}{8} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi n}{4}}{n^2} \cos nx.$$

$$\text{Ответ: } f(x) \stackrel{(0;\pi)}{=} \frac{\pi}{8} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi n}{4}}{n^2} \cos nx.$$

Задача 13. Разложить функцию $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ на интервале $(0; 2\pi)$ в ряд по системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Первый способ.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi x - \frac{x^2}{2}}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\pi \cdot 2\pi - \frac{4\pi^2}{2} \right) =$$

$$= \boxed{0 = a_0}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \cos nx dx = \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} d \sin nx =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \left(\frac{\pi-x}{2} \right) \sin nx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} \sin nx d \left(\frac{\pi-x}{2} \right) = 0 + \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi n} \cdot \left(-\frac{1}{n} \right) \cos nx \Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{2\pi n^2} (\cos 2\pi n - \cos 0) = -\frac{1}{2\pi n^2} (1 - 1) =$$

$$= \boxed{0 = a_n}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin nx dx = -\frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} d \cos nx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n} \left(\frac{\pi-x}{2} \right) \cos nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} \cos nx d \left(\frac{\pi-x}{2} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n} \left(\frac{\pi-2\pi}{2} - \frac{\pi-0}{2} \right) + \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \sin nx dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{2\pi n^2} (\cos 2\pi n - \cos 0) =$$

$$= \frac{1}{n} - 0 = \boxed{\frac{1}{n} = b_n}.$$

Следовательно получаем, что

$$f(x) \underset{(0;2\pi)}{\equiv} \frac{\pi-x}{2} \underset{(0;2\pi)}{\equiv} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx.$$

$$\text{Ответ: } f(x) \underset{(0;2\pi)}{\equiv} \frac{\pi-x}{2} \underset{(0;2\pi)}{\equiv} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx.$$

Второй способ.

Заметим, что 2π -периодическое продолжение функции $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ является нечетной функцией (нарисуйте «картинку» и убедитесь в этом!). Поэтому разложение этой функции в тригонометрический ряд будет совпадать с разложением в тригонометрический ряд функции $\varphi(x)$, которая будет являться

ограничением 2π -периодического продолжения функции $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ на интервал $(-\pi; \pi)$. Но так как полученное ограничение $\varphi(x)$ также будет нечетной функцией, то все коэффициенты $a_n, n = 0, 1, 2, \dots$ в ее разложении будут равны нулю. Достаточно найти коэффициенты b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\varphi(x) \sin nx}_{\text{четная}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin nx dx = \\ &= -\frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} d \cos nx = -\frac{2}{\pi n} \left(\frac{\pi-x}{2} \right) \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos nx d \left(\frac{\pi-x}{2} \right) = \\ &= 0 - \left(-\frac{2}{\pi n} \right) \frac{\pi}{2} - \frac{2}{2\pi n} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n} + 0 = \boxed{\frac{1}{n} = b_n}. \end{aligned}$$

Для $\varphi(x)$ получаем, что

$$\varphi(x) \underset{(-\pi; \pi)}{\equiv} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx.$$

Но 2π -периодическое продолжение функции $\varphi(x)$ на всю действительную ось будет совпадать с 2π -периодическим продолжением функции $f(x)$, а значит ограничение этого продолжения на интервал $(0, 2\pi)$ будет совпадать с функцией $f(x)$ на $(0, 2\pi)$.

Следовательно,

$$f(x) \underset{(0; 2\pi)}{\equiv} \frac{\pi-x}{2} \underset{(0; 2\pi)}{\equiv} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx.$$

$$\text{Ответ: } f(x) \underset{(0; 2\pi)}{\equiv} \frac{\pi-x}{2} \underset{(0; 2\pi)}{\equiv} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx.$$

Задача 14. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$ на интервале

$(0; \pi)$ в ряд по системе $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Пусть $\varphi(x)$ – нечетное продолжение $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$, заданной

на интервале $(0; \pi)$, на интервал $(-\pi; 0)$. Так как $\varphi(x)$ – нечетная функция, то все коэффициенты $a_n, n = 0, 1, 2, \dots$ в ее разложении в тригонометрический ряд Фурье будут равны нулю. Найдем коэффициенты b .

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\varphi(x) \sin nx}_{\text{четная}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx \stackrel{\substack{\varphi(x)=f(x) \\ \text{на } (0;\pi)}}{=} \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin nx dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(n-1)x dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(n+1)x dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{1}{n-1} \sin(n-1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{n+1} \sin(n+1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \equiv
\end{aligned}$$

дальнейшие вычисления мы можем проводить только при $n \neq 1$

$$\begin{aligned}
&\equiv \frac{1}{\pi} \frac{1}{n-1} \sin\left(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \frac{1}{n+1} \sin\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \\
&= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{n-1} \cos \frac{\pi n}{2} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{n+1} \cos \frac{\pi n}{2} = -\frac{1}{\pi} \cos \frac{\pi n}{2} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{\pi} \frac{2n}{n^2-1} \cos \frac{\pi n}{2} = \\
&= \begin{cases} 0, n = 2k-1 \\ -\frac{1}{\pi} \frac{4k}{4k^2-1} (-1)^k, n = 2k, k = 1, 2, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\varphi(x) \sin x}_{\text{четная}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin x dx \stackrel{\substack{\varphi(x)=f(x) \\ \text{на } (0;\pi)}}{=} \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\varphi(x) \stackrel{\substack{\varphi(x)=f(x) \\ \text{на } (-\pi;\pi)}}{=} \frac{1}{2} \sin x - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(-1)^k}{4k^2-1} \sin 2kx,$$

где слагаемое $b_1 \sin x = \frac{1}{2} \sin x$ будет записано отдельно, так как не вычисляется по общей формуле.

И тогда

$$f(x) \stackrel{\substack{\varphi(x)=f(x) \\ \text{на } (0;\pi)}}{=} \varphi(x) \stackrel{\substack{\varphi(x)=f(x) \\ \text{на } (0;\pi)}}{=} \frac{1}{2} \sin x - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^k}{4k^2-1} \sin 2kx.$$

$$\text{Ответ: } f(x) \stackrel{\substack{\varphi(x)=f(x) \\ \text{на } (0;\pi)}}{=} \frac{1}{2} \sin x + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^{k+1}}{4k^2-1} \sin 2kx.$$

Задача 15. Разложить функцию $f(x) = \cos 2x$ на интервале $(0; \pi)$ в ряд по системе $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Пусть $\varphi(x)$ – нечетное продолжение $f(x) = \cos 2x$, заданной на интервале $(0; \pi)$, на интервал $(-\pi; 0)$. Так как $\varphi(x)$ – нечетная функция на интервале $(-\pi; \pi)$, то все коэффициенты $a_n, n = 0, 1, 2, \dots$ в ее разложении в тригонометрический ряд Фурье будут равны нулю. Действительно,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\varphi(x) \cos nx}_{\text{нечетная}} dx = 0.$$

Найдем коэффициенты b .

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\varphi(x) \sin nx}_{\text{четная}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx \stackrel{\varphi(x)=f(x)=\cos 2x \text{ на } (0;\pi)}{=} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 2x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(n+2)x + \sin(n-2)x) \boxed{=} \end{aligned}$$

дальнейшие вычисления мы можем проводить только при $n \neq 2$:

$$\begin{aligned} \boxed{=} & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{n+2} \cos(n+2)x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{n-2} \cos(n-2)x \Big|_0^{\pi} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{n+2} (\cos(n+2)\pi - \cos 0) - \frac{1}{\pi} \frac{1}{n-2} (\cos(n-2)\pi - \cos 0) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{n+2} ((-1)^{n+2} - 1) - \frac{1}{\pi} \frac{1}{n-2} ((-1)^{n-2} - 1) \boxed{=} \end{aligned}$$

заметим, что $(-1)^{n+2} = (-1)^n \cdot (-1)^2 = (-1)^n = (-1)^{n-2}$, поэтому

$$\begin{aligned} \boxed{=} & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{n+2} ((-1)^n - 1) - \frac{1}{\pi} \frac{1}{n-2} ((-1)^n - 1) = \\ &= -\frac{1}{\pi} ((-1)^n - 1) \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n-2} \right) = -\frac{1}{\pi} ((-1)^n - 1) \frac{n+2+n-2}{(n+2)(n-2)} = \\ &= -\frac{2n}{\pi(n+2)(n-2)} ((-1)^n - 1) = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \quad k = 2, 3, \dots \\ \frac{4(2k-1)}{\pi(2k-1+2)(2k-1-2)}, & \text{если } n = 2k-1, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \quad k = 2, 3, \dots \\ \frac{4(2k-1)}{\pi(2k+1)(2k-3)}, & \text{если } n = 2k-1, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Отдельно считаем b_2 :

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\varphi(x) \sin 2x}_{\text{четная}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin 2x dx \stackrel{\substack{\varphi(x)=f(x)=\cos 2x \\ \text{на } (0;\pi)}}{=} \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 2x \sin 2x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{\sin 4x}_{T_0=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}} dx = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi(x) \stackrel{\substack{\varphi \\ (-\pi;\pi)}}{=} \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)}{(2k+1)(2k-3)} \sin(2k-1)x.$$

И тогда

$$f(x) \stackrel{\varphi}{\underset{(0;\pi)}}{=} \cos 2x \stackrel{\varphi}{\underset{(0;\pi)}}{=} \varphi(x) \stackrel{\varphi}{\underset{(0;\pi)}}{=} \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)}{(2k+1)(2k-3)} \sin(2k-1)x.$$

$$\text{Ответ: } f(x) \stackrel{\varphi}{\underset{(0;\pi)}}{=} \cos 2x \stackrel{\varphi}{\underset{(0;\pi)}}{=} \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)}{(2k+1)(2k-3)} \sin(2k-1)x.$$

Задача 16. Разложить функцию $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ на интервале $(0; \pi)$ в ряд по системе $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Заметим, что функцию $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ можно рассмотреть на интервале $(-\pi; \pi)$, и это будет нечетная функция, которую можно разложить в ряд по $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$, причем, все коэффициенты a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ в ее разложении в тригонометрический ряд Фурье будут равны нулю. Найдем коэффициенты b .

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \sin nx}_{\text{четная}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \stackrel{\substack{f(x)=\sin \frac{x}{2} \\ \text{на } (0;\pi)}}{=} \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\cos \left(\frac{2n-1}{2} \right) x - \cos \left(\frac{2n+1}{2} \right) x \right) dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{2}{2n-1} \sin \frac{2n-1}{2} x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \frac{2}{2n+1} \sin \frac{2n+1}{2} x \Big|_0^{\pi} = \\
&= \frac{2}{\pi(2n-1)} \sin \left(\pi n - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{2}{\pi(2n+1)} \sin \left(\pi n + \frac{\pi}{2} \right) = \\
&= -\frac{2}{\pi(2n-1)} \cos \pi n - \frac{2}{\pi(2n+1)} \cos \pi n =
\end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{\pi(2n-1)}(-1)^n - \frac{2}{\pi(2n+1)}(-1)^n = (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) =$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi} \frac{2n+1+2n-1}{(2n-1)(2n+1)} = (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi} \frac{4n}{4n^2-1} = \frac{8n(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}.$$

Следовательно, получаем разложение

$$f(x) \underset{(-\pi; \pi)}{\stackrel{\varpi}{=}} \sin \frac{x}{2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)} \sin nx.$$

$$\text{Ответ: } f(x) \underset{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{\stackrel{\varpi}{=}} \sin \frac{x}{2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)} \sin nx.$$

В дальнейшем при изучении курса «Уравнения математической физики» чаще будет встречаться система $\left\{1, \cos \frac{\pi nx}{l}, \sin \frac{\pi nx}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$, которая будет ортогональна на любом отрезке длины $2l$. И тогда, если $f(x)$ кусочно-гладкая на интервале $(a; b)$ длины $2l$ функция и $\tilde{f}(x)$ – ее $2l$ -периодическое продолжение на всю ось, то

$$f(x) = S(x),$$

$$\text{где } S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l},$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx,$$

причем, если x – точка непрерывности $2l$ -периодического продолжения функции $f(x)$, то $S(x) = \tilde{f}(x)$, если x – точка разрыва $2l$ -периодического продолжения функции $f(x)$ (1-го рода!), то

$$S(x) = \frac{\tilde{f}(x+0) + \tilde{f}(x-0)}{2},$$

$$\text{где } \tilde{f}(x+0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \tilde{f}(x+\alpha),$$

$$\tilde{f}(x-0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \tilde{f}(x-\alpha).$$

То есть в точках непрерывности $2l$ -периодического продолжения функции $f(x)$ значение суммы $S(x)$ тригонометрического ряда Фурье для этой функции совпадает со значением функции $\tilde{f}(x)$ в этой точке. Если же точка является точкой разрыва 1-го рода функции $\tilde{f}(x)$, то значение суммы $S(x)$ тригонометрического ряда Фурье для этой функции в этой точке равно среднему арифметическому пределов функции $\tilde{f}(x)$ слева и справа

Задача 17. Разложить функцию $f(x) = |x|$ на интервале $(-l; l)$ в ряд по системе $\left\{1, \cos \frac{\pi nx}{l}, \sin \frac{\pi nx}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Функция $f(x) = |x|$ на интервале $(-l; l)$ является четной, поэтому будут равны нулю все коэффициенты $b_n, n = 1, 2, \dots$

Действительно,

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \underbrace{|x| \sin \frac{\pi nx}{l}}_{\text{нечетная}} dx = 0.$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l |x| dx \underset{|x|-\text{четная}}{=} \frac{2}{l} \int_0^l |x| dx \underset{\substack{|x|=x \\ \text{при } x \geq 0}}{=} \frac{2}{l} \int_0^l x dx = \frac{2}{l} \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = l.$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l |x| \cos \frac{\pi nx}{l} dx \underset{|x|-\text{четная}}{=} \frac{2}{l} \int_0^l |x| \cos \frac{\pi nx}{l} dx =$$

$$\underset{\substack{|x|=x \\ \text{при } x \geq 0}}{=} \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{\pi nx}{l} dx = \frac{2}{l} \frac{l}{\pi n} \int_0^l x d \sin \frac{\pi nx}{l} =$$

$$= \frac{2}{l} \frac{l}{\pi n} x \sin \frac{\pi nx}{l} \Big|_0^l - \frac{2}{l} \frac{l}{\pi n} \int_0^l \sin \frac{\pi nx}{l} dx =$$

$$= 0 - \frac{2}{\pi n} \frac{-l}{\pi n} \cos \frac{\pi nx}{l} \Big|_0^l = \frac{2l}{\pi^2 n^2} (\cos \pi n - \cos 0) = \frac{2l}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0, n = 2k, k = 1, 2, \dots \\ \frac{-4l}{\pi^2 (2k-1)^2}, n = 2k-1, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Поэтому получаем разложение

$$f(x) \underset{(-l;l)}{=} |x| \underset{(-l;l)}{=} \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x.$$

$$\text{Ответ: } f(x) \underset{(-l;l)}{\equiv} |x| \underset{(-l;l)}{\equiv} \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x.$$

Задача 18. Разложить функцию $f(x) = e^x$ на интервале $(-l; l)$ в ряд по системе $\left\{1, \cos \frac{\pi nx}{l}, \sin \frac{\pi nx}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l e^x dx = \frac{1}{l} e^x \Big|_{-l}^l = \boxed{\frac{e^l - e^{-l}}{l} = a_0}. \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx = \boxed{\frac{1}{l} \int_{-l}^l e^x \cos \frac{\pi nx}{l} dx} = \\ &= \frac{1}{l} \frac{l}{\pi n} \int_{-l}^l e^x d \sin \frac{\pi nx}{l} = \frac{1}{l} \frac{l}{\pi n} e^x \sin \frac{\pi nx}{l} \Big|_{-l}^l - \frac{1}{\pi n} \int_{-l}^l \sin \frac{\pi nx}{l} d e^x = \\ &= 0 - \frac{1}{\pi n} \int_{-l}^l e^x \sin \frac{\pi nx}{l} dx = \frac{1}{\pi n} \frac{l}{\pi n} \int_{-l}^l e^x d \cos \frac{\pi nx}{l} = \\ &= \frac{l}{\pi^2 n^2} e^x \cos \frac{\pi nx}{l} \Big|_{-l}^l - \frac{l}{\pi^2 n^2} \int_{-l}^l \cos \frac{\pi nx}{l} d e^x = \\ &= \frac{l}{\pi^2 n^2} (e^l \cos \pi n - e^{-l} \cos \pi n) - \frac{l}{\pi^2 n^2} \int_{-l}^l e^x \cos \frac{\pi nx}{l} dx = \\ &= \boxed{\frac{l(-1)^n(e^l - e^{-l})}{\pi^2 n^2} - \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \frac{1}{l} \int_{-l}^l e^x \cos \frac{\pi nx}{l} dx}. \end{aligned}$$

Мы получили уравнение относительно нужного нам интеграла

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l e^x \cos \frac{\pi nx}{l} dx = \frac{l(-1)^n(e^l - e^{-l})}{\pi^2 n^2} - \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \frac{1}{l} \int_{-l}^l e^x \cos \frac{\pi nx}{l} dx,$$

откуда получаем

$$a_n = \frac{l(-1)^n(e^l - e^{-l})}{\pi^2 n^2} - \frac{l^2}{\pi^2 n^2} a_n$$

$$a_n + \frac{l^2}{\pi^2 n^2} a_n = \frac{l(-1)^n(e^l - e^{-l})}{\pi^2 n^2}$$

$$a_n \frac{\pi^2 n^2 + l^2}{\pi^2 n^2} = \frac{l(-1)^n(e^l - e^{-l})}{\pi^2 n^2}$$

$$\boxed{a_n = \frac{l(-1)^n(e^l - e^{-l})}{l^2 + \pi^2 n^2}}.$$

Найдем b_n .

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \boxed{\frac{1}{l} \int_{-l}^l e^x \sin \frac{\pi n x}{l} dx} = \\
&= \frac{1}{l} \int_{-l}^l \sin \frac{\pi n x}{l} d e^x = \frac{1}{l} e^x \sin \frac{\pi n x}{l} \Big|_{-l}^l - \frac{1}{l} \int_{-l}^l e^x d \sin \frac{\pi n x}{l} = \\
&= 0 - \frac{1}{l} \frac{\pi n}{l} \int_{-l}^l e^x \cos \frac{\pi n x}{l} dx = -\frac{\pi n}{l^2} \int_{-l}^l \cos \frac{\pi n x}{l} d e^x = \\
&= -\frac{\pi n}{l^2} e^x \cos \frac{\pi n x}{l} \Big|_{-l}^l + \frac{\pi n}{l^2} \int_{-l}^l e^x d \cos \frac{\pi n x}{l} = \\
&= -\frac{\pi n}{l^2} (e^l \cos \pi n - e^{-l} \cos \pi n) - \frac{\pi^2 n^2}{l^3} \int_{-l}^l e^x \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \\
&= \boxed{-\frac{\pi n (-1)^n (e^l - e^{-l})}{l^2} - \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \frac{1}{l} \int_{-l}^l e^x \sin \frac{\pi n x}{l} dx}.
\end{aligned}$$

Мы получили уравнение относительно нужного нам интеграла

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l e^x \sin \frac{\pi n x}{l} dx = -\frac{\pi n (-1)^n (e^l - e^{-l})}{l^2} - \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \frac{1}{l} \int_{-l}^l e^x \sin \frac{\pi n x}{l} dx,$$

откуда получаем

$$\begin{aligned}
b_n &= -\frac{\pi n (-1)^n (e^l - e^{-l})}{l^2} - \frac{\pi^2 n^2}{l^2} b_n \\
b_n + \frac{\pi^2 n^2}{l^2} b_n &= -\frac{\pi n (-1)^n (e^l - e^{-l})}{l^2} \\
b_n l^2 + \pi^2 n^2 b_n &= -\pi n (-1)^n (e^l - e^{-l}) \\
b_n (l^2 + \pi^2 n^2) &= -\pi n (-1)^n (e^l - e^{-l}) \\
\boxed{b_n} &= \boxed{-\frac{\pi n (-1)^n (e^l - e^{-l})}{l^2 + \pi^2 n^2}}.
\end{aligned}$$

Следовательно, разложение в тригонометрический ряд будет иметь вид

$$f(x) \underset{(-l;l)}{\equiv} e^x \underset{(-l;l)}{\equiv} \frac{e^l - e^{-l}}{2l} + (e^l - e^{-l}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(-1)^n}{l^2 + \pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n x}{l} - \frac{\pi n (-1)^n}{l^2 + \pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Ответ:

$$f(x) \underset{(-l;l)}{\equiv} e^x \underset{(-l;l)}{\equiv} \frac{e^l - e^{-l}}{2l} + (e^l - e^{-l}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(-1)^n}{l^2 + \pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n x}{l} - \frac{\pi n (-1)^n}{l^2 + \pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$