

МГУ им. М. В. Ломоносова
Лекции по математическому анализу

Интегрирование функций одной переменной

Химический факультет
2026

Оглавление

Лекция 1. Первообразная и интеграл.	3
Лекция 2. Первообразные от рациональных функций.	8
Лекция 3. Интеграл Римана.	13
Лекция 4. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.	21
Лекция 5. Интегралы с переменными пределами интегрирования.	33
Лекция 6. Несобственные интегралы.	42
Лекция 7. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. . .	49
Лекция 8. Ряды с элементами произвольных знаков.	55
Лекция 9. Приложения определённого интеграла.	62

Лекция 1

Первообразная и интеграл

На этой лекции мы изучим задачу, обратную задаче дифференцирования функции.

Определение 1. Пусть функции F и f определены на интервале (a, b) . Если для любого числа $x \in (a, b)$ $F'(x) = f(x)$, то функция F называется (точной) первообразной функции f на интервале (a, b) .

Например, функция $y = \sin x$ является первообразной функции $y = \cos x$ на всей вещественной оси, так как при любом $x \in \mathbb{R}$ $(\sin x)' = \cos x$.

Предложение 1. Пусть функции F_1 и F_2 являются первообразными функции f на интервале (a, b) . Тогда существует такое число $C \in \mathbb{R}$, что $F_1(x) - F_2(x) = C$ при любом $x \in (a, b)$.

Доказательство. При любом $x \in (a, b)$ $(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Тогда по первому следствию теоремы Лагранжа функция $F_1 - F_2$ постоянна на (a, b) , то есть $F_1(x) - F_2(x) = C \forall x \in (a, b)$ при некотором действительном C . $\square$

Таким образом, все функции, являющиеся первообразными для функции f , отличаются на константу.

Определение 2. Обобщенной первообразной функции f на интервале (a, b) называется непрерывная на этом интервале функция F , для которой при всех $x \in (a, b)$ за исключением, быть может, конечного лишь числа точек интервала (a, b) выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Предложение 2. Любые две обобщённые первообразные функции f на интервале (a, b) отличаются на константу.

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — две обобщённые первообразные функции f на интервале (a, b) . Пусть точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ — это все те точки интервала (a, b) , в которых не существует F_1' или F_2' , либо не выполнено равенство $F_1'(x) = f(x)$ или $F_2'(x) = f(x)$. На интервалах $(a, x_1), \dots, (x_n, b)$ справедливы равенства $F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$, а тогда по первому следствию теоремы Лагранжа функция $F_1 - F_2$ постоянна на каждом из этих интервалов. В силу непрерывности функций F_1 и F_2 их разность также непрерывна на (a, b) , а значит, на концах интервалов $(a, x_1), \dots, (x_n, b)$ функция $F_1 - F_2$ также непрерывна, то есть на всём интервале (a, b) эта функция является константой. $\square$

Определение 3. Произвольная первообразная функции f , определённой на некотором интервале, называется неопределённым интегралом функции f и обозначается $\int f(x)dx$.

Так как все первообразные одной функции отличаются на константу, то, зная какую-то первообразную F функции f , мы можем записать равенство $\int f(x)dx = F(x) + C$. Это равенство понимается так: произвольная первообразная функции f равна какой-то известной первообразной плюс некоторая постоянная.

Задача вычислить неопределённый интеграл состоит в том, чтобы найти обобщённую первообразную подынтегральной функции. Например, бывают ситуации, когда мы можем найти точную первообразную функции на двух промежутках вида (a, b) и (b, c) , а затем

должны построить непрерывную функцию, являющуюся обобщённой первообразной уже на промежутке (a, c) . Иногда при таком построении мы получаем даже точную первообразную. В качестве примера можно рассмотреть взятие интеграла $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$, которое мы обсудим на семинарах.

Таблица интегралов

Зная таблицу производных (см. предыдущие лекции) и пользуясь определением первообразной, мы теперь можем записать таблицу неопределённых интегралов от некоторых элементарных функций.

$$\begin{aligned}
 & \text{1) } \int A dx = Ax + C \text{ (} A \text{ — произвольная константа); } \text{2) } \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \text{ (} \alpha \neq -1 \text{);} \\
 & \text{3) } \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \text{ (} x \neq 0 \text{); } \text{4) } \int e^x dx = e^x + C; \\
 & \text{5) } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ } a > 0, \text{ } a \neq 1; \text{6) } \int \sin x dx = -\cos x + C; \text{7) } \int \cos x dx = \sin x + C; \\
 & \text{8) } \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \text{ (} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ } k \in \mathbb{Z} \text{); } \text{9) } \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \text{ (} x \neq \pi k, \text{ } k \in \mathbb{Z} \text{);} \\
 & \text{10) } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C \text{ (} -1 < x < 1 \text{);} \\
 & \text{11) } \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C; \\
 & \text{12) } \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C; \text{13) } \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C; \\
 & \text{14) } \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C; \text{15) } \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \text{ (} x \neq \pm 1 \text{).}
 \end{aligned}$$

Отметим, что в пункте 2 при отрицательных α считается, что $x \neq 0$. Важно осознать, что на каждом промежутке, на котором считается интеграл, добавляется своя константа интегрирования. Например, для функции $f(x) = 1/x^3$ первообразная при $x > 0$ может быть $F(x) = -1/(2x^2) + 3$, а при $x < 0$, например, $F(x) = -1/(2x^2) + 10$.

Эти равенства верны на всех промежутках дифференцируемости выражений в правых частях. Доказательство всех равенств проводится по схеме:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x).$$

Подынтегральное выражение $f(x)dx$ есть дифференциал любой первообразной для функции f . Так как $d(F(x) + C) = dF(x)$, то можем записать равенства $\int dF(x) = F(x) + C$, $d(\int f(x)dx) = dF(x) = f(x)dx$. Второе равенство означает, что у любой первообразной $\int f(x)dx$ один и тот же дифференциал. Кроме того, из определения неопределённого интеграла вытекает, что справедливо равенство $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

Свойства неопределённого интеграла

1. Линейность. Если функции F и G дифференцируемы на интервале (a, b) и $F' = f$, а $G' = g$, то в силу линейности производной при всех вещественных α и β

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha f + \beta g.$$

Таким образом, функция $\alpha F + \beta G$ является первообразной для функции $\alpha f + \beta g$ на интервале (a, b) , поэтому справедливо равенство $\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C$. С другой стороны, $\alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + \alpha C_1 + \beta C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. В силу их произвольности можем положить $\alpha C_1 + \beta C_2 = C$. Таким образом, доказано следующее свойство линейности неопределённого интеграла:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx + C. \quad (1)$$

Свойство линейности позволяет вычислять некоторые интегралы.

Пример 1. Часто применяются формулы сокращённого умножения:

$$\begin{aligned} \int (3x^3 + 2x)^2 dx &= \int (9x^6 + 12x^4 + 4x^2) dx = \\ &= 9 \int x^6 dx + 12 \int x^4 dx + 4 \int x^2 dx + C = \frac{9x^7}{7} + \frac{12x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + C. \end{aligned}$$

2. Формула интегрирования по частям.

Предложение 3. Пусть функции f и g дифференцируемы на интервале (a, b) . Пусть также на этом интервале существует первообразная функции $f'g$. Тогда на интервале (a, b) существует первообразная функции $g'f$ и справедлива **формула интегрирования по частям**:

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx + C. \quad (2)$$

Доказательство. Из условия следует, что на (a, b) дифференцируема функция fg и по правилу Лейбница $(fg)' = f'g + g'f$. Используя существование первообразной для функции $f'g$ на интервале (a, b) и линейность неопределённого интеграла, можем записать равенства

$$\begin{aligned} \int f(x)g'(x) dx &= \int ((f(x)g(x))' - f'(x)g(x)) dx + C = \\ &= \int (f(x)g(x))' dx - \int f'(x)g(x) dx + C_1 = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx + C_2, \end{aligned}$$

откуда следует и то, что на (a, b) существует первообразная функции $g'f$, и сама формула интегрирования по частям. $\square$

Здесь важно понимать, что после второго и третьего равенств появляются новые произвольные постоянные, так как после второго равенства мы пользуемся линейностью, которая даёт ещё одну константу, добавляемую к C , а эту сумму констант мы обозначаем через C_1 . После третьего равенства возникает ещё одна константа в силу определения неопределённого интеграла, сумму которой с C_1 мы и обозначаем через C_2 . Так как все эти обозначения всё равно представляют собой произвольные постоянные, то в дальнейшем мы будем обозначать любую такую постоянную через C .

Так как $f'(x)dx = df$, $g'(x)dx = dg$, то формулу интегрирования по частям часто записывают в виде

$$\int f dg = fg - \int g df.$$

При этом константу опускают, хотя правильнее её писать.

При вычислении интегралов с помощью формулы интегрирования по частям стремятся к тому, чтобы интеграл $\int gdf$ был проще в плане вычисления, чем интеграл $\int f dg$. Этого можно добиться, если правильно обозначить часть подынтегрального выражения через f , а часть — через dg .

Пример 2. 1) В интеграле $\int \ln x dx$ положим $f(x) = \ln x$, а $dx = g'(x)dx (\Rightarrow x = g(x))$. Тогда по формуле интегрирования по частям получим

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x(\ln x)' dx + C = x \ln x - x + C.$$

Можно теперь внести этот интеграл в список табличных интегралов.

2) В интеграле $\int x e^x dx$ положим $f(x) = x$, а $e^x dx = g'(x)dx (\Rightarrow e^x = g(x))$. Тогда по формуле интегрирования по частям получим

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x (x)' dx + C = x e^x - e^x + C.$$

3) В интеграле $\int e^x \sin x dx$ положим $f(x) = e^x$, а $\sin x dx = g'(x)dx (\Rightarrow -\cos x = g(x))$. Тогда по формуле интегрирования по частям получим

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx + C.$$

В интеграле $\int e^x \cos x dx$ положим $f(x) = e^x$, а $\cos x dx = g'(x)dx (\Rightarrow \sin x = g(x))$. Тогда по формуле интегрирования по частям получим

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx + C_1,$$

откуда, так как слева и справа один и тот же интеграл, имеем

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C_2.$$

Интеграл из последнего примера называется **самовыражающимся**.

3. Формула замены переменной.

Предложение 4. Пусть функция φ определена и дифференцируема на интервале (α, β) и при любом $t \in (\alpha, \beta)$ значение $\varphi(t)$ принадлежит интервалу (a, b) , на котором определена функция f . Пусть также существует интеграл $\int f(x) dx$. Тогда существует интеграл $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ и при $x = \varphi(t)$ верна следующая **формула замены переменной**:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt + C.$$

Доказательство. Пусть F — любая первообразная функции f на интервале (a, b) . По теореме о производной сложной функции $(F(\varphi(t)))' = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$. Тогда получим цепочку равенств:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C = F(x)|_{x=\varphi(t)} + C = \int f(x) dx|_{x=\varphi(t)} + C.$$

□

Некоторые интегралы вычисляются с помощью удачного выбора функции $x = \varphi(t)$.

Пример 3. 1) Пусть $F' = f$ на интервале (a, b) . В интеграле $\int f(Ax + B)dx$, $A \neq 0$ сделаем замену $t = Ax + B$, откуда получим $dt = Adx$ и

$$\int f(Ax + B)dx = \frac{1}{A} \int f(t)dt + C = \frac{1}{A}F(t) + C = \frac{1}{A}F(Ax + B) + C.$$

Теперь, используя этот пример, мы можем вычислять интегралы в тех случаях, когда под знаком подынтегральной функции стоит линейное выражение от x .

2) В интеграле $\int \sqrt{1-x^2}dx$ положим $x = \sin t$, тогда $dx = \cos t dt$. Из сделанной замены выразим t через x : $x = \arcsin t$ (поэтому $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ и $\cos t \geq 0$). Имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2}dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt + C = \int \cos^2 t dt + C = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

При вычислении интеграла от $\cos 2t$ мы воспользовались пунктом 1 этого примера. Можно теперь внести интеграл из пункта 2 в список табличных интегралов.

Формула замены переменной допускает некоторую модификацию, которая называется *подведение под знак дифференциала*. Идея состоит в том, что иногда подынтегральное выражение удаётся представить в виде $f(g(x))g'(x)dx$. Тогда, если функция F — первообразная функции f на некотором интервале, а значения функции g лежат на этом интервале, то по формуле замены переменной $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))dg(x) + C = F(g(x)) + C$.

Пример 4. 1) Вычисляемый интеграл также можно внести в список табличных интегралов.

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + C = \int \frac{1}{\cos x} (-\cos x)' dx + C = - \int \frac{1}{\cos x} d \cos x + C = - \ln |\cos x| + C.$$

2) Приведём пример двукратного подведения под знак дифференциала.

$$\int \frac{\cos(\sqrt{\ln x})}{2x\sqrt{\ln x}} dx = \int \frac{\cos(\sqrt{\ln x})}{2\sqrt{\ln x}} d(\ln x) + C = \int \cos(\sqrt{\ln x}) d(\sqrt{\ln x}) + C = \sin(\sqrt{\ln x}) + C.$$

Лекция 2

Первообразные от рациональных функций

Далеко не все первообразные являются элементарными функциями. Например, в элементарных функциях не выражаются следующие интегралы: **si** $x = \int \frac{\sin x}{x} dx$ (**интегральный синус**), **li** $x = \int \frac{dx}{\ln x}$ (**интегральный логарифм**), $\int \frac{e^x}{x} dx$ (**интегральная экспонента**), $\int e^{-x^2} dx$ (**интеграл Пуассона**), $\int \sin(x^2) dx$, $\int \cos(x^2) dx$ (**интегралы Френеля**). Важно отметить, что первообразные подынтегральных функций существуют, но являются новыми функциями, которые не могут выражаться с помощью конечного числа арифметических операций или композиций через изученные в школе и в первом семестре элементарные функции. Тем не менее такие интегралы широко используются в науке и ещё встретятся в курсе анализа. Доказательство того, что интеграл не выражается в элементарных функциях, проводится с помощью критерия Лиувилля. Мы не приводим здесь формулировку, а лишь отметим, что в этом критерии утверждается, что функция имеет первообразную, выражающуюся через элементарные функции, если и только если имеет (или приводится) к некоторому специальному виду. С помощью этого критерия доказывается, например, что интегральная экспонента неинтегрируема, а затем мы можем выразить через неё (пользуясь формулой Эйлера для комплексных чисел и линейностью) интегральный синус, который, таким образом, не представляется с помощью конечной композиции элементарных функций.

Интересны вопросы о классификации тех функций, для которых существуют первообразные в виде элементарных функций. Мы переходим к изучению класса рациональных функций.

Определение 4. Пусть P и Q – многочлены от вещественной переменной. Функция f , принимающая в любой точке $x \in \mathbb{R}$ (при этом $Q(x) \neq 0$) значение $f(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$, называется рациональной.

Мы увидим, что вычисление многих интегралов сводится к умению находить интегралы от рациональных функций, а интегралы от рациональных функций, как будет понятно из теорем ниже, найти (то есть выразить в элементарных функциях) всегда возможно. Продемонстрируем на примерах, как находить интегралы от рациональных функций.

Пример 5. Рассмотрим интеграл из таблицы интегралов.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 1} &= \int \frac{1}{2} \frac{(x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= \frac{1}{2} (\ln |x-1| + C_1 - \ln |x+1| + C_2) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

Мы видим, что подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ была разложена в сумму двух рациональных функций более простого вида, от которых уже стало возможно взять интеграл.

Оказывается, что любую рациональную функцию можно представить в виде суммы многочленов и рациональных функций четырёх типов. Мы будем называть функции этих типов *элементарными дробями*. Сейчас мы докажем интегрируемость элементарных дробей каждого типа. Затем сформулируем (без доказательства) теоремы, из которых будет вытекать существование и единственность представления всякой рациональной функции в виде суммы многочленов и элементарных дробей.

К **перовому типу** относятся рациональные функции вида $\frac{A}{x-a}$, $A, a \in \mathbb{R}$. Интеграл от функции такого типа легко вычисляется:

$$\int \frac{A dx}{x-a} = A \ln |x-a| + C.$$

Второй тип элементарных дробей состоит из функций вида

$$\frac{B}{(x-b)^k}, \quad B, b \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Интеграл снова вычисляется совсем просто:

$$\int \frac{B dx}{(x-b)^k} = \frac{B}{(1-k)(x-b)^{k-1}} + C.$$

Третий тип элементарных дробей выглядит несколько сложнее:

$$\frac{D_1 x + D_2}{x^2 + d_1 x + d_2}, \quad D_1, D_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R},$$

а многочлен $d(x) = x^2 + d_1 x + d_2$ не имеет вещественных корней. Интеграл от функции третьего типа вычислим с помощью выделения полного квадрата. Сначала считаем, что $D_1 \neq 0$.

$$\begin{aligned} \int \frac{D_1 x + D_2}{x^2 + d_1 x + d_2} dx &= D_1 \int \frac{x + D_2/D_1}{(x + \frac{d_1}{2})^2 + d_2 - \frac{d_1^2}{4}} dx = \\ &= D_1 \int \frac{x + \frac{d_1}{2} - \frac{d_1}{2}}{(x + \frac{d_1}{2})^2 + d_2 - \frac{d_1^2}{4}} dx + D_2 \int \frac{dx}{(x + \frac{d_1}{2})^2 + d_2 - \frac{d_1^2}{4}} = \\ &= \frac{D_1}{2} \int \frac{d(x + \frac{d_1}{2})^2}{(x + \frac{d_1}{2})^2 + d_2 - \frac{d_1^2}{4}} + \left(D_2 - \frac{D_1 d_1}{2} \right) \int \frac{dx}{(x + \frac{d_1}{2})^2 + d_2 - \frac{d_1^2}{4}} = \\ &= \frac{D_1}{2} \ln(x^2 + d_1 x + d_2) + \frac{2D_2 - D_1 d_1}{\sqrt{4d_2 - d_1^2}} \arctg \frac{2x + d_1}{\sqrt{4d_2 - d_1^2}} + C. \end{aligned}$$

В случае $D_1 = 0$ интеграл вычисляется проще, так как нет слагаемого, в котором мы используем подведение под знак дифференциала, вследствие чего отсутствует логарифм.

Элементарные дроби **четвертого типа** имеют вид $\frac{E_1 x + E_2}{(x^2 + e_1 x + e_2)^l}$, $E_1, E_2, e_1, e_2 \in \mathbb{R}$, l – натуральное число, большее 1, и многочлен $d(x) = x^2 + e_1 x + e_2$ не имеет вещественных корней. Для вычисления интегралов от них снова воспользуемся выделением полного квадрата, как и в третьем типе, а затем сделаем замены: $a^2 = e_2 - \frac{e_1^2}{4}$ и $x + \frac{e_1}{2} = t$, $dx = dt$. Получим равенство

$$\begin{aligned} \int \frac{E_1 x + E_2}{(x^2 + e_1 x + e_2)^l} &= \int \frac{E_1 t + (E_2 - \frac{E_1 e_1}{2})}{(t^2 + a^2)^l} = \\ &= \frac{E_1}{2} \int \frac{2t dt}{(t^2 + a^2)^l} + \left(E_2 - \frac{E_1 e_1}{2} \right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^l}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое вычисляется методом подведения под знак дифференциала:

$$\int \frac{2t dt}{(t^2 + a^2)^l} = \int \frac{dt^2}{(t^2 + a^2)^l} = \frac{1}{1-l} \frac{1}{(t^2 + a^2)^{l-1}} + C.$$

Теперь покажем, что интеграл во втором слагаемом выражается в элементарных функциях. Пусть $I_l = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^l}$. Мы знаем, что $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$. Используем интегрирование по частям. Примем в I_l за $f(t)$ выражение $\frac{1}{(t^2+a^2)^l}$, $g'(t)dt = dt$, тогда

$$I_l = \frac{t}{(t^2+a^2)^l} + 2l \int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{l+1}} dt.$$

При этом

$$\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{l+1}} dt = \int \frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{l+1}} dt = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^l} - a^2 \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{l+1}} = I_l - a^2 I_{l+1}.$$

Подставим это выражение в равенство для I_l : $I_l = \frac{t}{(t^2+a^2)^l} + 2lI_l - 2la^2I_{l+1}$, что равносильно

$$I_{l+1} = \frac{1}{2la^2} \frac{t}{(t^2+a^2)^l} + \frac{2l-1}{2l \cdot a^2} I_l.$$

Теперь, полагая $l=2$, выразим I_2 через I_1 и так далее. Таким образом, интеграл I_l можно выразить в элементарных функциях для любого $l \in \mathbb{N}$. Подставляя в результат $t = \frac{2x+c_1}{2}$, получим полное доказательство того, что интеграл от элементарной дроби четвертого типа выражается в элементарных функциях.

Осталось лишь убедиться, что любая рациональная функция представляется в виде суммы многочленов и элементарных дробей. Из этого будет следовать, что любая рациональная функция интегрируема.

Теорема 1. *Любой многочлен с вещественными коэффициентами всегда можно разложить на произведение некоторой константы и множителей того же вида, что знаменатели элементарных дробей.*

Эту теорему мы не будем доказывать. Доказательство можно провести с помощью следствия *основной теоремы алгебры*, в которой утверждается, что любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет n корней в поле комплексных чисел. Так как у многочлена с вещественными коэффициентами корни либо вещественные, либо комплексно сопряжённые, причём эти комплексно сопряжённые корни имеют одинаковую кратность, то и получаются множители четырёх указанных типов. Для интересующихся отметим, что доказательство можно найти в первом томе книги В. А. Зорича.

Заметим, что необязательно в разложении многочлена присутствуют все четыре типа знаменателей. Например, многочлен $P_1(x) = x^2 - 1$ раскладывается только на знаменатели первого типа, так как $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$; однако бывают и другие ситуации:

$$(x^4 + x^2 + 1)^2 = (x^4 + 2x^2 + 1 - x^2)^2 = ((x^2 + 1)^2 - x^2)^2 = (x^2 + x + 1)^2 (x^2 - x + 1)^2,$$

то есть многочлен $P_2(x) = (x^4 + x^2 + 1)^2$ раскладывается только на множители четвёртого типа.

Определение 5. *Рациональная функция называется правильной дробью, если степень её числителя меньше степени знаменателя.*

Теорема 2. *Любая правильная дробь P/Q (степень P меньше степени Q) единственным образом раскладывается в сумму элементарных дробей. Если её знаменатель представляется в виде*

$$Q(x) = C(x-a_1) \cdot \dots \cdot (x-a_n) \cdot (x-b_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x-b_m)^{k_m} \cdot (x^2+c_1x+d_1) \cdot \dots \cdot (x^2+c_rx+d_r) \cdot \\ \cdot (x^2+e_1x+h_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2+e_px+h_p)^{l_p}$$

(все квадратные трёхчлены не имеют вещественных корней, а числа $k_1, \dots, k_m, l_1, \dots, l_p$ натуральные и больше единицы), то разложение записывается в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{x - a_i} + \sum_{i=1}^{k_1} \frac{B_{1i}}{(x - b_1)^i} + \dots + \sum_{i=1}^{k_m} \frac{B_{mi}}{(x - b_m)^i} + \sum_{i=1}^r \frac{C_i x + D_i}{x^2 + c_i x + d_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l_1} \frac{E_{1i} x + H_{1i}}{(x^2 + e_1 x + h_1)^i} + \dots + \sum_{i=1}^{l_p} \frac{E_{pi} x + H_{pi}}{(x^2 + e_p x + h_p)^i}.$$

Доказательство этой теоремы мы не приводим, а интересующиеся могут посмотреть первый том книги В. А. Зорича и второй том книги Г. М. Фихтенгольца.

Теперь мы можем описать алгоритм, по которому производится разложение любой элементарной функции в сумму многочлена и элементарных дробей.

Если дробь неправильная, то есть степень числителя не меньше степени знаменателя, то сначала уголком делим числитель на знаменатель. После выполнения этих действий представим рациональную функцию в виде суммы частного и правильной дроби, в числителе которой стоит остаток от деления, а знаменатель совпадает со знаменателем исходной функции. Затем разбиваем знаменатель на множители (теорема 1) и с помощью метода неопределённых коэффициентов находим разложение рациональной функции в сумму элементарных дробей (теорема 2). При разложении знаменателя на множители можно использовать алгоритм Евклида для нахождения кратных корней (см. В. А. Зорич, “Математический анализ”, 1 том, с. 332 – с. 333). Приведём примеры.

Пример 6. 1) Вычислим интеграл $\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx$. Знаменатель уже разложен на множители нужного вида. Степень числителя меньше степени знаменателя, так что подынтегральная функция является правильной дробью. С помощью метода неопределённых коэффициентов найдём разложение подынтегральной функции в сумму простых дробей.

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x - 2)(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}.$$

Приведём правую часть к общему знаменателю. В этом случае равенство дробей означает равенство их числителей:

$$2x^2 + 2x + 13 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)(x^2 + 1)(x - 2) + (Dx + E)(x - 2).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа, получим систему:

$$\begin{cases} A + B = 0 \text{ (при } x^4), \\ -2B + C = 0 \text{ (при } x^3), \\ 2A + B - 2C + D = 2 \text{ (при } x^2), \\ -2B + C - 2D + E = 2 \text{ (при } x^1), \\ A - 2C - 2E = 13 \text{ (при } x^0). \end{cases}$$

Решая её (например, с помощью метода элементарных преобразований), найдём

$$A = -B = 1, \quad C = -2, \quad D = -3, \quad E = -4.$$

Таким образом,

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x - 2)(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x - 2} - \frac{x + 2}{x^2 + 1} - \frac{3x + 4}{(x^2 + 1)^2}.$$

Каждое из слагаемых справа мы умеем интегрировать. В итоге получим

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{x+2}{x^2+1} dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3-4x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4 \operatorname{arctg} x + C.\end{aligned}$$

Отметим, что вместо метода неопределённых коэффициентов мы могли подставить в равенство числителей $x = 2$ и найти A , а затем либо подставить мнимую единицу i вместо x и найти D , после чего уже отыскать C и D с помощью метода неопределённых коэффициентов, либо воспользоваться методом неопределённых коэффициентов сразу после нахождения A . Тогда системы уравнений были бы проще.

2) Вычислим интеграл $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx$. Сделаем замену $t = \sqrt{x+1}$, тогда $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow dx = 2t dt$. После такой замены наш интеграл примет вид $\int 2 \frac{t+2}{t^3-1} dt$, то есть теперь это интеграл от рациональной функции. Тогда получим

$$\begin{aligned}2 \int \frac{t+2}{t^3-1} dt &= 2 \int \frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)} dt = \int \frac{2}{t-1} dt - \int \frac{2t+2}{t^2+t+1} dt = \\ &= \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

Подставляя $t = \sqrt{x+1}$, получаем ответ.

Вообще, рассмотрим рациональное выражение

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

где P и Q — многочлены от двух переменных. Если $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, то такое выражение интегрируется в рациональных функциях. Это можно доказать, с помощью подстановок Эйлера или подстановок Абеля (с помощью подходящих параметризаций кривых). Подробнее такие вещи мы обсудим на семинарах.

3) В пункте 2 мы увидели, как интегралы можно сводить к рациональным функциям. Очень часто это срабатывает, если под интегралом стоит дробь, зависящая от тригонометрических функций. Вообще, сведение рациональных выражений от радикалов, тригонометрических функций и т. д. называется рационализацией. Дробь от тригонометрических выражений могут быть рационализированы с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$. При этом $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Мы видим, что после такой замены любое рациональное выражение от тригонометрических функций станет рациональной функцией от переменной t . Такая подстановка называется **универсальной тригонометрической подстановкой**.

Отметим, что иногда бывает удобнее делать и другие замены в тригонометрических выражениях. Вычислим, например, интеграл $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$. Если положить $t = \operatorname{tg} x$, то, применяя метод неопределённых коэффициентов, получим

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx &= \int \frac{t^2}{(1+t)(1+t^2)^2} dt = \int \left(\frac{1}{4t+1} - \frac{1}{4t^2+1} + \frac{1}{2(t^2+1)^2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{4} \frac{1+t}{1+t^2} + C = \frac{1}{4} \ln |\sin x + \cos x| - \frac{1}{4} \cos x (\sin x + \cos x) + C.\end{aligned}$$

О нахождении первообразных можно прочитать в книге Г. М. Фихтенгольца “Курс дифференциального и интегрального исчисления”, том 2, глава 8. Материал изложен очень ясно, приводится много примеров, что, несомненно, будет полезно для читателей.

Лекция 3

Интеграл Римана

Мы начинаем изучение важного объекта математического анализа – определённого интеграла. Пусть функция f определена на интервале (α, β) . Под определённым интегралом функции f на отрезке $[a, b]$, содержащемся в этом интервале, можно понимать число, равное площади криволинейной трапеции, заключенной между прямыми $y = 0$, $x = a$, $y = b$, и графиком функции $y = f(x)$. При этом площадь той части трапеции, которая находится над осью абсцисс, берут со знаком “+”, а площадь части, которая ниже оси абсцисс – со знаком “−” (см. рис. 1).

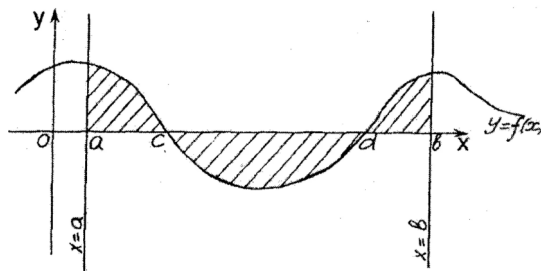


Рис. 1: Над (a, c) и (d, b) с плюсом, над (c, d) с минусом

Определённый интеграл обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$, a – нижний предел интегрирования, b – верхний предел интегрирования.

Конечно, приведённые выше факты никак не могут быть определением интеграла. Мы пока не знаем, что такое площадь, а этот вопрос требует подробного изучения, выходящего за рамки нашего курса. Позже, однако, мы немного коснёмся темы площади.

Кроме того, интерес вызывает вопрос о том, почему обозначение определённого интеграла почти такое, как и неопределённого, а также важно понять, какова связь между определённым и неопределённым интегралами. Эта связь будет ясна после доказательства формулы Ньютона – Лейбница. Сейчас только отметим, что при изучении определённого интеграла мы можем рассматривать этот интеграл при условии, что один предел интегрирования фиксирован, а второй меняется в пределах (α, β) . Например, при фиксированном a мы будем для каждого $b \in (\alpha, \beta)$ получать своё значение интеграла (b может быть и меньше, чем a). Таким образом, сам интеграл $\int_a^b f(x)dx$ при изменении b является функцией F , зависящей от b и определённой на отрезке (α, β) . Из теоремы Ньютона – Лейбница мы выведем, что если f непрерывна, то функция F является первообразной для функции f на интервале (α, β) . Более того, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, причём это равенство верно для любой первообразной из множества всех первообразных функции f . В этом и состоит связь между неопределённым и определённым интегралом. Надо сказать, что исторически символ интеграла “ $\int$ ” появился как раз для обозначения определённого интеграла. Это стилизованная буква S от начальной буквы латинского слова “Summa”.

Перейдём к точным определениям.

Определение 6. Конечный набор точек $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ($n > 1$) называется **разбиением** отрезка $[a, b]$, если $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Отрезок разбиения – это отрезок вида $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$.

Величина $d(T) = \max_{1 \leq k \leq n} |\Delta_k|$ называется **диаметром разбиения** T .

Пусть $\xi_k \in \Delta_k$, $k = 1, \dots, n$. Совокупность точек $\{x_0, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n\}$ называется **размеченным разбиением** отрезка $[a, b]$ и обозначается (T, ξ) .

Множество точек $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ называется **разметкой** разбиения (T, ξ) .

Интегральной суммой функции f , соответствующей размеченному разбиению (T, ξ) называется сумма $\sigma(f, T, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |\Delta_k|$.

Определение 7. Число I называется **определённым интегралом (Римана)** от функции f на отрезке $[a, b]$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любого размеченного разбиения (T, ξ) отрезка $[a, b]$ с диаметром $d(T) < \delta$ выполнено неравенство $|I - \sigma(f, T, \xi)| < \varepsilon$. Число I обозначается символом $\int_a^b f(x) dx$. Функция f , для которой существует определённый интеграл на отрезке $[a, b]$, называется **интегрируемой по Риману** на $[a, b]$. Класс функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$ обозначается $R[a, b]$. Таким образом, тот факт, что функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, можно записать в виде $f \in R[a, b]$.

Геометрическую интерпретацию всех объектов из определений 1 и 2 см. на рис. 2.

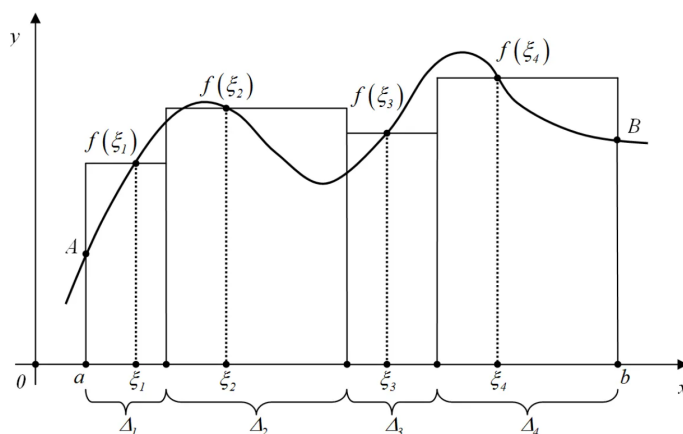


Рис. 2: Иллюстрация для $n = 4$

Вычисление определённых интегралов по определению или с помощью метода интегральных сумм – задача зачастую непростая, однако приведём несколько примеров, где такое вычисление провести несложно. При этом мы будем пользоваться некоторыми фактами, которые пока не доказаны. Именно, мы будем использовать тот факт, что непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке. В свою очередь, из интегрируемости функции на отрезке уже следует, что можно выбирать любое разбиение и любую разметку, так как предел интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю один и тот же. Таким образом, мы будем подбирать наиболее удобное для нас разбиение и наиболее удобную разметку. Такой метод интегрирования называется **методом интегральных сумм**.

Пример 7. 1) Пусть функция f принимает значение c для любой точки $x \in [a, b]$. Тогда для любой интегральной суммы функции f на этом отрезке будем иметь

$$\sigma(f, T, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |\Delta_k| = c \sum_{k=1}^n |\Delta_k| = c(b - a).$$

Таким образом, $\int_a^b c \, dx = c(b-a)$.

2) Рассмотрим функцию $y = x$ на отрезке $[0, 1]$. Эта функция непрерывна на отрезке $[0, 1]$, а значит, и интегрируема на нём. Разобьём отрезок $[0, 1]$ на n одинаковых отрезков. Тогда длина каждого отрезка будет равна $1/n$. Соответствующее разбиение T состоит из точек $x_0 = 0$, $x_1 = 1/n$, $x_2 = 2/n$, ..., $x_n = n/n = 1$. В качестве точек разметки выберем правые концы отрезков разбиения, т. е. $\xi_1 = 1/n$, $\xi_2 = 2/n$, ..., $\xi_n = 1$. Тогда для соответствующей интегральной суммы имеем

$$\sigma(f, T, \xi) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2n^2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Здесь n стремится к бесконечности, так как при вычислении интеграла мы устремляем диаметр разбиения к нулю, а в нашем случае $d(T) = 1/n$. Таким образом, $\int_0^1 x \, dx = 1/2$.

Предложение 5. Функция f , интегрируемая по Риману на отрезке $[a, b]$, ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Пусть f не ограничена на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого разбиения T отрезка $[a, b]$ существует такой отрезок разбиения $\Delta_r = [x_{r-1}, x_r]$, что на нём f не ограничена. Точки разметки ξ_1 , ξ_2 , ξ_{r-1} , ξ_{r+1} , ..., ξ_n (то есть точки разметки всех отрезков, кроме Δ_r) выберем и зафиксируем. Положим

$$A = \left| \sum_{k=1, k \neq r}^n f(\xi_k) |\Delta_k| \right|.$$

Для любого числа $M > 0$ можно выбрать точку $\xi_r \in \Delta_r$, для которой $|f(\xi_r)| > \frac{M+A}{|\Delta_r|}$. Тогда

$$|\sigma(f, T, \xi)| = \left| \sum_{k=1, k \neq r}^n f(\xi_k) |\Delta_k| + f(\xi_r) |\Delta_r| \right| > \frac{M+A}{|\Delta_r|} |\Delta_r| - A = M.$$

Таким образом, интегральная сумма функции f не ограничена, поэтому f не интегрируема. Противоречие. $\square$

При этом возникает вопрос, верно ли обратное утверждение. Отрицательный ответ на этот вопрос даёт следующий пример.

Пример 8. Рассмотрим функцию Дирихле на отрезке $[a, b]$: $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Для отрезков любого разбиения можно брать разметку, состоящую только из рациональных чисел (тогда соответствующая интегральная сумма будет равна $b-a$) или только из иррациональных чисел (тогда интегральная сумма будет равна 0). Таким образом, не существует числа, в ε -окрестности которого будут лежать все интегральные суммы с достаточно малым диаметром разбиения. Это означает, что функция Дирихле не интегрируема по Риману ни на каком отрезке, хотя и является ограниченной.

Упражнение. В условиях примера 2 для любого числа $p \in [0, b-a]$ постройте такое размеченное разбиение (T, ξ) , что интегральная сумма $\sigma(D, T, \xi) = p$.

Критерий Дарбу интегрируемости функции Риману

Мы переходим к изучению необходимых и достаточных условий интегрируемости функции по Риману. Будут использоваться обозначения предыдущих лекций.

Определение 8. *Верхней суммой Дарбу функции f на отрезке $[a, b]$, соответствующей разбиению T этого отрезка, называется сумма вида*

$$S(T) = \sum_{k=1}^n M_k |\Delta_k|, \text{ где } M_k = \sup_{x \in \Delta_k} f(x).$$

Нижней суммой Дарбу функции f на отрезке $[a, b]$, соответствующей разбиению T этого отрезка, называется сумма вида

$$s(T) = \sum_{k=1}^n m_k |\Delta_k|, \text{ где } m_k = \inf_{x \in \Delta_k} f(x).$$

Отметим, что для непрерывных на отрезке функций верхние суммы Дарбу соответствуют интегральным суммам с такими размеченными разбиениями, что в качестве точек разметки выбираются точки максимумов функции на отрезках разбиений. С нижними суммами Дарбу всё аналогично, только в разметку входят точки минимумов. Существование таких точек следует из второй теоремы Вейерштрасса. Однако существуют интегрируемые на отрезках функции, не являющиеся непрерывными, а для таких функций суммы Дарбу не всегда совпадают с интегральными суммами. В качестве **упражнения** читатели могут построить пример функции и такой суммы Дарбу для неё, что эта сумма не совпадает ни с какой интегральной суммой с тем же разбиением, что и у самой суммы Дарбу. На рисунке ниже представлены суммы Дарбу.

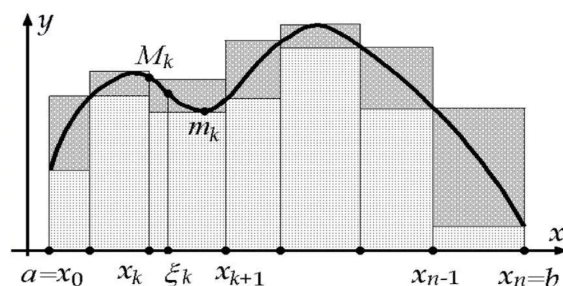


Рис. 3: Верхняя и нижняя суммы Дарбу

Определение 9. Число $\bar{I} = \inf_T S(T)$ называется *верхним интегралом функции f на отрезке $[a, b]$* , а число $\underline{I} = \sup_T s(T)$ — её *нижним интегралом на этом отрезке*. Здесь точная нижняя и точная верхняя грани берутся по всем возможным разбиениям отрезка $[a, b]$.

В следующем предложении мы докажем основные свойства сумм Дарбу.

Предложение 6. 1) Для любого разбиения T , его разметки ξ и соответствующей им интегральной суммы $\sigma(f, T, \xi)$ выполнены неравенства $s(T) \leq \sigma(f, T, \xi) \leq S(T)$;

2) для фиксированного разбиения T имеем $s(T) = \inf_{\xi} \sigma(f, T, \xi)$, а $S(T) = \sup_{\xi} \sigma(f, T, \xi)$;

3) для любых разбиений T_1 и T_2 имеем $s(T_1) \leq S(T_2)$;

4) для ограниченной функции f существуют $\underline{I}$ и $\bar{I}$ и для любого разбиения T выполнены неравенства $s(T) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S(T)$;

5) для любого разбиения T имеем $\Omega(T) := S(T) - s(T) \geq \bar{I} - \underline{I}$.

Доказательство. 1) При всех $\xi_k \in \xi$ справедливы неравенства (в обозначениях определения 1):

$$m_k |\Delta_k| \leq f(\xi_k) |\Delta_k| \leq M_k |\Delta_k|.$$

Суммируя по всем k от 1 до n , получаем доказательство пункта 1.

2) Докажем, что нижняя сумма Дарбу – это инфимум интегральных сумм. То, что $s(T)$ является нижней гранью для $\sigma(f, T, \xi)$, следует из пункта 1. С другой стороны, по определению точной нижней грани для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\xi_k \in \Delta_k$, что справедливо неравенство $f(\xi_k) < m_k + \varepsilon$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n m_k |\Delta_k| \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |\Delta_k| < \sum_{k=1}^n (m_k + \varepsilon) |\Delta_k| = s(T) + \varepsilon(b-a),$$

то есть

$$s(T) \leq \sigma(f, T, \xi) < s(T) + \varepsilon(b-a).$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то по второму определению инфимума и супремума получаем, что $s(T) = \inf_{\xi} \sigma(f, T, \xi)$. Равенство $S(T) = \sup_{\xi} \sigma(f, T, \xi)$ доказывается таким же образом.

3) Заметим, что если добавить к любому разбиению новые точки, то верхняя сумма Дарбу либо не изменится, либо уменьшится, а нижняя – либо не изменится, либо увеличится (сделайте рисунок). Пусть $T_3 = T_1 \cup T_2$. Тогда, в силу сделанного замечания и определения сумм Дарбу, $s(T_1) \leq s(T_3) \leq S(T_3) \leq S(T_2)$.

4) Так как функция f ограничена, то для любого разбиения T отрезка $[a, b]$, существует точная верхняя и точная нижняя грань значений функции f на каждом из отрезков разбиения T , поэтому определены $s(T)$ и $S(T)$.

В силу свойства 3 множество значений всех нижних сумм Дарбу D_1 ограничено сверху элементами множества значений всех верхних сумм Дарбу D_2 , а D_2 ограничено снизу элементами D_1 , поэтому у множества D_1 существует точная верхняя грань, которая по определению 2 равна $\underline{I}$, а у множества D_2 – точная нижняя грань, в силу определения 2 равная $\bar{I}$. При этом по определению точной верхней грани $\underline{I}$ не больше любого элемента множества D_2 , поэтому $\underline{I} \leq \bar{I}$. Тогда $s(T) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S(T)$.

$$5) \Omega(T) := S(T) - s(T) \geq \bar{I} - s(T) \geq \bar{I} - \underline{I}. \quad \square$$

Теперь мы можем сформулировать и доказать критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману.

Теорема 3. Критерий Дарбу интегрируемости. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$. Тогда f интегрируема на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T : d(T) < \delta \quad S(T) - s(T) < \varepsilon$$

(короче это условие записывается в виде: $\lim_{d(T) \rightarrow 0} (S(T) - s(T)) = 0$).

Доказательство. Необходимость. Пусть функция f интегрируема. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любого размеченного разбиения (T, ξ) отрезка $[a, b]$ с диаметром $d(T) < \delta$ существует такое число I , что

$$I - \varepsilon < \sigma(f, T, \xi) < I + \varepsilon.$$

Возьмём любое разбиение T_1 с разметкой ξ_1 и диаметром $d(T_1) < \delta$. Тогда по свойству 2 имеем $s(T_1) = \inf_{\xi_1} \sigma(f, T_1, \xi_1)$, а $S(T_1) = \sup_{\xi_1} \sigma(f, T_1, \xi_1)$, откуда получим

$$I - \varepsilon \leq s(T_1) \leq I + \varepsilon \text{ и } I - \varepsilon \leq S(T_1) \leq I + \varepsilon.$$

Таким образом, числа $s(T_1)$ и $S(T_1)$ принадлежат отрезку $[I - \varepsilon, I + \varepsilon]$, откуда получаем $|S(T_1) - s(T_1)| \leq 2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и разбиения T_1 с диаметром $d(T_1) < \delta$, получаем доказательство необходимости.

Достаточность. Пусть $\lim_{d(T) \rightarrow 0} (S(T) - s(T)) = 0$. Нужно доказать, что существует предел $\lim_{d(T) \rightarrow 0} \sigma(f, T, \xi)$. Прежде всего убедимся, что $\underline{I} = \bar{I}$. Действительно, в силу свойства 5 для любого разбиения T

$$\Omega(T) := S(T) - s(T) \geq \bar{I} - \underline{I} \geq 0,$$

а так как $S(T) - s(T)$ стремится к 0, то $\underline{I} = \bar{I}$. Обозначим это общее значение через I и докажем, что $\lim_{d(T) \rightarrow 0} \sigma(f, T, \xi) = I$. В силу существования предела $S(T) - s(T)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения T с диаметром, меньшим δ , выполнено неравенство $S(T) - s(T) < \varepsilon$. В силу свойства 2 любая интегральная сумма $\sigma(f, T, \xi)$ лежит на отрезке $[s(T), S(T)]$. В силу определения верхнего и нижнего интегралов на этом же отрезке лежит число I . При этом длина отрезка $[s(T), S(T)]$ меньше ε , поэтому при $d(T) \rightarrow 0$ $\sigma(f, T, \xi) \rightarrow I$. $\square$

Отметим, что $\Omega(T) := S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) |\Delta_k|$. Величину $\omega_k := M_k - m_k$ назовём *колебанием функции* f на отрезке $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$. Таким образом, $\Omega(T) = \sum_{k=1}^n \omega_k |\Delta_k|$.

Теперь мы можем сформулировать следствие критерия.

Теорема 4. Критерий интегрируемости в терминах колебаний. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$. Тогда f интегрируема на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $\lim_{d(T) \rightarrow 0} \Omega(T) = 0$.

Эта теорема очень полезна при доказательстве интегрируемости.

Упражнение. Доказать, что функция Римана

$$R(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{если } x = m/n \text{ (} m \text{ и } n \text{ взаимно просты),} \\ 0, & \text{если } x \text{ — рациональное число} \end{cases}$$

интегрируема на отрезке $[0, 1]$.

Докажем теперь теорему об эквивалентности трёх условий интегрируемости функции по Риману.

Теорема 5. Три условия интегрируемости. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$. Тогда f интегрируема на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из трёх эквивалентных условий:

- 1) $\lim_{d(T) \rightarrow 0} \Omega(T) = 0$;
- 2) $\underline{I} = \bar{I}$;
- 3) $\inf_T (S(T) - s(T)) = 0$.

Доказательство. Для доказательства достаточно установить следующие импликации:

$$1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1).$$

1. Импликация $1) \Rightarrow 2)$ была получена при доказательстве достаточности теоремы 1.

2. Для доказательства импликации $2) \Rightarrow 3)$ покажем, что

$$\inf_T (S(T) - s(T)) = \bar{I} - \underline{I}.$$

Неравенство $S(T) - s(T) \geq \bar{I} - \underline{I}$ — это свойство 5 сумм Дарбу, то есть разность между верхним и нижним интегралами является нижней гранью для множества разностей верхней и нижней сумм Дарбу.

С другой стороны, так как $\sup_T s(T) = \underline{I}$, а $\inf_T S(T) = \bar{I}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение T_1 , что $s(T_1) > \underline{I} - \varepsilon$ и такое разбиение T_2 , что $S(T_2) < \bar{I} + \varepsilon$. Тогда для разбиения $T_3 = T_1 \cup T_2$ будем иметь неравенства

$$\underline{I} - \varepsilon < s(T_1) \leq s(T_3) \leq S(T_3) \leq S(T_2) < \bar{I} + \varepsilon,$$

откуда

$$\bar{I} - \underline{I} + 2\varepsilon = \bar{I} + \varepsilon - (\underline{I} - \varepsilon) > S(T_3) - (\underline{I} - \varepsilon) > S(T_3) - s(T_3),$$

то есть $\bar{I} - \underline{I} \leq S(T_3) - s(T_3) < \bar{I} - \underline{I} + 2\varepsilon$, что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и означает, что

$$\inf_T (S(T) - s(T)) = \bar{I} - \underline{I}.$$

Так как мы доказываем импликацию $2) \Rightarrow 3)$, а в пункте 2 дано, что $\bar{I} = \underline{I}$, то

$$\inf_T (S(T) - s(T)) = 0.$$

3. Докажем импликацию $3) \Rightarrow 1)$. Теперь по условию нам дано, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение T_1 , что $\Omega(T_1) := S(T_1) - s(T_1) < \varepsilon$. Нужно доказать, существование такого $\delta > 0$, что для всех разбиений T с диаметрами $d(T) < \delta$ разность сумм Дарбу $\Omega(T)$ меньше по крайней мере произведения какой-то положительной константы и ε .

Пусть диаметр разбиения T меньше δ , числовое значение которого подберём после проведения оценок. Рассмотрим разбиение $T_2 = T_1 \cup T$. Тогда

$$\Omega(T_2) \leq \Omega(T_1) < \varepsilon \text{ и } \Omega(T_2) \leq \Omega(T),$$

откуда

$$\Omega(T) = \Omega(T_2) + (\Omega(T) - \Omega(T_2)) < \varepsilon + \Omega(T) - \Omega(T_2)$$

и для оценки сверху величины $\Omega(T)$ достаточно оценить разность $\Omega(T) - \Omega(T_2)$. Разбиение T_2 образовано добавлением к точкам разбиения T точек разбиения T_1 , то есть на некоторых отрезках разбиения T появляются точки разбиения T_1 . Рассмотрим только такие отрезки. Если n — это количество точек разбиения T_1 , то таких отрезков не больше, чем $n+1$ (так как точки разбиения T_2 могут попасть на концы отрезков разбиения T). Так как функция f по условию ограничена, то существует такое число $M > 0$, что при всех $x \in [a, b]$ выполнено неравенство $|f(x)| \leq M$, поэтому на каждом рассматриваемом отрезке разность между $\sup f(x)$ и $\inf f(x)$ не превосходит $2M$. При этом длина каждого такого отрезка меньше δ . Для остальных отрезков слагаемые в $\Omega(T)$ и $\Omega(T_2)$ совпадают, поэтому

$$\Omega(T) - \Omega(T_2) < 2 \cdot 2M(n+1)\delta = 4M(n+1)\delta.$$

Таким образом при $\delta = \frac{\varepsilon}{4M(n+1)}$ получим оценку

$$\Omega(T) < \varepsilon + 4M(n+1) \cdot \frac{\varepsilon}{4M(n+1)} = 2\varepsilon.$$

Итак, доказано, что при любом $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \frac{\varepsilon}{4M(n+1)}$, при котором для любого разбиения T с диаметром $d(T) < \delta$ выполнено неравенство $\Omega(T) < 2\varepsilon$, то есть

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} \Omega(T) = 0.$$

□

Таким образом, из только что доказанной теоремы следует, что **ограниченная на $[a, b]$ функция f интегрируема, тогда и только тогда, когда $\inf_T (S(T) - s(T)) = 0$** . Это утверждение мы будем называть **инфимум-критерием**. Его преимущество перед критерием интегрируемости (теорема 1) состоит в том, что нам не требуется проверять сразу для *всех* разбиений достаточно малого диаметра, что разности верхней и нижней сумм Дарбу от них меньше заданного $\varepsilon > 0$, а важно подобрать для этого ε *одно какое-нибудь разбиение* T , для которого $S(T) - s(T) < \varepsilon$. В теоремах, которые мы будем изучать дальше, доказательство иногда будет строиться как раз на том, чтобы предъявить *хотя бы одно подходящее разбиение*.

Важно отметить, что вовсе необязательно рассматривать любые разбиения отрезка. Можно ограничиться лишь некоторыми простыми разбиениями, такими, чтобы при выполнении для этих разбиений некоторых условий функция оказывалась бы интегрируемой.

Пусть T_n – разбиение отрезка $[a, b]$ на n равных частей, S_n и s_n – верхняя и нижняя суммы Дарбу, соответствующие этому разбиению (естественно, функция f задана на $[a, b]$). Тогда справедлив следующий критерий интегрируемости.

Теорема 6. Критерий в терминах равномерных разбиений. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$. Тогда f интегрируема на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - s_n) = 0$.

Доказательство. Необходимость. Так как $d(T_n) = (b - a)/n$, то $d(T_n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$, поэтому необходимость прямо следует из теоремы 1.

Достаточность. В силу определения $\underline{I}$ и $\bar{I}$ для любого разбиения T выполнено

$$S(T) - s(T) \geq \bar{I} - \underline{I} \geq 0,$$

откуда следует $S_n - s_n \geq \bar{I} - \underline{I} \geq 0$, поэтому, в силу того, что $S_n - s_n$ стремится к нулю, получаем равенство $\bar{I} = \underline{I}$, то есть выполнено условие 2 теоремы 3. □

Лекция 4

Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману

Для понимания материала ниже нам потребуется внимательно изучить критерий интегрируемости функции в терминах колебаний. *Колебанием функции f на множестве A называется величина*

$$\omega(f, A) = \sup_{x, y \in A} |f(x) - f(y)| = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x).$$

Колебанием функции f в точке a назовем величину

$$\omega(a) = \inf_{\delta > 0} \sup_{x, y \in U_\delta(a)} (f(x) - f(y)) = \inf_{\delta > 0} \left(\sup_{x \in U_\delta(a)} f(x) - \inf_{x \in U_\delta(a)} f(x) \right),$$

где $U_\delta(a)$ — δ -окрестность точки a .

Предложение 7. $f \in C(a) \Leftrightarrow \omega(a) = 0$.

Доказательство. Необходимость. Если функция непрерывна, в точке a , то по критерию Коши предела функции $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in U_\delta(a) |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Это значит, что $\forall \varepsilon > 0$ имеем $\inf_{\delta > 0} \sup_{x, y \in U_\delta(a)} (f(x) - f(y)) < \varepsilon$, то есть $\omega(a) = 0$.

Достаточность. По условию $\inf_{\delta > 0} \sup_{x, y \in U_\delta(a)} (f(x) - f(y)) = 0$, то есть для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что при всех $x, y \in U_\delta(a)$ имеем $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, а тогда если зафиксировать $y = a$, то получим, что $f \in C(a)$ по определению. $\square$

Предложение 8. Множество точек $E(\alpha) = \{c \in [a, b] : \omega(c) \geq \alpha\}$ замкнуто.

Доказательство. Докажем, что множество $E(\alpha)$ содержит все свои предельные точки. Пусть c_0 — предельная точка множества $E(\alpha)$. Тогда существует такая последовательность $\{c_n\} \subset E(\alpha)$, что $c_n \rightarrow c$ при $n \rightarrow +\infty$, причём при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $\omega(c_n) \geq \alpha$. Для любого $\delta > 0$ существует такое N , что при всех натуральных $n > N$ $c_n \in U_\delta(c_0)$. Пусть

$$\delta_1 = \min\{c_n - (c_0 - \delta), (c_0 + \delta) - c_n\}.$$

Тогда $U_{\delta_1}(c_n) \subset U_\delta(c_0)$, поэтому

$$\sup_{x, y \in U_{\delta_1}(c_n)} (f(x) - f(y)) \geq \sup_{x, y \in U_\delta(c_0)} (f(x) - f(y)) \geq \omega(c_n) \geq \alpha.$$

Так как это верно при произвольном $\delta > 0$, то отсюда следует, что

$$\omega(c_0) = \inf_{\delta > 0} \sup_{x, y \in U_\delta(c_0)} (f(x) - f(y)) \geq \alpha,$$

то есть $c_0 \in E(\alpha)$. $\square$

Вспомним, что в критерии интегрируемости по Риману мы рассматривали сумму

$$\Omega(T) := S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) |\Delta_k|.$$

Величина $\omega_k := M_k - m_k$ является колебанием функции f на отрезке $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$. Таким образом,

$$\Omega(T) = \sum_{k=1}^n \omega_k |\Delta_k| = \sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) |\Delta_k|.$$

Согласно критерию интегрируемости, $f \in R[a, b]$ в том и только в том случае, когда при любом $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при любом разбиении T с диаметром, меньшим δ , выполнено неравенство $\sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) |\Delta_k| < \varepsilon$.

Если функция f ограничена, то сумма $\sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) |\Delta_k|$ будет достаточно малой, если у функции “не очень много” точек, в которых колебание не равно нулю, так как тогда в силу ограниченности f эти колебания представляют собой ограниченное множество чисел, а эти числа умножаются на длины отрезков, меньшие достаточно малого числа $\delta > 0$, так что общая сумма может быть сделана сколь угодно малой с помощью выбора δ . Слова “не очень много” ниже получают точный математический смысл, но нужно понимать, то при уменьшении диаметра разбиения количество слагаемых в Ω -сумме увеличивается, поэтому в случае интегрируемости суммарная длина тех отрезков, которые содержат точки с ненулевыми колебаниями (то есть согласно упражнению 1 точки разрыва) должна становиться сколь угодно малой при уменьшении длин отрезков. Таким образом, важно, чтобы сумма длин отрезков, *покрывающих* точки, в которых колебания не равны нулю, уменьшалась при уменьшении диаметра разбиения.

Для того, чтобы формализовать записанные выше наблюдения, нам потребуются понятия из теории меры, так что отвлечёмся на то, чтобы в самых общих чертах познакомиться с теорией меры и в итоге сформулировать нужные нам точные определения.

Мы умеем вычислять длины таких простейших множеств на прямой, как отрезки, интервалы, полуинтервалы. Есть и другие множества, которым можно приписать определённые числовые значения, которые мы называем длинами. Например, объединение отрезков $[0, 1]$ и $[3, 5]$ имеет длину $(1 - 0) + (5 - 3) = 3$. Однако многим достаточно просто устроенным множествам на прямой понятие длины приписать затруднительно. Вопросы, связанные с возможностью измерить длину произвольного множества на прямой, изучались очень давно, но решающие результаты появились только в начале двадцатого века в работах Э. Бореля и А. Лебега.

В итоге был описан класс множеств, которым можно приписать понятие длины. Аналогичные вопросы рассматривались (и были решены в тех же работах) и для понятия площади на плоскости, и для понятия объёма в пространстве (не только трёхмерном). Понятия длины, площади и объёма объединяются общим названием меры множества, то есть на прямой мера множества – это длина множества, на плоскости мерой называют площадь, а в пространстве мера – это объём. Конечно, это лишь описание того, что (в самых простых случаях!) называют мерой, а не точное определение. Интересующиеся могут прочитать про меру Лебега в книге А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина “Элементы теории функций и функционального анализа” или в учебнике В. И. Богачёва и О. Г. Смолянова “Действительный и функциональный анализ”.

Для наших целей необходимо определить только множества меры нуль на прямой, то есть описать те множества, которые в определённом смысле имеют нулевую длину. Перейдём к точным формулировкам.

Определение 10. Множество E на вещественной прямой называется **множеством лебеговой меры нуль**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая не более чем счетная

система интервалов $\{I_n\}_{n=1}^{+\infty}$, что $E \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ (то есть эта система интервалов образует покрытие множества E) и $\sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| < \varepsilon$. Пустое множество имеет лебегову меру нуль.

Приведём некоторые примеры.

Пример 9. 1) Если множество E состоит из одной точки, то можно взять систему из одного содержащего эту точку интервала, причём длина интервала может быть выбрана сколь угодно малой. Таким образом, множество из одной точки имеет лебегову меру нуль.

2) Пусть множество E состоит из конечного числа точек $\{a_k\}_{k=1}^n$. Для нужного покрытия с суммарной длиной меньше ε выберем такие интервалы $\{I_k\}_{k=1}^n$, что $a_k \in I_k$ и $|I_k| < \frac{\varepsilon}{2^n}$, $k = 1, \dots, n$. Тогда система интервалов $\{I_k\}_{k=1}^n$ удовлетворяет определению 1.

3) Пусть множество E состоит из счётного множества точек $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$. Для заданного $\varepsilon > 0$ возьмём такую систему интервалов $\{I_k\}_{k=1}^{+\infty}$, что $a_k \in I_k$ и $|I_k| < \frac{\varepsilon}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| < \varepsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \varepsilon.$$

Таким образом, мы построили счётную систему интервалов, покрывающую множество E , с суммарной длиной меньше заданного ε , а значит, любое счётное множество имеет лебегову меру нуль. Полезно отметить, что в частности, множество всех рациональных чисел имеет меру Лебега нуль.

Упражнение 1. Доказать, что отрезок $[0, 1]$ не является множеством лебеговой меры нуль.

Отметим, что из результата упражнения 2 следует ещё новое доказательство того, что отрезок не является счётным множеством. Действительно, будучи счётным множеством, отрезок бы являлся множеством лебеговой меры нуль. Однако существуют и примеры множеств мощности континуума, которые имеют меру нуль по Лебегу.

Упражнение 2. Привести пример множества мощности континуум, имеющего лебегову меру нуль.

Укажем некоторые свойства множеств меры нуль по Лебегу.

1) **Подмножество множества E лебеговой меры нуль само является множеством лебеговой меры нуль.** Действительно, любое покрытие интервалами множества E является также и покрытием любого его подмножества, так что и любое подмножество можно покрыть не более чем счётным числом интервалов со сколь угодно малой суммарной длиной.

2) Пусть множества E_n ($n \in \mathbb{N}$) имеют лебегову меру нуль каждое. Тогда множество $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ имеет лебегову меру нуль. Действительно, покроем E_n интервалами суммарной длины меньше $\frac{\varepsilon}{2^n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, тогда множество E окажется покрытым интервалами с суммарной длиной меньше ε .

3) **В определении множества лебеговой меры нуль можно заменить интервалы на отрезки.** Если уже существует покрытие интервалами, то добавление к ним их концов даёт покрытие отрезками с нужными свойствами. Если же изначально есть покрытие отрезками с нужными свойствами, то мы можем увеличить длину каждого

отрезка так, чтобы суммарная длина изменилась на любое сколь угодно малое число. Затем в новых отрезках отбросим концы и получим покрытие интервалами. Таким образом, если можно покрыть отрезками сколь угодно малой суммарной длины, то можно покрыть и интервалами сколь угодно малой суммарной длины.

Приведём теперь критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

Теорема 7. Критерий Лебега интегрируемости по Риману. *Функция f интегрируема на $[a, b]$ в том и только том случае, когда она ограничена на $[a, b]$ и множество E её точек разрыва на $[a, b]$ является множеством лебеговой меры нуль.*

Доказательство. Необходимость. Ограниченность получается из того, что функция интегрируема по условию. Отметим, что

$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n, \text{ где } E_n = \{c \in [a, b] : \omega(c) \geq 1/n\}.$$

Если мера Лебега всех множеств E_n ($n \in \mathbb{N}$) равна нулю, то и мера множества E в силу свойства 2 будет равна нулю.

Предположим, что найдётся такое $m \in \mathbb{N}$, что E_m не является множеством лебеговой меры нуль. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любой системы интервалов $\{I_l\}_{l \in \mathbb{N}}$, такой, что $E_m \subset \bigcup_{l \in \mathbb{N}} I_l$, найдётся $l_0 \in \mathbb{N}$, такое, что $|I_1| + \dots + |I_{l_0}| \geq \varepsilon_0$. Это l_0 зависит от взятой системы интервалов, покрывающих E_m .

Возьмём любое разбиение T отрезка $[a, b]$ и рассмотрим только те отрезки Δ_k , для каждого из которых хотя бы одна точка множества E_m является *внутренней*. На каждом таком отрезке колебание функции f не менее $1/m$. Сумма длин этих отрезков не меньше ε_0 . Действительно, среди точек множества T может содержаться лишь конечное подмножество P точек множества E_m . Если сумма длин выбранных Δ_k равна какому-то числу $\varepsilon_1 > 0$, которое меньше ε_0 , то покрыв конечное подмножество P конечным числом интервалов с суммарной длиной, меньшей, чем $\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{2}$, и взяв объединение этих интервалов со всеми Δ_k , получим, если выбросить концы отрезков Δ_k , покрытие множества E_m интервалами, с суммарной длиной меньше ε_0 . Пришли к противоречию.

Итак, для любого разбиения T найдутся отрезки этого разбиения с суммарной длиной не меньше ε_0 , на каждом из которых колебание не меньше $1/m$. Таким образом, построенная по любому разбиению сумма $\Omega(T) = \sum_{k=1}^n \omega_k |\Delta_k|$ будет не меньше, чем $\varepsilon_0 \cdot \frac{1}{m} > 0$, то есть для функции f не выполнен критерий Дарбу в терминах колебаний. Это противоречит условию, что функция интегрируема. Тогда для всякого натурального m множество E_m имеет лебегову меру нуль, а значит, E имеет меру Лебега нуль.

Достаточность. Итак, теперь дано, что функция ограничена и множество ее точек разрыва имеет меру Лебега нуль. Мы хотим воспользоваться инфимум-критерием, то есть для любого $\varepsilon > 0$ предъявить такое разбиение T , что $\Omega(T) < \varepsilon$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Возьмём достаточно малое $\delta > 0$, точное значение которого определим позднее.

По условию множество E всех точек разрыва функции f имеет лебегову меру нуль, поэтому покроем множество E системой интервалов $\{J_l\}$ с суммарной длиной меньше δ . В каждой точке множества $D = [a, b] \setminus E$ колебание функции равно 0. Покроем каждую точку x множества D интервалом I_x такой длины, чтобы выполнялось неравенство $\omega(f, I_x) < \alpha$, причём α также выберем позднее. Объединив интервалы $\{I_x\}$ и $\{J_l\}$ в одну систему, мы

получим набор интервалов, покрывающий отрезок $[a, b]$. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие отрезка $[a, b]$ и концы получившихся интервалов, лежащие на отрезке $[a, b]$, возьмём в качестве точек разбиения T .

Разобьём сумму $\Omega(T)$ на две суммы Ω_1 и Ω_2 , где в сумму Ω_1 входят только те слагаемые $(\omega_k)|\Delta_k|$, для которых отрезки Δ_k содержатся целиком в интервалах из системы $\{J_l\}$, а в сумму Ω_2 входят все оставшиеся слагаемые.

Так как по условию функция f ограничена, то существует $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$. На отрезках Δ_k , длины которых входят в Ω_1 , колебания функции не превосходят $2M$. Таким образом,

$$\Omega(T) = \Omega_1 + \Omega_2 < 2M\delta + \alpha(b-a).$$

Теперь положим $\delta = \frac{\varepsilon}{4M}$, а $\alpha = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Тогда $\Omega(T) < \varepsilon$, то есть в силу инфимум-критерия функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. $\square$

Замечание. На самом деле в сумму Ω_2 войдут только те отрезки, которые не пересекаются с интервалами $\{J_l\}$. Действительно, концы любого отрезка построенного разбиения T — это точки a и b , и концы интервалов конечного подпокрытия, лежащие внутри отрезка $[a, b]$. Если бы какой-то отрезок Δ_k пересёкся с интервалом J_l , то один из концов J_l лежал бы внутри отрезка Δ_k . Однако этот конец интервала также является концом какого-то отрезка разбиения, а отрезки разбиения могут иметь только общие концы и не имеют общих внутренних точек. Таким образом, отрезки Δ_k разбиения не могут пересекаться с интервалами системы $\{J_l\}$, а либо содержатся в них, либо вообще не имеют общих точек с этими интервалами.

Упражнение 3. 1) Пусть $f \in R[a, b]$, а g определена на $[a, b]$ и значения f и g не совпадают на счётном подмножестве отрезка $[a, b]$. Верно ли, что $g \in R[a, b]$?

2) Пусть f ограничена на отрезке $[a, b]$ и имеет на нём лишь разрывы первого рода. Верно ли, что $f \in R[a, b]$?

Многие свойства интеграла Римана легко следуют из критерия Лебега, однако там, где это возможно, мы получим эти свойства и с помощью критерия Лебега, и без него, то есть двумя способами.

Свойства определённого интеграла

Начнём с основных свойств, которые доказываются с помощью определения и критерия интегрируемости Дарбу.

Предложение 9. 1) Линейность интеграла. Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

2) Неотрицательность интеграла. Пусть f интегрируема и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Тогда $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. Если при этом f также непрерывна в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ и $f(x_0) > 0$, то $\int_a^b f(x) dx > 0$.

3) Равенство нулю интеграла от неотрицательной функции. Пусть f непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Пусть также $\int_a^b f(x)dx = 0$. Тогда функция $f(x) = 0$ при всех $x \in [a, b]$.

4) Неравенство для интегралов. Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и при всех $x \in [a, b]$ $f(x) \geq g(x)$. Тогда $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$. В частности, если $m \leq f(x) \leq M$ при всех $x \in [a, b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Доказательство. 1) Для интегральных сумм, соответствующих размеченному разбиению (T, ξ) отрезка $[a, b]$, выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^n (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)) |\Delta_k| = \alpha \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |\Delta_k| + \beta \sum_{k=1}^n g(\xi_k) |\Delta_k|.$$

В силу критерия интегрируемости при заданном $\varepsilon > 0$ существует разбиение T с диаметром $d(T) < \delta$, для которого

$$\left| \alpha \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |\Delta_k| - \alpha \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon \text{ и } \left| \beta \sum_{k=1}^n g(\xi_k) |\Delta_k| - \beta \int_a^b g(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)) |\Delta_k| - \left(\alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \right) \right| &\leq \\ &\leq \left| \alpha \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |\Delta_k| - \alpha \int_a^b f(x)dx \right| + \left| \beta \sum_{k=1}^n g(\xi_k) |\Delta_k| - \beta \int_a^b g(x)dx \right| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Это значит, что по критерию интегрируемости функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и равенство $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ справедливо в силу определения интеграла Римана.

2) В силу неотрицательности функции f все интегральные суммы $\sigma(f, T, \xi)$ также неотрицательны. Если предположить, что $I = \int_a^b f(x)dx < 0$, то при $\varepsilon = \frac{|I|}{2}$ найдётся разбиение T_1 , для которого

$$I - \frac{|I|}{2} < \sigma(f, T_1, \xi) < I + \frac{|I|}{2} < 0,$$

то есть получаем противоречие.

В силу локальных свойств непрерывных функций существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in U_\delta(x_0) \cap [a, b]$ $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. Тогда для любого размеченного разбиения (T, ξ) с диаметром $d(T) < \frac{\delta}{2}$ найдутся такие отрезки этого разбиения, которые содержатся в окрестности $U_\delta(x_0) \cap [a, b]$. При этом сумма длин этих отрезков не меньше δ . Тогда соответствующие интегральные суммы будут больше, чем $\frac{\delta f(x_0)}{2}$, то есть строго больше 0. Если $I = \int_a^b f(x)dx < \frac{\delta f(x_0)}{2}$, то при $\varepsilon = \frac{\delta f(x_0) - I}{2}$ можно подобрать такое разбиение T_2 , что

$$I - \varepsilon < \sigma(f, T_2, \xi) < I + \varepsilon < \frac{\delta f(x_0)}{2},$$

то есть снова приходим к противоречию. Таким образом, $I \geq \frac{\delta f(x_0)}{2}$.

3) Из критерия Лебега и первой теоремы Вейерштрасса следует, что все непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции интегрируемы на этом отрезке. Докажем пункт 3 от противного: если бы функция f не равнялась тождественно нулю на отрезке $[a, b]$, то нашлась бы такая точка $x_0 \in [a, b]$, что $f(x_0) > 0$, а тогда по пункту 2 выполнялось бы неравенство $\int_a^b f(x)dx > 0$, что противоречит условию.

4) Пусть $p := f - g$. Тогда $p(x) \geq 0$ при всех $x \in [a, b]$, поэтому в силу пунктов 1 и 2

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) + p(x))dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b p(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Вторая часть утверждения получается, если в качестве одной из функций выбрать константу m или константу M . $\square$

Пример 10. Свойство 4 позволяет проводить оценки для интегралов. Пусть, например, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ Тогда можно проверить, что f убывает на отрезке $[0, 1]$, поэтому

$$\sin 1 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0, 1]. \text{ Поэтому в силу свойства 4 } \sin 1 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1.$$

Теперь докажем важную теорему об интегрируемости композиции. Отметим, что без критерия Лебега доказывать её гораздо сложнее.

Теорема 8. Теорема об интегрируемости композиции. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. Пусть функция g непрерывна на отрезке $[m, M]$. Тогда сложная функция $g \circ f$ интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы вытекает из критерия Лебега. Действительно, ограниченность функции f на $[a, b]$ следует из интегрируемости этой функции, а также из интегрируемости следует, что множество точек разрыва функции f имеет лебегову меру ноль. В точках непрерывности функции f сложная функция $g \circ f$ непрерывна по теореме о непрерывности сложной функции, поэтому множество точек разрыва функции $g \circ f$ содержится в множестве точек разрыва функции f (содержание может быть строгим, см. пример ниже). Ограниченность функции $g \circ f$ вытекает из непрерывности функции g на отрезке $[m, M]$ и первой теоремы Вейерштрасса. Таким образом, функция $g \circ f$ удовлетворяет критерию Лебега, то есть является интегрируемой на отрезке $[a, b]$. $\square$

Так как функции $g(x) = x^2$ и $g(x) = |x|$ непрерывны на всей оси, а произведение непрерывных в точке функций также непрерывно в этой точке, то можем сформулировать простое следствие теоремы об интегрируемости композиции.

Предложение 10. Пусть функции $f, g \in R[a, b]$. Тогда f^2 , $|f|$, $f \cdot g \in R[a, b]$.

Доказательство. Интегрируемость квадрата и модуля интегрируемой функции – это прямое следствие теоремы об интегрируемости композиции.

Произведение двух интегрируемых функций может иметь разрывы только в точках разрыва какой-то из них, то есть множество точек разрыва $f \cdot g$ является подмножеством объединения множеств точек разрыва f и g . Это объединение является множеством лебеговой меры ноль, а тогда лебегову меру ноль имеет и множество точек разрыва произведения $f \cdot g$. $\square$

Теперь выведем эти же свойства без критерия Лебега, а также получим полезное неравенство для модуля интеграла. Мы увидим, что доказательство станет сложнее по сравнению с рассуждениями выше.

Предложение 11. 1) Интегрируемость модуля. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $|f|$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

2) Интегрируемость квадрата интегрируемой функции. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда функция f^2 интегрируема на отрезке $[a, b]$.

3) Интегрируемость произведения интегрируемых функций. Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $f \cdot g$ также интегрируема на этом отрезке.

Доказательство. 1) Из неравенства треугольника следует, что при всех $x, y \in [a, b]$ выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| \geq |f(x)| - |f(y)|$, откуда получаем, что при любом разбиении T отрезка $[a, b]$

$$\sup_{x, y \in \Delta_k} |f(x) - f(y)| \geq \sup_{x, y \in \Delta_k} (|f(x)| - |f(y)|).$$

Тогда $\omega_k(f) \geq \omega_k(|f|)$, а значит $\Omega_f(T) \geq \Omega_{|f|}(T)$, где $\omega_k(f)$ — это колебание функции f на k -м отрезке разбиения Δ_k , а $\Omega_f(T)$ — это Ω -сумма, соответствующая функции f . Для функции $|f|$ обозначения аналогичны. В силу интегрируемости функции f и критерия интегрируемости в терминах колебаний, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем подобрать такое $\delta > 0$, что при $d(T) < \delta$ будут выполнены неравенства $\varepsilon > \Omega_f(T) \geq \Omega_{|f|}(T)$. При этом $\Omega_{|f|}(T) \geq 0$, поэтому функция $|f|$ интегрируема на $[a, b]$ по критерию интегрируемости.

Из очевидных неравенств $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, справедливых для всех $x \in [a, b]$, и неравенства для интегралов следует, что

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \Leftrightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

2) Пусть $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Тогда при всех $x, y \in [a, b]$

$$|f^2(x) - f^2(y)| = |f(x) - f(y)| \cdot |f(x) + f(y)| \leq 2M|f(x) - f(y)|.$$

Отсюда следует, что при любом разбиении T отрезка $[a, b]$ для колебаний функций f^2 и f на любом отрезке разбиения Δ_k выполнено неравенство $\omega_k(f^2) \leq 2M\omega_k(f)$. Тогда $\Omega_{f^2}(T) \leq 2M\Omega_f(T)$, откуда, как и в случае модуля, получаем интегрируемость функции f^2 на отрезке $[a, b]$ по критерию интегрируемости в терминах колебаний.

3) Из линейности интеграла следует, что функции $f+g$ и $f-g$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, а тогда в силу предыдущего пункта функции $(f+g)^2$ и $(f-g)^2$ также интегрируемы, поэтому, снова в силу линейности, функция

$$f \cdot g = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2$$

интегрируема. □

Пример 11. Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cup [0, 1], \\ -1, & x \in (\mathbb{R}/\mathbb{Q}) \cup [0, 1]. \end{cases}$ Тогда f^2 интегрируема на отрезке $[0, 1]$, а сама f – нет (отсутствие интегрируемости доказывается в точности так же, как для функции Дирихле). Этот пример показывает, что последние три свойства необратимы, так как из интегрируемости $|f|$, $f^2 = f \cdot f$ не следует интегрируемость f .

Следующее свойство интеграла Римана будет играть важную роль при доказательстве формулы Ньютона – Лейбница и в теории несобственных интегралов. Мы приведём доказательства и с помощью критерия Лебега, и без него.

Теорема 9. Аддитивность интеграла Римана. 1) Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда для любой точки $c \in [a, b]$ функция f интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$.

2) Обратно, если f интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a, b]$.

Для каждого из пунктов выполнено равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Через критерий Лебега. Действительно, в пункте 1) имеем по критерию Лебега, что множество точек разрыва f на отрезке $[a, b]$ имеет лебегову меру нуль, а также что f ограничена. Тогда f ограничена и на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, а множества её точек разрыва на этих отрезках являются подмножествами множества точек разрыва f на всём отрезке $[a, b]$, и потому эти множества точек разрыва тоже имеют лебегову меру нуль. Тем самым функция f интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ по критерию Лебега.

В пункте 2) дано, что f интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, поэтому по критерию Лебега она ограничена на каждом из этих отрезков и имеет на каждом из них множество точек разрыва лебеговой меры нуль. Тогда эти свойства функции f сохраняются и на объединении отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, то есть на отрезке $[a, b]$, а это означает, что f интегрируема на $[a, b]$ по критерию Лебега.

Докажем теперь формулу

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Если к разбиениям T_1 и T_2 отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ добавить разметки ξ_1 и ξ_2 и положить $T_0 = T_1 \cup T_2$, то T_0 будет разбиением отрезка $[a, b]$, а для соответствующих интегральных сумм получим равенство:

$$\sigma(f, T_0, \xi) = \sigma(f, T_1, \xi_1) + \sigma(f, T_2, \xi_2),$$

где $\xi = \xi_1 \cup \xi_2$. Используя условие и уже доказанные свойства 1 и 2, можем перейти к пределу при диаметрах разбиений, стремящихся к нулю, в результате чего получим равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Подробную запись на языке “ $\varepsilon - \delta$ ” полезно проделать в качестве упражнения.

Без критерия Лебега. **1)** В силу интегрируемости f для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение T отрезка $[a, b]$, что $\Omega(T) < \varepsilon$. Если к разбиению T добавить точку c , то есть рассмотреть новое разбиение $T_0 = T \cup \{c\}$, то омега-сумма может только уменьшиться, то есть $\Omega(T_0) \leq \Omega(T) < \varepsilon$. Разбиение T_0 можно рассматривать как объединение разбиений T_1 отрезка $[a, c]$ и T_2 отрезка $[c, b]$, откуда

$$\Omega(T_1) + \Omega(T_2) = \Omega(T_0) < \varepsilon,$$

а тогда $\Omega(T_1) < \varepsilon$ и $\Omega(T_2) < \varepsilon$. Таким образом, мы с помощью разбиения T отрезка $[a, b]$ построены разбиения T_1 и T_2 отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, суммы $\Omega(T_1)$ и $\Omega(T_2)$ которых будут меньше ε . Отсюда получаем интегрируемость функции f на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ в силу инфимум-критерия.

2) Обратно, из интегрируемости функции f на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ следует существование таких разбиений T_1 и T_2 этих отрезков, что соответствующие омега-суммы будут меньше любого заданного наперёд $\varepsilon > 0$. Рассмотрим разбиение $T_0 = T_1 \cup T_2$. Тогда

$$\Omega(T_0) = \Omega(T_1) + \Omega(T_2) < \varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Таким образом по инфимум-критерию получаем интегрируемость функции f на отрезке $[a, b]$. $\square$

В дальнейшем всегда будем считать, что $\int_a^a f(x)dx = 0$ и $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Свойство аддитивности теперь можно сформулировать по-другому: *если функция f интегрируема на отрезке $[A, B]$, $A < B$ и $a, b, c \in [A, B]$, то*

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0.$$

Упражнение 4. Докажите эту переформулировку свойства аддитивности.

Классы интегрируемых функций

Докажем теперь несколько теорем, в которых утверждается, что если функция обладает некоторыми свойствами, то есть принадлежит классу всех функций, обладающих этими свойствами, то она интегрируема. Отметим, что все теоремы, которые мы здесь докажем, являются простыми следствиями критерия Лебега, но мы проведём доказательства без использования критерия Лебега.

Начнём с самого простого, но очень важного класса непрерывных функций.

Теорема 10. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда $f \in R[a, b]$.

Здесь множество точек разрыва пусто, а потому имеет меру Лебега ноль, а также функция ограничена на отрезке в силу первой теоремы Вейерштрасса, так как непрерывна на нём по условию. Таким образом, функция интегрируема в силу критерия Лебега. Докажем интегрируемость непосредственно.

Доказательство. Напомним, что по теореме Кантора всякая непрерывная на отрезке функция является равномерно непрерывной на этом отрезке. Используя эту теорему, по любому заданному $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать такое $\delta > 0$, что при всех $x, y \in [a, b]$ и таких, что $|x - y| < \delta$, будем иметь $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Возьмём разбиение T отрезка $[a, b]$ с диаметром $d(T) < \delta$. Это означает, что для любого отрезка Δ_k разбиения T выполнено неравенство $|\Delta_k| < \delta$. Тогда для колебания функции f на любом отрезке Δ_k будем иметь $\omega_k = \sup_{x, y \in \Delta_k} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Отсюда для омега-суммы получим:

$$\Omega(T) = \sum_{k=1}^n \omega_k |\Delta_k| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n |\Delta_k| = \varepsilon(b - a).$$

Так как $b - a$ — это фиксированное число, а ε может быть сделано сколь угодно малым, то по критерию интегрируемости функции получаем интегрируемость f на отрезке $[a, b]$. $\square$

Теорема 11. Пусть функция f ограничена и монотонна на отрезке $[a, b]$. Тогда $f \in R[a, b]$.

Если функция монотонна на отрезке, то все её разрывы на этом отрезке могут быть только первого рода (см. предыдущие лекции). Если спроецировать пределы справа и слева в этих точках разрыва на ось ординат, то получим непересекающиеся интервалы. Каждому из этих интервалов поставим в соответствие какую-нибудь рациональную точку, принадлежащую интервалу. Так как таких точек не более чем счётное множество, то и интервалов не более чем счётное множество, а тогда и множество точек разрыва у монотонной на отрезке функции не более чем счётно. Но любое счётное множество имеет меру ноль по Лебегу, поэтому ограниченная и монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке в силу критерия Лебега. Докажем интегрируемость, не используя критерий Лебега.

Доказательство. Мы можем считать, что f не убывает, так как в противном случае вместо функции f можно рассмотреть $-f$. Рассмотрим разбиение T отрезка $[a, b]$. В силу неубывания функции на любом отрезке разбиения Δ_k для колебания функции верно равенство $\omega_k(f) = f(x_k) - f(x_{k-1})$. Если $d(T) < \delta$, то

$$\Omega(T) = \sum_{k=1}^n \omega_k |\Delta_k| < \delta \sum_{k=1}^n \omega_k.$$

При этом $\sum_{k=1}^n \omega_k \leq f(b) - f(a)$, так как функция f не убывает и ограничена по условию. Поэтому если при любом $\varepsilon > 0$ взять $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}$, то для любого разбиения T с $d(T) < \delta$ будем иметь

$$\Omega(T) = \sum_{k=1}^n \omega_k |\Delta_k| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} (f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

Таким образом, f интегрируема в силу критерия интегрируемости в терминах колебаний. $\square$

Отметим, что функции, рассматриваемые в последней теореме могут иметь даже бесконечное число точек разрыва. С другой стороны, не все непрерывные на отрезке функции монотонны, поэтому класс функций, рассмотренный в предпоследней теореме и класс функций из последней теоремы пересекаются, но не совпадают.

В следующей теореме рассматривается ещё один класс функций, не совпадающий ни с одним из рассмотренных выше.

Теорема 12. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$ и имеет на нём конечное число точек разрыва. Тогда f интегрируема на $[a, b]$.

Конечное число точек разрыва имеет лебегову меру ноль, поэтому выполнен критерий Лебега. Докажем непосредственно.

Доказательство. Мы хотим применить инфимум-критерий, то есть доказать, что при любом $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое разбиение T отрезка $[a, b]$, что $\Omega(T) < \varepsilon$. Положим $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Пусть $c_1, \dots, c_l$ — все точки разрыва функции f на отрезке $[a, b]$. Окружим каждую из этих точек окрестностью вида $(c_i - \varepsilon_1, c_i + \varepsilon_1)$, $i = 1, \dots, l$, где $\varepsilon_1 > 0$ таково, что эти окрестности не пересекаются и содержатся в $[a, b]$. При этом если точка разрыва совпадает с a или b , то будем рассматривать только соответствующую одностороннюю окрестность.

Во всех точках отрезка $[a, b]$, не принадлежащих этим окрестностям, функция f непрерывна. Множество точек непрерывности состоит из конечного объединения отрезков $[c_{i-1} + \varepsilon_1, c_i - \varepsilon_1]$, $i = 1, \dots, l$. На каждом из этих отрезков функция f непрерывна, а тогда по теореме Гейне — Кантора и равномерно непрерывна, поэтому для выбранного выше $\varepsilon_1 > 0$ на каждом из таких отрезков можно выбрать такое число δ_i , что при всех $x, y \in [c_{i-1} + \varepsilon_1, c_i - \varepsilon_1]$, $|x - y| < \delta_i$ будет выполнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon_1$. Пусть теперь $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_l\}$. Выберем любое разбиение T всех отрезков с диаметром меньше δ . Добавим к отрезкам этого разбиения все построенные окрестности точек разрыва с их концами. Получим разбиение T_0 отрезка $[a, b]$. Тогда $\Omega(T_0)$ состоит из двух групп слагаемых, в одной из которых отрезки разбиения — это то, что получено из окрестностей, то есть $[c_i - \varepsilon_1, c_i + \varepsilon_1]$, $i = 1, \dots, l$, а в другой — отрезки разбиения T . В первой группе слагаемых сумма длин всех отрезков равна $2l\varepsilon_1$, а во второй — не превосходит $b - a$. При этом колебания функции на отрезках первой группы не превосходят $2M$ в силу ограниченности f , а на отрезках второй группы колебания меньше ε_1 . Таким образом, имеем неравенство для омега-суммы:

$$\Omega(T_0) \leq 4Ml\varepsilon_1 + \varepsilon_1(b - a) = \varepsilon_1(4Ml + b - a).$$

Теперь в силу произвольности ε_1 для выполнения инфимум-критерия остаётся только положить $\varepsilon = \varepsilon_1(4Ml + b - a)$. $\square$

Лекция 5

Интегралы с переменными пределами интегрирования

Наша ближайшая цель – сформулировать и доказать формулу Ньютона – Лейбница.

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда из свойства аддитивности определённого интеграла следует, что при любом $x \in [a, b]$ функция f интегрируема на отрезке $[a, x]$. При различных $x \in [a, b]$ интеграл от f по отрезку $[a, x]$ принимает, вообще говоря, различные значения. Таким образом, можно рассмотреть функцию

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Изучим свойства этой функции.

Теорема 13. 1) Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда функция F непрерывна на отрезке $[a, b]$.

2) Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда функция F дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство. 1) Из интегрируемости функции f на отрезке $[a, b]$ следует её ограниченность на этом отрезке, то есть существует такое $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ при всех $x \in [a, b]$. Если $x, x+h \in [a, b]$, то, используя свойство аддитивности и замечание после этого свойства, получим:

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \leq M|h|.$$

Отсюда, если $h \rightarrow 0$, то и $|F(x+h) - F(x)| \rightarrow 0$, то есть выполнено определение непрерывности для функции F в точке x . Так как эти рассуждения верны для любой точки $x \in [a, b]$, то тем самым непрерывность F на отрезке $[a, b]$ доказана.

2) Непрерывность функции f в точке x_0 означает, что при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $t \in U_\delta(x_0)$ справедливо неравенство $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$, что равносильно $f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon$. Тогда при $|h| < \delta$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) - \varepsilon)dt &\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) + \varepsilon)dt \\ &\Leftrightarrow f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0) + \varepsilon. \end{aligned}$$

При стремлении h к нулю неравенства сохраняются для произвольного $\varepsilon > 0$, поэтому

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

□

В доказательстве пункта 2 важно осознать, почему неравенства справедливы и при положительных, и при отрицательных h .

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то есть непрерывна в каждой его точке, то F дифференцируема на этом отрезке в силу пункта 2 только что доказанной теоремы,

причём $\forall x \in [a, b]$ $F'(x) = f(x)$ (на концах имеются в виду односторонние производные). Таким образом, в этом случае функция F является первообразной функции f на отрезке $[a, b]$.

Отметим, однако, что если функция f не является непрерывной, но интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

всё равно может быть дифференцируема, однако равенство $F'(x) = f(x)$ уже может не иметь места. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [0, 1] \setminus \{1/2\}, \\ 1, & \text{если } x = 1/2 \end{cases}$$

интегрируема на отрезке $[0, 1]$ и $F(x) = \int_0^x f(t)dt = 0$ при всех $x \in [0, 1]$. Таким образом, $F'(1/2) = 0 \neq f(1/2) = 1$.

Пример 12. 1) Функция $f(t) = e^{-t^2}$ непрерывна на всей прямой. Найдём производную функции $F(x) = \int_a^x e^{-t^2} dt$, например, в точке $x = 2$. Обратим внимание, что первообразная от такой подынтегральной функции не выражается в элементарных функциях (то есть соответствующий неопределённый интеграл является “неберущимся”), поэтому с помощью нахождения интеграла задачу не решишь. Однако этого и не требуется, так как, по пункту 2 доказанной теоремы $F'(2) = f(2) = e^{-2^2} = 1/e^4$.

2) Можно рассматривать интегралы с переменными нижними пределами или интегралы, в которых оба предела интегрирования являются какими-то переменными величинами, например, функциями. В таких случаях при дифференцировании может оказаться полезной теорема о производной сложной функции. Найдём, к примеру, производную функции $G(x) = F(x^2) = \int_a^{x^2} e^{-t^2} dt$, пользуясь теоремой о производной сложной функции:

$$G'(x) = F'(x^2) \cdot (x^2)' = 2xe^{-(x^2)^2} = 2xe^{-x^4}.$$

Напомним, что обобщенной первообразной функции f на интервале (a, b) называется непрерывная на этом интервале функция F , для которой при всех $x \in (a, b)$ за исключением, быть может, конечного лишь числа точек интервала (a, b) выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Также напомним, что любые две обобщённые первообразные функции f на интервале (a, b) отличаются на константу.

Отметим, что любая ограниченная и имеющая лишь конечное число точек разрыва на отрезке $[a, b]$ функция f обладает обобщенной первообразной на этом отрезке (в концах берётся односторонняя производная). В качестве таковой может выступать функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Она будет обобщенной первообразной для f в силу теоремы о свойствах функции F .

Мы готовы к тому, чтобы сформулировать и доказать формулу Ньютона – Лейбница.

Формула Ньютона – Лейбница

В этом разделе будет доказана одна из основных теорем анализа. Она позволит вычислять многие определённые интегралы с помощью неопределённых.

Теорема 14. Пусть функция f ограничена и имеет конечное или пустое множество точек разрыва на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ является первообразной для f на $[a, b]$ и для любой первообразной Φ функции f на отрезке $[a, b]$ выполнено равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство. Уже доказано, что функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

непрерывна на $[a, b]$ и $F'(x) = f(x)$ при всех $x \in [a, b]$, при которых f непрерывна. Тогда F является обобщенной первообразной для f по определению. При этом $F(a) = 0$, так что

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = F(b) - F(a).$$

Так как все первообразные функции f отличаются на константу, то для всех $x \in [a, b]$ $\Phi(x) = F(x) + C$ при некотором $C \in \mathbb{R}$ для любой первообразной Φ функции f , поэтому

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

□

Важность этой теоремы, помимо прочего, ещё и в том, что она устанавливает связь между интегралом Римана и первообразными, так как в ней указывается, для каких классов функций интеграл Римана может быть выражен через разность значений первообразной подынтегральной функции. Конечно, есть функции, не принадлежащие классу функций, рассмотренному в теореме (Например, функции, у которых бесконечно множество точек разрыва), для которых формула Ньютона – Лейбница выполнена, но мы не будем здесь останавливаться на таких ситуациях.

Приведём примеры вычисления определённых интегралов с помощью формулы Ньютона – Лейбница.

Пример 13. 1) Важно условие непрерывности обобщённой первообразной. Например, рассмотрим интеграл $\int_1^2 xe^{x^2} dx$. Так как подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[1, 2]$, то у неё существует точная первообразная на этом отрезке, которая также непрерывна. Вычислим её:

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Таким образом, $\int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{e^4 - e}{2}$. Итак, удалось найти интеграл, так как первообразная непрерывна и все условия теоремы выполнены.

2) Теперь с помощью формулы Ньютона – Лейбница найдём интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 + \cos x}$.

Подынтегральная функция снова непрерывна и положительна, поэтому и значение интеграла должно быть положительным. Найдём первообразную.

$$\int \frac{dx}{4 + \cos x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}(x/2), \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = 2 \int \frac{2dt}{5 + 3t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5}} + C.$$

Однако разность $\frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{2}}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{0}{2}}{\sqrt{5}} = 0 - 0 = 0$, то есть к функции

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5}}$$

формула Ньютона – Лейбница неприменима.

Причина в том, что на отрезке $[0, 2\pi]$ F не является обобщённой первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{4 + \cos x}$, потому что она не определена в точке π , а также имеем

$$\lim_{x \rightarrow \pi-} F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{15}} \text{ и } \lim_{x \rightarrow \pi+} F(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{15}},$$

то есть F невозможно доопределить в точке π так, чтобы она была непрерывной. Вспоминая замечания, которые были после составления таблицы интегралов (перечитайте!), мы можем заключить, что для функции f отдельно на полуинтервале $[0, \pi)$ найдена первообразная

$$F(x) + C_1 = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5}} + C_1,$$

а на полуинтервале $(\pi, 2\pi]$ – первообразная

$$F(x) + C_2 = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5}} + C_2,$$

причём константы C_1 и C_2 выбираются независимо. Подберём эти константы так, чтобы предел слева в точке π функции $F(x) + C_1 = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5}} + C_1$ совпал с пределом справа в π функции $F(x) + C_2 = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5}} + C_2$, положив, например, $C_1 = -\frac{\pi}{\sqrt{15}}$, а $C_2 = \frac{\pi}{\sqrt{15}}$. Тогда функция

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5}} - \frac{\pi}{\sqrt{15}}, & \text{если } x \in [0, \pi), \\ 0, & \text{если } x = \pi, \\ \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5}} + \frac{\pi}{\sqrt{15}}, & \text{если } x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$, а в каждой точке отрезка, кроме π , $F_1'(x) = f(x)$, то есть F_1 – обобщённая первообразная функции f на отрезке $[0, 2\pi]$, а тогда по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 + \cos x} = F_1(2\pi) - F_1(0) = \frac{2\pi}{\sqrt{15}}.$$

Итак, ещё раз отметим, что при применении формулы Ньютона – Лейбница важна непрерывность обобщённой первообразной.

3) Иногда применение формулы Ньютона – Лейбница невозможно, так как, например, у подынтегральной функции нет первообразной, являющейся элементарной функцией. В этом случае могут помочь геометрические соображения. Например, интеграл $\int_{-1}^1 \sin(x^3) dx$ равен нулю, так как подынтегральная функция нечётная, то есть её график симметричен относительно начала координат, криволинейные трапеции, образованные частями графика, лежащими над осью Ox имеют такие же площади, как и криволинейные трапеции, образованные частями графика, лежащими под осью Ox , но знаки этих площадей различны и при вычислении интеграла они “сокращаются”.

Ниже будет дано более строгое обоснование.

Интегрирование по частям и замена переменной в определённом интеграле

Теорема 15. Интегрирование по частям. Пусть функции f и g дифференцируемы на отрезке $[a, b]$ и функция $(fg)'$ ограничена на отрезке $[a, b]$ непрерывна или имеет на нём лишь конечное число точек разрыва. Пусть также функция $f'g$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $g'f$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и имеет место следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx,$$

где запись $h(x)|_a^b$ означает $h(b) - h(a)$.

Доказательство. Пусть $h(x) = f(x)g(x)$. Тогда $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, что равносильно $g'(x)f(x) = h'(x) - f'(x)g(x)$, откуда следует, что функция $g'f$ интегрируема как разность интегрируемых функций. Далее, по формуле Ньютона – Лейбница

$$f(x)g(x)|_a^b = h(x)|_a^b = \int_a^b h'(x)dx = \int_a^b (f'(x)g(x) + g'(x)f(x))dx,$$

откуда получаем требуемую формулу в силу свойства линейности интеграла. $\square$

Теорема 16. Замена переменной. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[x_1, x_2]$, причём $a, b \in [x_1, x_2]$, $a < b$. Пусть также функция φ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и $\varphi(t) \in [x_1, x_2]$ при $\alpha \leq t \leq \beta$. Тогда справедлива следующая формула замены переменной:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. В силу непрерывности f на отрезке $[a, b]$ существует первообразная F функции f , причём $F'(x) = f(x)$ при всех $x \in [a, b]$. По формуле Ньютона – Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Рассмотрим функцию $G(t) := F(\varphi(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$. Эта функция дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, причём

$$G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Таким образом, $G(t)$ является первообразной для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, а тогда, по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

Пример 14. 1) $\int_1^2 xe^x dx = xe^x|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2$.

$$2) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t, \\ t = \arcsin x \in [0, \frac{\pi}{2}]; \\ \cos t dt = dx \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \frac{\pi}{4}.$$

3) Теперь обоснуем геометрические соображения из пункта 3 предыдущего примера с помощью формулы замены переменной. Найдём интеграл $\int_{-1}^1 \sin(x^3) dx$. В силу аддитивности

$$\int_{-1}^1 \sin(x^3) dx = \int_{-1}^0 \sin(x^3) dx + \int_0^1 \sin(x^3) dx,$$

а для первого слагаемого имеем

$$\int_{-1}^0 \sin(x^3) dx = \left| \begin{array}{l} x = -t, \\ dx = -dt; \\ t \in [1, 0] \end{array} \right| = \int_1^0 \sin(-t^3)(-dt) = \int_1^0 \sin(t^3) dt = - \int_0^1 \sin(t^3) dt.$$

Таким образом,

$$\int_{-1}^1 \sin(x^3) dx = - \int_0^1 \sin(t^3) dt + \int_0^1 \sin(x^3) dx = 0.$$

Первая и вторая теоремы о среднем

Теорема 17. 1-я теорема о среднем. Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Пусть также функция g неотрицательна на $[a, b]$ и $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Тогда существует такое $\mu \in [m, M]$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Так как g неотрицательна на $[a, b]$, то при всех $x \in [a, b]$ справедливы неравенства $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. В силу свойств интеграла имеем

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, а тогда можно выбрать $\mu = m$. Если $\int_a^b g(x)dx > 0$, то

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

Тогда, полагая $\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$, получим утверждение теоремы. $\square$

Упражнение 1. 1) Показать, что если в условиях теоремы функция f непрерывна на $[a, b]$, то найдётся такая точка $c \in [a, b]$, что $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$.

2) Показать, что если в условиях теоремы f непрерывна на $[a, b]$, а $g(x) = 1$ при всех $x \in [a, b]$, то найдётся такая точка $c \in [a, b]$, что $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)(b-a)$.

Теорема 18. (2-я теорема о среднем). Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Пусть также функция g неотрицательна и не убывает на $[a, b]$. Тогда существует такое $c \in [a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $T_n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ — такие разбиения отрезка $[a, b]$, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(T_n) = 0$. Рассмотрим сумму

$$\sigma_n := \sum_{k=1}^n g(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

Так как f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, поэтому существует такое $M > 0$, что $\forall x \in [a, b] |f(x)| \leq M$. Кроме того, в силу неубывания функции g на отрезке $[a, b]$ на каждом отрезке разбиения Δ_k выполнено равенство для колебания $\omega_k(g) = g(x_k) - g(x_{k-1})$. Тогда, опять же в силу неубывания g , справедливо равенство $\sum_{k=1}^n \omega_k(g) = g(b) - g(a)$.

Таким образом, можем выписать следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left| \sigma_n - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (g(x_k) - g(x))f(x)dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \omega_k(g) \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)|dx \leq M d(T_n) \sum_{k=1}^n \omega_k(g) = M(g(b) - g(a))d(T_n), \end{aligned}$$

откуда в силу того, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(T_n) = 0$, получаем, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

В силу свойств интеграла с переменным верхним пределом функция

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt = - \int_b^x f(t)dt$$

непрерывна на отрезке $[a, b]$, поэтому по второй теореме Вейерштрасса существуют такие точки $\alpha, \beta \in [a, b]$, что $F(\alpha) = \min_{a \leq x \leq b} F(x)$, а $F(\beta) = \max_{a \leq x \leq b} F(x)$.

Представим σ_n в другом виде:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sum_{k=1}^n g(x_k) \left(\int_{x_{k-1}}^b f(x) dx - \int_{x_k}^b f(x) dx \right) = \sum_{k=1}^n g(x_k) F(x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n g(x_k) F(x_k) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} g(x_{k+1}) F(x_k) - \sum_{k=1}^n g(x_k) F(x_k) = g(x_1) F(a) + \sum_{k=1}^{n-1} (g(x_{k+1}) - g(x_k)) F(x_k).\end{aligned}$$

В правой части учтено, что $g(b)F(b) = g(b) \int_b^b f(t) dt = 0$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}\sigma_n &= g(x_1)F(a) + \sum_{k=1}^{n-1} (g(x_{k+1}) - g(x_k))F(x_k) \geq \\ &\geq F(\alpha) \left(g(x_1) + \sum_{k=1}^{n-1} (g(x_{k+1}) - g(x_k)) \right) = F(\alpha)g(b)\end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned}\sigma_n &= g(x_1)F(a) + \sum_{k=1}^{n-1} (g(x_{k+1}) - g(x_k))F(x_k) \leq \\ &\leq F(\beta) \left(g(x_1) + \sum_{k=1}^{n-1} (g(x_{k+1}) - g(x_k)) \right) = F(\beta)g(b),\end{aligned}$$

то есть $F(\alpha)g(b) \leq \sigma_n \leq F(\beta)g(b)$, откуда, переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$, получим в силу предельного перехода в неравенствах, что $F(\alpha)g(b) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq F(\beta)g(b)$. Если $g(b) = 0$, то $g(x) = 0$ при всех $x \in [a, b]$, а тогда достаточно взять $c = a$ в утверждении теоремы. Если $g(b) \neq 0$, то

$$F(\alpha) \leq \frac{1}{g(b)} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq F(\beta).$$

F непрерывна на отрезке $[a, b]$, поэтому принимает все промежуточные значения, то есть найдётся такая точка $c \in [a, b]$, что $F(c) = \int_c^b f(t)dt = \frac{1}{g(b)} \int_a^b f(x)g(x)dx$, откуда и получим $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int_c^b f(x)dx$. □

Если предположить дифференцируемость функции g на отрезке $[a, b]$ и неотрицательность и непрерывность g' на этом отрезке, то доказательство существенно упростится: можно применить интегрирование по частям и первую теорему о среднем. В качестве упражнений оставим несколько простых следствий второй теоремы о среднем.

Упражнение 2. 1) Докажите вторую теорему о среднем при дополнительных предположениях о том, что g имеет непрерывную и неотрицательную производную на $[a, b]$.

2) Докажите, что если неубывающую на $[a, b]$ функцию g заменить на невозрастающую на этом отрезке, то при сохранении всех прочих условий теоремы при некотором $c \in [a, b]$ будет справедливо равенство $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^c f(x)dx$.

3) Докажите, что если неубывающую и неотрицательную на $[a, b]$ функцию g заменить просто на монотонную на этом отрезке, то при сохранении всех прочих условий теоремы при некотором $c \in [a, b]$ будет справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^c f(x)dx + g(b) \int_c^b f(x)dx$$

Приведём примеры применения второй теоремы о среднем для получения оценок.

Пример 15. Рассмотрим интеграл $\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx$, $b > a > 0$. Функции $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{x}$ интегрируемы на $[a, b]$, причём $y = \frac{1}{x}$ неотрицательна и не возрастает на этом отрезке. Поэтому по второй теореме о среднем (см. упражнение) существует точка $c \in [a, b]$, такая, что $\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{a} \int_a^c \sin x dx$. Тогда

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \frac{1}{a} \int_a^c \sin x dx \right| = \left| \frac{1}{a} (\cos a - \cos c) \right| \leq \frac{1}{a} (|\cos a| + |\cos c|) \leq \frac{2}{a}.$$

Кроме того, что теоремы о среднем полезны при оценках интегралов, они потребуются нам при изучении несобственных интегралов.

Лекция 6

Несобственные интегралы

Как известно, интеграл Римана определяется только для функций, заданных на отрезке и ограниченных на нём. Однако иногда возникают интегралы по бесконечным промежуткам, либо интегралы, в которых подынтегральные функции не ограничены на отрезках, по которым ведётся интегрирование. В таком случае мы можем определить подобные интегралы с помощью перехода к пределу. Перейдём к точным определениям.

Определение 11. Пусть $a \in \mathbb{R}$, при всех $b > a$ функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Если существует $\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b)$, то этот предел называется **несобственным интегралом первого рода** от функции f на промежутке от $[0, +\infty)$. Интеграл по бесконечному промежутку обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Если предел существует, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Сам символ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ мы в дальнейшем будем называть несобственным интегралом первого рода вне зависимости от того, сходится он или нет.

Отметим, что интегрируемость функции f на отрезке $[a, b]$ при любом $b \in [a, +\infty)$ равносильна её интегрируемости на любом отрезке, содержащемся в промежутке $[a, +\infty)$ в силу аддитивности интеграла Римана по отрезку.

Определение без труда переносится на интегралы вида $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, так как $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f(x)dx$, а $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$, поэтому такие интегралы, в случае интегрируемости функции f на любом отрезке, содержащемся в промежутке интегрирования, мы также будем называть несобственными интегралами первого рода.

При такой терминологии обычный интеграл Римана называют собственным. Приведём очень важный пример несобственного интеграла, которым часто будем пользоваться в дальнейшем.

Пример 16. Рассмотрим несобственный интеграл $I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^q}$, $a > 0$. При $q = 1$

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln a) = +\infty,$$

то есть в этом случае интеграл расходится.

При $q \neq 1$

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^q} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-q} (b^{1-q} - a^{1-q}).$$

При $q > 1$ этот предел равен $\frac{1}{q-1} a^{1-q}$, а при $q < 1$ он равен $+\infty$.

Таким образом, несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^q}$, $a > 0$ сходится при $q > 1$.

Интегрируемость функции f на любом отрезке, содержащемся в промежутке интегрирования, означает, что f ограничена на любом таком отрезке. Однако возможны ситуации, когда функция f не ограничена на отрезке интегрирования. Интегралы от такого типа функций приводят нас к следующему определению.

Определение 12. Пусть функция f определена и неограничена на промежутке $[a, b)$. Пусть f интегрируема по Риману на отрезке $[a, \alpha]$ при любом $\alpha \in [a, b)$ и существует $\lim_{\alpha \rightarrow b-} \int_a^\alpha f(x) dx$. Тогда этот предел называется **несобственным интегралом второго рода** от функции f на промежутке $[a, b)$. Несобственный интеграл второго рода обозначается $\int_a^b f(x) dx$. Если предел существует, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится.

Сам символ $\int_a^b f(x) dx$ в случае неограниченной функции f мы в дальнейшем будем называть несобственным интегралом второго рода вне зависимости от того, сходится он или нет.

Для несобственного интеграла второго рода обозначение такое же, как для обычного интеграла Римана, однако подынтегральная функция не является ограниченной.

Точка b называется особой точкой интеграла $\int_a^b f(x) dx$. Аналогично определяется интеграл, в котором особая точка является нижним пределом интегрирования: $\lim_{\beta \rightarrow b+} \int_\beta^c f(x) dx$. При этом функция f должна быть интегрируема на любом отрезке вида $[\beta, c]$, $\beta \in (b, c]$. Особая точка может находиться и внутри промежутка интегрирования:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow b-} \int_a^\alpha f(x) dx + \lim_{\beta \rightarrow b+} \int_\beta^c f(x) dx.$$

Оба предела в последнем равенстве должны существовать независимо друг от друга. Аналогичное замечание справедливо и для интегралов первого рода. Все интегралы, рассмотренные после определения только что, мы также отнесём к несобственным интегралам второго рода.

Пример 17. 1) Рассмотрим интеграл $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^p}$, являющийся несобственным при $p > 0$.

При $p = 1$

$$I = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} (\ln 1 - \ln \alpha) = +\infty,$$

то есть в этом случае интеграл расходится.

При $p \neq 1$

$$I = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{1}{1-p} (1 - \alpha^{1-p}).$$

При $p < 1$ этот предел равен $\frac{1}{1-p}$, а при $p > 1$ он равен $+\infty$.

Таким образом, несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p < 1$.

2) Пусть $n \in \mathbb{N}$. Докажем по индукции, что $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$. При $n = 1$, интегрируя по частям, имеем:

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-x e^{-x} \Big|_0^b + \int_0^b e^{-x} dx \right) = 1.$$

Предположим, что при $n = k$ выполнено равенство $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx = k!$. При $n = k + 1$, снова интегрируя по частям, получим, учитывая предположение индукции,

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-x^{k+1} e^{-x} \Big|_0^b + (k+1) \int_0^b x^k e^{-x} dx) = (k+1)k! = (k+1)!.$$

При этом то, что $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x^{k+1}}{e^x} \right) = 0$, легко доказать с помощью правила Лопиталя (см. примеры в соответствующей лекции).

Бывают ситуации, когда несобственные интегралы берутся по бесконечным промежуткам и от неограниченных в окрестности некоторых точек функций. В этих случаях интегралы можно разбить на сумму нескольких интегралов первого и второго рода, поэтому такие ситуации сводятся к рассмотренным в определениях несобственных интегралов.

Ниже мы будем обозначать $+\infty$, $-\infty$, или особую точку b символом ω . Во всех дальнейших ситуациях ω будет концом промежутка. При этом a может лежать и правее ω , но, в силу равенства $\int_a^\omega f(x) dx = -\int_\omega^a f(x) dx$, несобственные интегралы мы можем обозначать единым символом $\int_a^\omega f(x) dx$ без нарушения общности.

Сходимость несобственного интеграла $\int_a^\omega f(x) dx$ означает существование предела при $c \rightarrow \omega$ функции $F(c) = \int_a^c f(x) dx$, которая определена и непрерывна на промежутке $[a, \omega)$ в силу определений несобственных интегралов и свойств интеграла с переменным верхним пределом (c стремится к ω в зависимости от конкретного значения ω либо слева, либо справа). Так как для обычного интеграла Римана $\int_a^b f(x) dx$ предел функции $F(c) = \int_a^c f(x) dx$ при $c \rightarrow b$ равен $F(b)$ из-за непрерывности функции F , то несобственный интеграл по промежутку $[a, b)$ от интегрируемой на $[a, b]$ функции совпадает с обычным интегралом Римана от f по отрезку $[a, b]$.

В силу критерия Коши существования предела функции (см. предыдущие лекции), получаем следующую теорему.

Теорема 19. (Критерий Коши). Несобственный интеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ сходится тогда и только тогда, когда при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $B_\varepsilon \in (a, \omega)$, что при всех $a_1, a_2 \in (B_\varepsilon, \omega)$ выполнено неравенство

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Существование предела функции

$$F(c) = \int_a^c f(x) dx$$

при $c \rightarrow \omega$ равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число B_ε , что для всех $a_1, a_2 \in (B_\varepsilon, \omega)$ выполнено неравенство

$$|F(a_2) - F(a_1)| < \varepsilon.$$

Это неравенство в силу аддитивности интеграла равносильно неравенству

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

□

Отметим, что в качестве промежутка (B_ε, ω) может выступать любой из промежутков $(B_\varepsilon, +\infty)$, $(B_\varepsilon, -\infty)$, (B_ε, b) , $b \in \mathbb{R}$, $b > B_\varepsilon$ или (b, B_ε) , $b \in \mathbb{R}$, $b < B_\varepsilon$ где b – особая точка несобственного интеграла второго рода.

Для несобственных интегралов остаются справедливыми свойства линейности и аддитивности. Это легко следует из свойств предела и интеграла Римана.

Сходимость интегралов от неотрицательных функций и связь с рядами

Часто требуется ответить на вопрос, сходится ли несобственный интеграл. При этом вычислять интеграл не требуется, а иногда такое вычисление и невозможно. Сейчас мы сформулируем и докажем несколько признаков, дающих *достаточные* условия сходимости интегралов от неотрицательных функций.

Прежде всего отметим, что *если $f(x) \geq 0$ при $x \in [a, \omega)$, то функция*

$$F(c) = \int_a^c f(x) dx$$

не убывает при приближении c к ω , поэтому предел значений $F(c)$ при $c \rightarrow \omega$ существует тогда и только тогда, когда F ограничена (см. теорему Вейерштрасса для монотонных функций). Этот критерий полностью аналогичен критерию сходимости рядов с неотрицательными членами. Полезно повторить вообще материал про ряды, потому что возникает много похожего с результатами для несобственных интегралов.

Теорема 20. (Признак сравнения). Пусть для всех $x \in [a, \omega)$ выполнено неравенство $|f(x)| \leq g(x)$, функция f интегрируема на отрезке $[a, c]$ при любом $c \in [a, \omega)$ и интеграл $\int_a^\omega g(x) dx$ сходится. Тогда интегралы $\int_a^\omega f(x) dx$ и $\int_a^\omega |f(x)| dx$ сходятся.

Доказательство. Для определённости считаем, что $a < \omega$. Из сходимости интеграла $\int_a^\omega g(x) dx$ следует, что для этого интеграла выполнен критерий Коши, то есть при любом $\varepsilon > 0$ существует такое B_ε , что при всех $a_1, a_2 \in (B_\varepsilon, \omega)$, $a_1 < a_2$ получаем в силу неотрицательности функции g

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} g(x) dx \right| = \int_{a_1}^{a_2} g(x) dx < \varepsilon.$$

Тогда по свойствам определённого интеграла

$$0 \leq \left| \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx \right| \leq \int_{a_1}^{a_2} |f(x)| dx \leq \int_{a_1}^{a_2} g(x) dx.$$

Отсюда следует, что критерий Коши выполнен для интегралов $\int_a^\omega f(x) dx$ и $\int_a^\omega |f(x)| dx$. $\square$

Упражнение. Проверьте самостоятельно, что изменится в доказательстве, если $a > \omega$. Часто используется следствие этой теоремы.

Предложение 12. (Признак сравнения в предельной форме). Пусть функция f неотрицательна, а функция g положительна $[a, \omega)$, f и g интегрируемы при всех $c \in [a, \omega)$ на отрезке $[a, c]$ и

$$f \sim g, \quad x \rightarrow \omega.$$

Тогда интегралы $\int_a^\omega f(x) dx$ и $\int_a^\omega g(x) dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство. Из условия следует, что $\lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. По определению предела при любом $\varepsilon > 0$ найдётся такое $b \in [a, \omega)$, что при всех $x \in [b, \omega)$ будет справедливо неравенство

$$|f(x)/g(x) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow (1 - \varepsilon)g(x) < f(x) < (1 + \varepsilon)g(x).$$

Последние неравенства означают, что интегралы $\int_b^\omega f(x) dx$ и $\int_b^\omega g(x) dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

По условию функции f и g интегрируемы при всех $c \in [a, \omega)$ на отрезке $[a, c]$, то есть и при $c = b$, а тогда

$$\int_a^\omega f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^\omega f(x) dx$$

и аналогично для $\int_a^\omega g(x) dx$. Отсюда вытекает одновременная сходимость интегралов $\int_a^\omega f(x) dx$ и $\int_a^\omega g(x) dx$. $\square$

Пример 18. 1) Рассмотрим интеграл $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}$. При всех $x \in [1, +\infty)$ справедливо неравенство $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится в силу примера 1. Тогда по признаку сравнения интегралы $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}$ и $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x dx}{x^2} \right|$ сходятся.

2) Рассмотрим интеграл $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x) \arctg \frac{1}{x^3} dx}{x\sqrt{x}}$. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\ln(1+x) \arctg \frac{1}{x^3}}{x\sqrt{x}} : \frac{\pi}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 0+} \arctg \frac{1}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+x)\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = 1,$$

то есть $\frac{\ln(1+x) \arctg \frac{1}{x^3}}{x\sqrt{x}} \sim \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$, $x \rightarrow 0+$, а интеграл $\frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ сходится в силу доказанного в пункте 1 примера 2.

Следующее утверждение демонстрирует связь между несобственными интегралами и рядами.

Предложение 13. (Интегральный признак Коши – Маклорена). Пусть функция f неотрицательна, не возрастает на промежутке $[1, +\infty)$ и при всех $c \in [1, +\infty)$ интегрируема на отрезке $[1, c]$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство. Отметим, что $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$ при любом натуральном k в силу свойств интеграла и того, что функция f не возрастает. Суммируя эти неравенства при всех $k = 1, \dots, n-1$, получим в силу аддитивности интеграла:

$$f(2) + \dots + f(n) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(1) + \dots + f(n-1).$$

Таким образом, из ограниченности последовательности частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ следует ограниченность функции $F(c) = \int_1^c f(x)dx$, которая, в силу неотрицательности f , монотонна, а это по теореме Вейерштрасса означает существование предела $F(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. С другой стороны, если интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то неограничена последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$, а тогда по критерию сходимости рядов с неотрицательными членами расходится и сам этот ряд. $\square$

Проиллюстрируем доказательство. Здесь прямоугольники соответствуют элементам

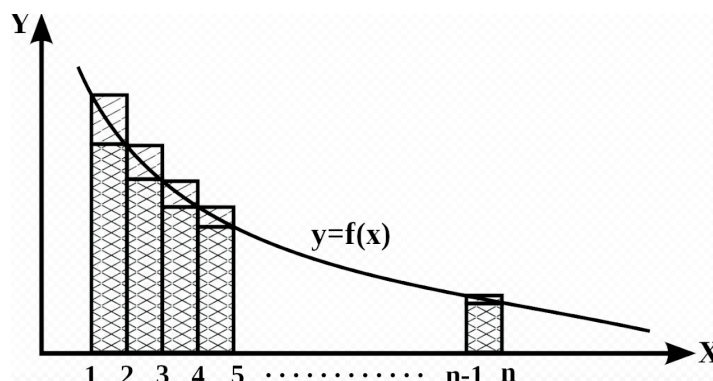


Рис. 4: Геометрический смысл доказательства

ряда, а площадь под кривой – это интеграл.

Пример 19. 1) Ряд $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ сходится при $p > 1$, так как при таких p

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln^p x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{\ln^{1-p} x}{1-p} \right|_2^b = \frac{\ln^{1-p} 2}{p-1}.$$

При $p < 1$ предел равен $+\infty$, то есть интеграл расходится, а тогда расходится и ряд.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$ сходится при $q > 1$, так как только при этих q , как было установлено в примере 1, сходится интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^q}$. Независимое доказательство того, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$ сходится только при $q > 1$ см. в лекциях, посвященных рядам.

Ещё раз отметим, что многие результаты теории рядов схожи с результатами для несобственных интегралов. Однако это так не для всех результатов. Например, нет аналога необходимого признака сходимости ряда для несобственного интеграла. Это видно из решения следующей задачи.

Упражнение. Пусть функция f непрерывна, $f(x) \geq 0$ при всех $x \in [a, +\infty)$ и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Верно ли, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$? (Ответ: нет).

Лекция 7

Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов

Далее для определённости положим $a < \omega$. Полезно будет разобраться самостоятельно, что меняется в рассуждениях, если $a > \omega$.

Определение 13. Несобственный интеграл $\int_a^\omega f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^\omega |f(x)|dx$. Если интеграл $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int_a^\omega |f(x)|dx$ расходится, то интеграл $\int_a^\omega f(x)dx$ называется условно сходящимся.

Если сходится интеграл $\int_a^\omega |f(x)|dx$, то для него выполнен критерий Коши, то есть при любом $\varepsilon > 0$ существует такое B_ε , что при всех $a_1, a_2 \in (B_\varepsilon, \omega)$ выполнено неравенство

$$\int_{a_1}^{a_2} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

Пусть $a_1 < a_2$. Из свойств интеграла следует, что $0 \leq \left| \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx \right| \leq \int_{a_1}^{a_2} |f(x)|dx < \varepsilon$, то есть по критерию Коши сходится интеграл $\int_a^\omega f(x)dx$. Таким образом, доказано, что из абсолютной сходимости интеграла следует его сходимость.

Приведём пример интеграла, сходящегося условно.

Пример 20. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится условно. Действительно, покажем сначала, что этот интеграл сходится. Интегрируя по частям, имеем

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{-\cos x}{x} \right|_1^b - \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

При этом $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in [1, +\infty)$ и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится в силу примера 1, поэтому $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx$ существует по признаку сравнения, а тогда сходится и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Отметим теперь, что при всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $|\sin x| \geq \sin^2 x$, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ расходится, так как $\frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1 - \cos 2x}{2x}$, причём интеграл $2 \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ сходится (это снова можно показать с помощью интегрирования по частям), а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}$ расходится. Таким образом, интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$$

расходится (см. пример 1), а тогда интеграл $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ расходится по признаку сравнения.

Интегралы от функций произвольного знака

Теперь обсудим признаки сходимости интегралов от функций произвольного знака. Всюду ниже считаем, что функция f интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, $b \in [a, \omega)$.

Теорема 21. Признак Дирихле. Пусть существует такое $M > 0$, что $|F(x)| \leq M$ для всех $x \in [a, \omega)$, где $F(x) := \int_a^x f(t)dt$. Пусть также функция $g(x) \geq 0$ при всех $x \in [a, \omega)$ и монотонно стремится к 0 при $x \rightarrow \omega$. Тогда интеграл $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $a < \omega$.

Так как функция g монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow \omega$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое B_ε , что при всех $x \in (B_\varepsilon, \omega)$ выполнено неравенство

$$0 \leq g(x) < \varepsilon.$$

В силу ограниченности F при всех $a_1, a_2 \in (B_\varepsilon, \omega)$ получим, используя вторую теорему о среднем:

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x)g(x)dx \right| = \left| g(a_1) \int_{a_1}^{a_3} f(x)dx \right| < \varepsilon \left| \int_{a_1}^{a_3} f(x)dx \right| = \varepsilon \left| \int_a^{a_3} f(x)dx - \int_a^{a_1} f(x)dx \right| \leq 2M\varepsilon,$$

где $a_3 \in [a_1, a_2]$. Таким образом, для интеграла $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$ выполнен критерий Коши, поэтому этот интеграл сходится. $\square$

Теорема 22. Признак Абеля. Пусть интеграл $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится. Пусть также функция g монотонна, ограничена и неотрицательна при $x \in [a, \omega)$. Тогда интеграл $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Снова без ограничения общности считаем, что $a < \omega$.

В силу сходимости интеграла $\int_a^\omega f(x)dx$ по критерию Коши при любом $\varepsilon > 0$ существует такое B_ε , что при всех $a_1, a_2 \in (B_\varepsilon, \omega)$ выполнено неравенство

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Без ограничения общности считаем, что $a_1 < a_2$. По второй теореме о среднем существует такое число $a_3 \in [a_1, a_2]$, что

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)g(x)dx = g(a_1) \int_{a_1}^{a_3} f(x)dx + g(a_2) \int_{a_3}^{a_2} f(x)dx.$$

Пусть $M := \sup_{x \in [a, \omega)} g(x)$. Тогда

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x)g(x)dx \right| \leq g(a_1) \left| \int_{a_1}^{a_3} f(x)dx \right| + g(a_2) \left| \int_{a_3}^{a_2} f(x)dx \right| < 2M\varepsilon.$$

Значит, интеграл $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$ сходится по критерию Коши. $\square$

Упражнение 1. Как изменятся доказательства признаков Абеля и Дирихле, если $a > \omega$?

Приведём несколько примеров использования признаков Абеля и Дирихле.

Пример 21. 1) Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится при всех $\alpha > 0$, потому что если в признаке Дирихле положить $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, то для функции $F(x) = \int_1^x \sin t dt$ справедливы оценки

$$|F(x)| = \left| \int_1^x \sin t dt \right| = |\cos 1 - \cos x| \leq |\cos 1| + |\cos x| \leq 2,$$

при всех $x \in [1, +\infty)$, а функция $g(x) = \frac{1}{x^\alpha} > 0$ и монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$. Таким образом, для интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ выполнен признак Дирихле, а потому этот интеграл сходится.

2) Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$. Справедливо равенство

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^1 \sin(x^2) dx + \int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx.$$

Первое слагаемое представляет собой интеграл Римана, так как подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Для второго интеграла имеем:

$$\int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2, \quad t \in [1, +\infty) \\ dt = 2x dx; \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1/2}} dt,$$

а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1/2}} dt$ сходится по пункту 1. Таким образом, интеграл $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ сходится.

Обратим внимание, что при этом подынтегральная функция $f(x) = \sin(x^2)$ не стремится к нулю, то есть в случае сходимости несобственного интеграла по бесконечному промежутку подынтегральная функция не обязана стремиться к нулю.

3) Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1}} \arctg x dx$ сходится по признаку Абеля, так как $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1}} dx$ сходится по признаку Дирихле, а функция $g(x) = \arctg x$ неотрицательна, монотонна и ограничена при $x \geq 0$.

На втором курсе подробно будут изучены функции, речь о которых пойдёт в следующей задаче.

Упражнение 2. 1) Доказать, что *гамма-функция Эйлера*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

определена при всех $x > 0$ и удовлетворяет при таких x функциональному уравнению $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Вывести отсюда формулу $\Gamma(n+1) = n!$ ($n \in \mathbb{N}$).

2) Доказать, что *бета-функция Эйлера*

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

определена при всех $x > 0$, $y > 0$. Применяя интегрирование по частям, найти значение этой функции при $x = m$, $y = n$, где $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Выразить через бета-функцию интеграл

$$I_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^p t \cos^q t dt,$$

где p и q — целые неотрицательные числа.

Главное значение несобственного интеграла

Пусть на отрезке $[a, b]$ функция f имеет одну особую точку $c \in (a, b)$, причём на отрезках $[a, c - \varepsilon_1]$ и $[c + \varepsilon_2, b]$ f интегрируема при всех $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, таких, что $0 \leq \varepsilon_1 \leq c - a$ и $0 \leq \varepsilon_2 \leq b - c$. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится только в том случае, если существуют сразу оба предела

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx \text{ и } \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx$$

и тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx.$$

Если хотя бы один из указанных пределов не существует, то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ расходится.

При этом может оказаться, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right) \quad (1)$$

(очевидно, что если интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится, то и предел (1) существует).

Если предел (1) существует, то он называется *главным значением интеграла* $\int_a^b f(x)dx$.

Обозначение: V. p. $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\text{V. p. } \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right).$$

Буквы V и p являются начальными буквами слов “Valeur principale”, означающих “главное значение” по-французски.

Пример 22. Интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ не существует, так как

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+} \int_0^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+} (\ln \varepsilon_1 - \ln 1) = -\infty,$$

а для сходимости необходимо, чтобы этот предел существовал.

При этом

$$\text{V. p. } \int_0^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x-1} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\ln \varepsilon - \ln 1 + \ln 2 - \ln \varepsilon) = \ln 2,$$

то есть исходный интеграл сходится к $\ln 2$ в смысле главного значения.

Аналогично, если на $\mathbb{R}$ нет особых точек, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится только в том случае, если существуют сразу оба предела

$$\lim_{b_1 \rightarrow -\infty} \int_{b_1}^a f(x)dx \text{ и } \lim_{b_2 \rightarrow +\infty} \int_a^{b_2} f(x)dx$$

и тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b_1 \rightarrow -\infty} \int_{b_1}^a f(x)dx + \lim_{b_2 \rightarrow +\infty} \int_a^{b_2} f(x)dx.$$

Если хотя бы один из указанных пределов не существует, то интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ расходится. При этом может оказаться, что существует предел

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_{-b}^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \right) \quad (2)$$

(очевидно, что если интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то и предел (2) существует). Если предел

(2) существует, то он называется *главным значением интеграла* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ и обозначается

V. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, то есть

$$\text{V. p. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_{-b}^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \right).$$

Пример 23. Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ не существует, так как

$$\lim_{b_1 \rightarrow -\infty} \int_{b_1}^a x dx = \lim_{b_1 \rightarrow -\infty} (a^2/2 - b_1^2/2) = -\infty,$$

а для сходимости необходимо, чтобы этот предел существовал.

При этом

$$\text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (b^2/2 - (-b)^2/2) = 0,$$

то есть исходный интеграл сходится к 0 в смысле главного значения.

Вообще, если функция f нечётная, то интеграл $\int_{-b}^{+b} f(x) dx$ будет равен 0 для любого неотрицательного b , поэтому

$$\text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$$

для любой нечётной функции f .

Если же f чётная, то

$$\int_{-b}^{+b} f(x) dx = 2 \int_0^b f(x) dx$$

поэтому интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ существует только в том случае, если сходится интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$, то есть для чётной функции интеграл в смысле главного значения существует только в том случае, если существует последний несобственный интеграл. Так как любая определённая на всей прямой функция f может быть представлена в виде

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

где $g_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ — чётная функция, а $g_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ — нечётная функция, то при интегрируемости f на любом отрезке вещественной оси справедлива формула

$$\text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x) dx,$$

если существует $\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x) dx$. Например,

$$\text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi,$$

так как функция $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ представима в виде суммы нечётной функции $g_2(x) = \frac{x}{1+x^2}$ и чётной функции $g_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Лекция 8

Ряды с элементами произвольных знаков

Мы переходим к изучению рядов, в которых бесконечно много положительных элементов и бесконечно много отрицательных. Перед изучением этого материала полезно повторить материал по бесконечным рядам из первого семестра. Если удаётся выяснить, что ряд сходится абсолютно, что можно сделать с помощью изученных ранее признаков (признаки Вейерштрасса, Коши, Даламбера, Коши – Маклорена), то далее отсюда следует сходимость. Если же ряд сходится условно, то для исследования на сходимость нужны другие признаки, к изучению которых мы и переходим.

Признак, который мы докажем сейчас, позже можно будет вывести из других признаков, однако мы приведём здесь и его прямое доказательство.

Теорема 23. Признак Лейбница. Пусть соседние члены ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ имеют разные знаки и последовательность $\{|a_n|\}$ монотонно стремится к нулю. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится.

Доказательство. Докажем, что для любых $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

Пусть $b_n = |a_n|$. Так как соседние элементы ряда разных знаков и последовательность модулей этих элементов монотонно стремится к нулю, то то

$$|a_n + a_{n+1}| = |a_n| - |a_{n+1}| = b_n - b_{n+1}.$$

Рассмотрим отрезок ряда $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}$. При $p = 2k$ имеем:

$$\begin{aligned} |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+2k}| &= |a_{n+1} + a_{n+2}| + |a_{n+3} + a_{n+4}| + \dots + |a_{n+2k-1} + a_{n+2k}| = \\ &= b_{n+1} - b_{n+2} + b_{n+3} - b_{n+4} + \dots + b_{n+2k-1} - b_{n+2k} = \\ &= b_{n+1} - (b_{n+2} - b_{n+3}) - \dots - (b_{n+2k-2} - b_{n+2k-1}) - b_{n+2k} \leq b_{n+1} = |a_{n+1}|. \end{aligned}$$

Такое раскрытие модулей верно, так как все числа $a_i + a_{i+1}$, $a_{i+2} + a_{i+3}$ и т.д. одного знака при любом натуральном i .

При $p = 2k - 1$ имеем:

$$\begin{aligned} |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+2k-1}| &= |a_{n+1}| - |a_{n+2} + a_{n+3}| - |a_{n+4} + a_{n+5}| - \dots - |a_{n+2k-2} + a_{n+2k-1}| = \\ &= b_{n+1} - (b_{n+2} - b_{n+3}) - (b_{n+4} - b_{n+5}) - \dots - (b_{n+2k-2} - b_{n+2k-1}) \leq b_{n+1} = |a_{n+1}|. \end{aligned}$$

Таким образом требуемое неравенство доказано. Вспоминая, что $|a_n| \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$, по заданному $\varepsilon > 0$ найдём такое N , что при всех натуральных $n > N$ будет выполнено неравенство $|a_n| < \varepsilon$. Тогда из доказанного неравенства при всех таких n и при всех $p \in \mathbb{N}$ имеем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Таким образом ряд из условия сходится по критерию Коши и теорема доказана. $\square$

Обратим внимание, что попутно доказано, что **что остаток ряда Лейбница по модулю всегда меньше своего первого элемента.**

Пример 24. 1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится, так как его соседние элементы a_n и a_{n+1} противоположных знаков, а последовательность $|a_n|$ монотонно стремится к нулю. Сумма этого ряда равна $\ln 2$, что было доказано при решении задач первого семестра.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ сходится в силу признака Лейбница. Действительно, имеем следующую цепочку равенств:

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi^2}{\pi\sqrt{n^2+1} + \pi n}\right),$$

откуда видно как чередование знаков элементов ряда, так и монотонное стремление к нулю модулей его элементов.

Хотя знакопеременные ряды, которые фигурируют в признаке Лейбница, имеют специальный вид, но на практике они встречаются достаточно часто.

Признаки Абеля и Дирихле

Теперь докажем два более общих признака, которые часто применяются для исследования рядов произвольного знака. Аналогичные признаки сходимости для несобственных интегралов имеют похожие формулировки, так что полезно сравнить.

Сначала сформулируем и докажем вспомогательное утверждение.

Предложение 14. Преобразование Абеля. Пусть $A_M = \sum_{n=N+1}^M a_n$. Тогда при $M > N$ выполнены следующие равенства:

$$\sum_{n=N+1}^M a_n b_n = A_M b_M + \sum_{n=N+1}^{M-1} A_n (b_n - b_{n+1}) \quad (3)$$

и

$$\sum_{n=N+1}^M a_n b_n = A_M b_{M+1} + \sum_{n=N+1}^M A_n (b_n - b_{n+1}). \quad (4)$$

Доказательство. Если вычесть из правой части равенства (3) правую часть равенства (4), то получим

$$A_M b_M - A_M b_{M+1} - A_M b_M + A_M b_{M+1} = 0,$$

поэтому из справедливости равенства (3) вытекает справедливость равенства (4) и наоборот.

Докажем равенство (3). Имеем:

$$\begin{aligned} A_M b_M + \sum_{n=N+1}^{M-1} A_n (b_n - b_{n+1}) &= A_M b_M + \sum_{n=N+1}^{M-1} A_n b_n - \sum_{n=N+1}^{M-1} A_n b_{n+1} = \\ &= A_M b_M + \sum_{n=N+1}^{M-1} A_n b_n - \sum_{n=N+2}^M A_{n-1} b_n = A_{N+1} b_{N+1} + \sum_{n=N+2}^M (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=N+1}^M a_n b_n, \end{aligned}$$

чем всё и доказано. $\square$

Эта формула является дискретным аналогом формулы интегрирования по частям. Здесь интегрирование по частям заменено на “суммирование по частям”, то есть через суммирование наборов по отдельности можно представить сумму произведений наборов.

Теперь докажем признаки Абеля и Дирихле. Обратите внимание, как помогает при доказательстве преобразование Абеля.

Теорема 24. Признаки Абеля и Дирихле. Рассмотрим ряд, каждый элемент которого является произведением двух чисел:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n. \quad (5)$$

Признак Абеля. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, а последовательность $\{b_n\}$ монотонна и ограничена. Тогда ряд (5) сходится.

Признак Дирихле. Пусть последовательность $\{b_n\}$ монотонно стремится к нулю, а последовательность $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ограничена, то есть существует такое $C > 0$, что $|s_n| \leq C$ при всех натуральных n . Тогда ряд (5) сходится.

Доказательство. Можно считать, что последовательность $\{b_n\}$ неотрицательна и монотонно стремится к нулю. Действительно, если она неположительна и монотонно стремится к нулю, то можно свести доказательство к случаю неотрицательной последовательности, рассмотрев ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} (-a_n)(-b_n)$, а если её предел равен B и $B \neq 0$ (что возможно в признаке Абеля), то справедливо равенство $b_n = B + c_n$, где c_n монотонно стремится к нулю, а тогда всё снова сводится к исследованию сходимости с неотрицательной и стремящейся к нулю последовательности.

Обозначим $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$ через A_{n+p} и воспользуемся преобразованием Абеля для отрезка ряда (3):

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| &= \left| A_{n+p} b_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \right| \leq \\ &\leq \max_{n+1 \leq k \leq n+p} |A_k| \sum_{k=n+1}^{n+p} (b_k - b_{k+1}) \leq \max_{n+1 \leq k \leq n+p} |A_k| b_n. \end{aligned}$$

Здесь мы провели оценки, воспользовавшись тем, что $\{b_n\}$ состоит из неотрицательных элементов и монотонно стремится к нулю.

Для доказательства **признака Абеля** заметим, что $|A_k|$ представляет собой модуль некоторого отрезка $\sum_{l=n+1}^k a_l$ ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, который может быть сделан меньше любого наперёд заданного $\varepsilon > 0$ в силу критерия Коши сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Так как последовательность $\{b_n\}$ монотонна, то она ограничена некоторой константой $M > 0$, откуда окончательно получаем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < M\varepsilon,$$

то есть для ряда (3) выполнен критерий Коши, поэтому он сходится. Таким образом, признак Абеля доказан.

Для доказательства **признака Дирихле** заметим, что

$$|A_k| = \left| \sum_{l=n+1}^k a_l \right| = |s_k - s_n| \leq |s_k| + |s_n| \leq 2C,$$

а также в силу стремления к нулю $\{b_n\}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ выполнено неравенство $b_n < \varepsilon$, поэтому окончательно

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < 2C\varepsilon.$$

Таким образом, для ряда (5) снова выполнен критерий Коши и признак Дирихле также доказан. $\square$

Отметим, что **признак Лейбница** теперь является следствием признака Дирихле. Действительно, $\{|a_n|\}$ монотонно стремится к нулю, а $|s_n| = \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$ при всех натуральных n , поэтому для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |a_n|$ выполнены условия признака Дирихле, что и означает его сходимости.

Пример 25. 1) Выясним, при каких α сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}$.

Если $\alpha \leq 0$, то не выполнен необходимый признак сходимости (проверьте это в качестве **упражнения**), поэтому ряд расходится.

Если же $\alpha > 0$, то последовательность $b_n = 1/n^\alpha$ монотонно стремится к нулю, а для последовательности

$$s_n = \sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n$$

имеем:

$$\begin{aligned} \sin(1/2) \cdot s_n &= \sin(1/2) \cdot \sin 1 + \sin(1/2) \cdot \sin 2 + \dots + \sin(1/2) \cdot \sin n = \\ &= \frac{1}{2}(\cos(1/2) - \cos(3/2) + \cos(3/2) - \cos(5/2) + \cos(5/2) - \\ &\quad - \cos(7/2) + \dots + \cos(n-1/2) - \cos(n+1/2)) = \\ &= \frac{1}{2}(\cos(1/2) - \cos(n+1/2)), \end{aligned}$$

откуда

$$|s_n| = \left| \frac{\cos(1/2) - \cos(n+1/2)}{2\sin(1/2)} \right| \leq \frac{1}{\sin(1/2)}.$$

Таким образом, существует такое $C = \frac{1}{\sin(1/2)}$, что $|s_n| \leq C$ при всех натуральных n , поэтому для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}$ при $\alpha > 0$ выполнен признак Дирихле, а тогда этот ряд сходится при таких α .

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{n^3+1}{n^3+2}$ сходится в силу признака Абеля. Действительно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ сходится, так как это ряд из пункта 1, где $\alpha = \frac{1}{2}$, а в силу равенства

$$\frac{n^3+1}{n^3+2} = 1 - \frac{1}{n^3+1}$$

и монотонного возрастания последовательности $\{n^3\}$ получаем, что последовательность $b_n = \frac{n^3+1}{n^3+2}$ монотонна и ограничена, поэтому признак Абеля выполнен.

3) Докажем расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n} + \sin n}$. Для его общего члена имеем в силу локальной формулы Тейлора

$$\begin{aligned} \frac{\sin n}{\sqrt{n} + \sin n} &= \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} = \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\sin n}{\sqrt{n}} + \frac{\sin^2 n}{n} + o\left(\frac{\sin^2 n}{n}\right)\right) = \\ &= \frac{\sin n}{\sqrt{n}} - \frac{\sin^2 n}{n} + \frac{\sin^3 n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\sin^3 n}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n} + \sin n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{\sqrt{n}} - \frac{\sin^2 n}{n} + \frac{\sin^3 n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\sin^3 n}{n\sqrt{n}}\right) \right),$$

причём ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ сходится в силу пункта 1, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^3 n}{n\sqrt{n}}$ сходится, ибо $\left| \frac{\sin^3 n}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ и тогда применим признак Вейерштрасса, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} o\left(\frac{\sin^3 n}{n\sqrt{n}}\right)$ сходится, так как по определению

$$o\left(\frac{\sin^3 n}{n\sqrt{n}}\right) = \gamma_n \cdot \frac{\sin^3 n}{n\sqrt{n}},$$

где γ_n – бесконечно малая последовательность, поэтому при всех достаточно больших n справедливо неравенство

$$\left| o\left(\frac{\sin^3 n}{n\sqrt{n}}\right) \right| \leq \left| \frac{\sin^3 n}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

и снова применим признак Вейерштрасса.

Однако ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$ расходится, так как

$$\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1 - \cos 2n}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2n}{2n},$$

причём ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$ сходится в силу признака Дирихле, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n}$ расходится, откуда следует, что расходится и исходный ряд.

При этом при исследовании исходного ряда на сходимость может возникнуть идея применить признак Дирихле, если положить $b_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sin n}$, а $a_n = \sin n$. Как следует из расходимости, этот признак не даст ответ на вопрос о сходимости. Причина этого в том, что последовательность b_n **стремится к нулю, не являясь монотонной**. Таким образом, рассмотренный пример демонстрирует важность условия монотонности последовательности b_n в признаке Дирихле. Более того, общий член этого ряда никак нельзя представить в виде произведения двух последовательностей, удовлетворяющих признаку Дирихле или признаку Абеля, так как этот ряд расходится.

Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Теорема 25. Пусть n – неотрицательное целое число. Пусть также функция f непрерывно дифференцируема $n + 1$ раз на отрезке $[a, x]$. Тогда

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Доказательство. Докажем по индукции. При $n = 0$ $f(x) = f(a) + \frac{1}{0!} \int_a^x f'(t)dt$, что равносильно формуле Ньютона – Лейбница.

Пусть равенство справедливо при $n = k$. В этом случае остаточный член запишется в виде $\frac{1}{k!} \int_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k dt$. Интегрируя его по частям, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \int_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k dt &= -\frac{1}{(k+1)!} \int_a^x f^{(k+1)}(t)d(x-t)^{k+1} = \\ &= -\frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(t)(x-t)^{k+1} \Big|_a^x + \frac{1}{(k+1)!} \int_a^x f^{(k+2)}(t)(x-t)^{k+1} dt = \\ &= \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + \frac{1}{(k+1)!} \int_a^x f^{(k+2)}(t)(x-t)^{k+1} dt. \end{aligned}$$

Подставляя в верное по предположению индукции при $n = k$ равенство полученное выражение, видим, что формула Тейлора справедлива и при $n = k + 1$, то есть теорема доказана. $\square$

Эта теорема очень полезна при получении некоторых разложений по формуле Тейлора, например, при разложении арктангенса и логарифма. Получим эти формулы.

Пример 26. Прежде всего напомним, что по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $-x$, $|x| < 1$, $x \neq 0$

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots (-1)^n x^n + \dots = \frac{1}{1+x}.$$

1) Рассмотрим функцию $f(x) = \ln(1+x)$. Как мы знаем, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, поэтому при всех таких x , что $|x| < 1$, можем записать равенство

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + \frac{(-x)^n}{1+x},$$

где $\frac{(-x)^n}{1+x} = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k x^k$.

Интегрируя это равенство, получим

$$\int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t}.$$

Можно непосредственно убедиться, что равенство остаётся справедливым при $x = 0$ и $x = 1$.

Если применить доказанную теорему “в лоб”, то остаток в интегральной форме запишется в другом виде: $\frac{1}{n!} \int_0^x \frac{(-1)^n n!}{(1+u)^{n+1}} (x-u)^n du$. Однако от такой формы остатка перейти

к $(-1)^n \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t}$ можно с помощью монотонной замены $t = \frac{x-u}{1+u}$ (**проверьте в качестве упражнения!**), так что полученная при интегрировании суммы форма остатка равна той, которая указана в теореме.

2) Если $f(x) = \operatorname{arctg} x$, то

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-x^2)^n}{1+x^2}.$$

Снова интегрируя, получим

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}.$$

По первой теореме о среднем существует такое $\theta = \theta(x)$, $0 \leq \theta \leq 1$, что

$$(-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} = \frac{(-1)^n}{1+\theta x^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

откуда видно, что остаточный член стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$ и $|x| \leq 1$, что означает равенство

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

при $|x| \leq 1$.

Упражнение. Пусть $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. Докажите, что $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)(2k-1)!}$.

Лекция 9

Приложения определённого интеграла (площадь)

Мы не будем вдаваться в определение площади, а лишь обсудим некоторые интуитивно очевидные свойства площади и покажем, что для вычисления площадей некоторых множеств на плоскости можно воспользоваться понятием определённого интеграла.

Площадь плоской фигуры D мы будем обозначать $S(D)$. Выделим несколько свойств площади, известных из школьного курса.

- 1) Площадь всякой фигуры D , имеющей площадь, неотрицательна.
- 2) Если фигуры D_1 и D_2 имеют площадь и $D_1 \subseteq D_2$, то $S(D_1) \leq S(D_2)$.
- 3) Если фигуры D_1 и D_2 имеют площадь и $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, то $S(D_1 \cup D_2) = S(D_1) + S(D_2)$.
- 4) Площадь любого прямоугольника равна произведению его сторон.

Элементарными фигурами назовём те, которые состоят из конечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, причём прямоугольники пересекаются только по своим границам. Очевидно, что элементарные фигуры имеют площадь. Если в фигуру D на плоскости можно вписать элементарную фигуру P_1 и вокруг неё можно описать элементарную фигуру P_2 , то получим включения $P_1 \subset D \subset P_2$. Нестрого говоря, фигура D имеет площадь, если при любом $\varepsilon > 0$ можно вписать в D элементарную фигуру P_1 и описать вокруг D элементарную фигуру P_2 , для которых $S(P_2) - S(P_1) < \varepsilon$ (см. рисунок).

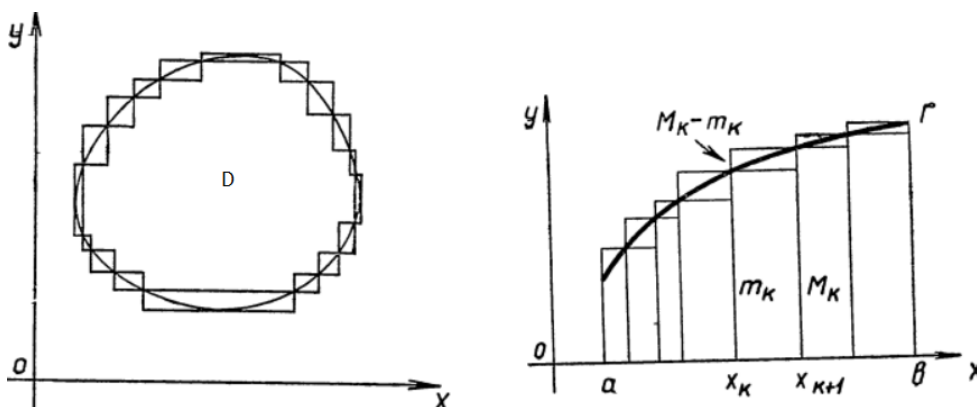


Рис. 5: Слева элементарные фигуры вписаны в D , а справа – в криволинейную трапецию

Фигуры, имеющие площадь, будем называть *квадрируемыми*.

Теперь в качестве D рассмотрим множество точек между графиком функции f , интегрируемой на отрезке $[a, b]$, и осью абсцисс. Роль элементарных фигур играют прямоугольники, соответствующие нижним и верхним суммам Дарбу (см. правую часть рисунка), а сами суммы Дарбу являются площадями соответствующих элементарных фигур. Площадь криволинейной трапеции будем обозначать $S(f, a, b)$.

Запишем свойства площади для криволинейных трапеций (для простоты считаем, что $\forall x \in [a, b] f(x) \geq 0$).

- 1) При всех $c \in [a, b]$ $S(f, a, b) = S(f, a, c) + S(f, c, b)$.
- 2) $\inf_{a \leq x \leq b} f(x)(b - a) \leq S(f, a, b) \leq \sup_{a \leq x \leq b} f(x)(b - a)$.

Сформулируем теорему о связи площади криволинейной трапеции с определённым интегралом.

Теорема 26. Пусть функция f неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда $S(f, a, b) = \int_a^b f(x)dx$.

Доказательство. Для любого разбиения T отрезка $[a, b]$ выполнены неравенства

$$s(T) = \sum_{k=1}^n \inf_{x \in \Delta_k} f(x) |\Delta_k| \leq S(f, a, b) \leq \sum_{k=1}^n \sup_{x \in \Delta_k} f(x) |\Delta_k| = S(T),$$

то есть площадь криволинейной трапеции всегда зажата между верхней и нижней суммами Дарбу. В силу критерия интегрируемости, из того, что f интегрируема на $[a, b]$, следует, что при стремлении диаметра разбиения к нулю верхняя и нижняя суммы Дарбу стремятся к общему значению $I = \int_a^b f(x)dx$. Тогда к этому же значению стремится и площадь, то есть $S(f, a, b) = \int_a^b f(x)dx$. $\square$

Примеры применения мы рассмотрим на семинарах.

Приложения определённого интеграла (длина дуги кривой)

Кривой L в пространстве $\mathbb{R}^3$ называется множество значений вектор-функции

$$(x(t), y(t), z(t)),$$

каждая компонента которой определена и непрерывна на некотором промежутке $I \subset \mathbb{R}$. Мы в качестве промежутков будем чаще всего рассматривать отрезок $[a, b]$.

Точка $C(x, y, z)$ называется *кратной точкой кривой* или *точкой самопересечения*, если существуют различные числа $t_1, t_2 \in [a, b]$, такие, что

$$x(t_1) = x(t_2), \quad y(t_1) = y(t_2), \quad z(t_1) = z(t_2).$$

Если точка кривой не является кратной, то она называется *простой точкой кривой*. Кривая, в которой все точки простые, называется *простой кривой*. Если

$$x(a) = x(b), \quad y(a) = y(b), \quad z(a) = z(b),$$

а других кратных точек нет, то кривая называется *простой замкнутой*.

Обсудим лишь понятие длины дуги кривой, задаваемой непрерывно дифференцируемыми функциями x, y, z . Если взять разбиение $T = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ отрезка $[a, b]$ и соединить отрезками прямых точку $A_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ с точкой $A_1(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$, точку $A_1(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ с точкой $A_2(x(t_2), y(t_2), z(t_2))$ и так далее до $A_n(x(t_n), y(t_n), z(t_n))$, то получим *вписанную в кривую L ломаную l* с вершинами $A_0, A_1, \dots, A_n$ (см. рисунок).

Отрезок $\overline{A_{i-1}A_i}$, $i = 1, \dots, n$ называется *звеном ломаной*. Длины ломаных, очевидно, равны суммам длин их звеньев, а для длины звена справедлива вытекающая из теоремы Пифагора формула

$$|\overline{A_{i-1}A_i}| = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если длины всех вписанных ломаных, построенных по всевозможным разбиениям, ограничены сверху, то *точная верхняя грань этих длин называется длиной дуги кривой L* . Кривая, имеющая длину, называется *спрямляемой*.

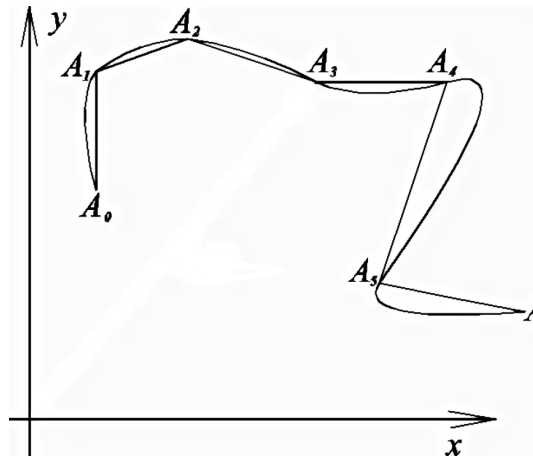


Рис. 6: Шестизвенная ломаная вписана в плоскую кривую

Запишем свойства длин кривых, аналогичные свойствам площадей криволинейных трапеций. При этом считаем, что

$$|v(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

Длину дуги кривой L , заданной на отрезке $[a, b]$, будем обозначать $d(L, a, b)$. Итак, свойства.

- 1) При всех $c \in [a, b]$ $d(L, a, b) = d(L, a, c) + d(L, c, b)$.
- 2) $\inf_{a \leq t \leq b} |v(t)|(b-a) \leq d(L, a, b) \leq \sup_{a \leq t \leq b} |v(t)|(b-a)$.

Отметим, что сам вектор $v(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ является касательным к кривой L в точке t и в литературе часто называется *вектором скорости*.

Теорема 27. Пусть функции x, y, z непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Пусть также кривая L не имеет самопересечений при $t \in [a, b]$, кроме, быть может, совпадения точек $A(x(a), y(a), z(a))$ и $B(x(b), y(b), z(b))$. Тогда кривая L спрямляема и

$$d(L, a, b) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Приведём идею одного из возможных доказательств. Для этого, пользуясь тем, что функции x, y, z непрерывно дифференцируемы, применим к разностям под знаками корней теорему Лагранжа:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2} = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2 + (z'(\tau_i))^2} (t_i - t_{i-1}), \end{aligned}$$

где $\xi_i, \eta_i, \tau_i \in (t_i, t_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$. Далее можно показать, что из непрерывности функций x', y', z' на отрезке $[a, b]$, а значит и на всех отрезках $[t_{i-1}, t_i]$, следует (в силу равномерной непрерывности каждой из этих производных), что при достаточно малых диаметрах $d(T)$ разбиений отрезка $[a, b]$ сумма

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2 + (z'(\tau_i))^2} (t_i - t_{i-1})$$

достаточно мало отличается от суммы

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\zeta_i))^2 + (y'(\zeta_i))^2 + (z'(\zeta_i))^2} (t_i - t_{i-1}),$$

где $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$. То есть теперь для всех функций x', y', z' выбрана одна точка из того же отрезка, что и точки ξ_i, η_i, τ_i , причём числа

$$\sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2 + (z'(\tau_i))^2} \text{ и } \sqrt{(x'(\zeta_i))^2 + (y'(\zeta_i))^2 + (z'(\zeta_i))^2}$$

отличаются достаточно мало и обе рассматриваемые суммы лежат между числами

$$\inf_{a \leq t \leq b} |v(t)|(b-a) \text{ и } \sup_{a \leq t \leq b} |v(t)|(b-a).$$

Но выражение

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\zeta_i))^2 + (y'(\zeta_i))^2 + (z'(\zeta_i))^2} (t_i - t_{i-1}),$$

является интегральной суммой, и при стремлении $d(T)$ к нулю эта сумма сходится к интегралу $\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$. Такова идея доказательства.

Упражнение. Проведите доказательство со всеми подробностями.

Для плоской кривой верны все те же рассуждения, только функция z отсутствует. Кроме того, можно и обобщить всё написанное выше на пространство $\mathbb{R}^n$, добавляя новые координатные функции.

Приведём несколько примеров на вычисление длины дуги кривой, а заодно введём несколько новых полезных понятий.

Пример 27. 1) Множество всех точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек (фокусов), постоянна, называется эллипсом. Можно показать, что в подходящей прямоугольной системе координат эллипс задаётся уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$ (см. рисунок).

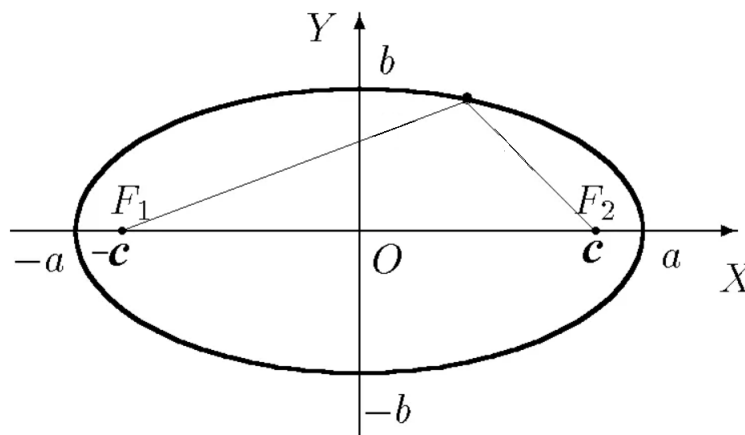


Рис. 7: Точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса

Для нахождения длины эллипса параметризуем его, взяв за параметр угол t :

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Подставив в формулу для длины дуги кривой функции x и y , получим выражение для длины эллипса:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = b \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin^2 t} dt = 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin^2 t} dt.$$

Полученный интеграл не выражается в элементарных функциях. Он называется полным эллиптическим интегралом второго рода, и через него выражается длина дуги эллипса. Существуют таблицы, в которых значения эллиптических интегралов указаны с высокой степенью точности. Таким образом, мы видим, что даже для просто заданных кривых нахождение длины дуги может привести к сложным интегралам. Об эллиптических интегралах подробнее можно прочитать, например, в книге Г. М. Физтенгольца.

2) Если кривая на плоскости задана явным уравнением, то есть

$$L = \{(x, y) | y = f(x), x \in [a, b]\},$$

то положим $x = t$. Тогда длина дуги такой кривой запишется в виде

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

3) **Полярная система координат.** Рассмотрим на плоскости луч OP с началом в точке O . Соединим произвольную точку M плоскости с точкой O . Пусть $r = |OM|$, а угол POM равен φ . Пара чисел (r, φ) называется **полярными координатами** точки M . Введенная таким образом система координат называется полярной. Отметим, что угол φ чаще всего выбирают из промежутка $[0, 2\pi)$ или $(-\pi, \pi]$, но, вообще говоря, этот угол может принимать любые действительные значения. Очевидно, что любой точке плоскости можно поставить в соответствие пару таких чисел. Введём теперь на этой же плоскости декартову систему координат. Пусть точка O является началом координат, а положительное направление оси абсцисс совпадает с лучом OP . В таком случае декартовы координаты точки M запишутся в виде $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ (см. рисунок).

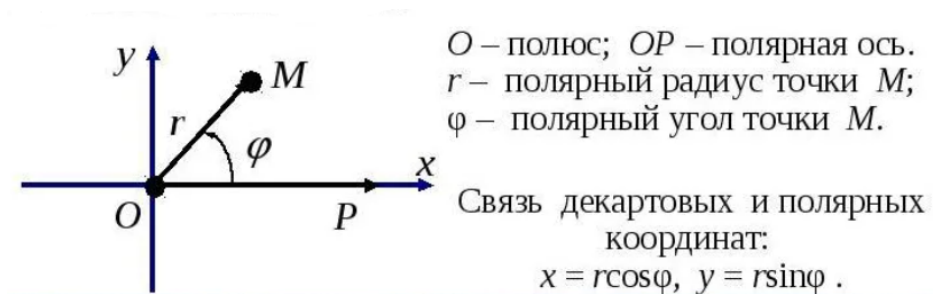


Рис. 8: Полярная система координат

Кривые в полярной системе координат чаще всего изображают, считая r функцией, зависящей от φ , то есть каждому углу ставится в соответствие расстояние между данной точкой и точкой O . Тогда, переходя к декартовым координатам, мы можем считать, что функции x и y зависят от φ , то есть

$$\begin{cases} x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi, \\ y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi, \end{cases} \quad t \in [\varphi_1, \varphi_2].$$

Таким образом, если кривая L задана в полярных координатах как функция r от аргумента φ , то, переходя к декартовым координатам и используя теорему о длине дуги кривой, получим

$$|L| = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi,$$

так как

$$\begin{aligned} (x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 &= (r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi)^2 + (r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)^2 = \\ &= r(\varphi)^2 + (r'(\varphi))^2. \end{aligned}$$

4) Применим формулу из предыдущего пункта, чтобы найти длину дуги части кривой L , заданной уравнением $r = ae^\varphi$ ($a > 0$) и находящейся внутри круга, ограниченного окружностью $r = a$. Здесь угол φ принимает любые вещественные значения, а радиус возрастает при росте φ в силу экспоненциальной зависимости. Кривая делает бесконечно много витков вокруг полюса O . Эта кривая называется логарифмической спиралью. Внутри круга с границей $r = a$ будет находиться часть спирали, соответствующая изменению угла от $-\infty$ до 0 , то есть интеграл, выражающий длину, будет несобственным. Имеем

$$|L| = \int_{-\infty}^0 \sqrt{2a^2 e^{2\varphi}} d\varphi = a\sqrt{2} \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 e^\varphi d\varphi = a\sqrt{2}.$$

Таким образом, хотя логарифмическая спираль будет делать бесконечно много витков вокруг полюса, но эти витки имеют достаточно малые длины, поэтому сумма их длин конечна.

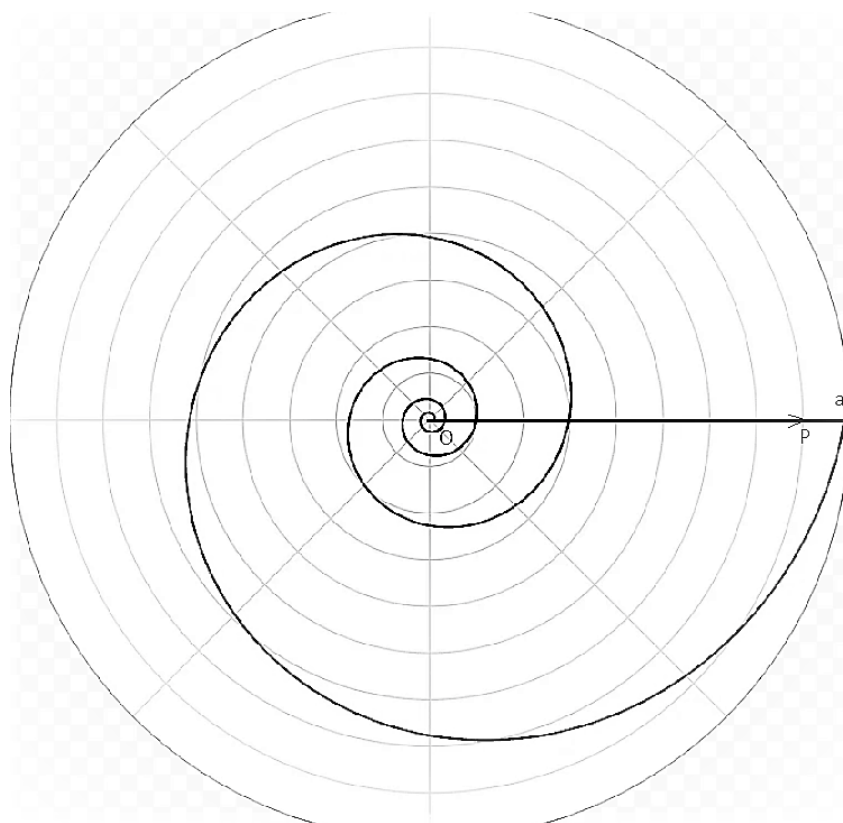


Рис. 9: Логарифмическая спираль

Приложения определённого интеграла (объёмы тел)

Объём тела можно определить аналогично тому, как определялась площадь фигуры на плоскости. Именно, сначала рассматриваются параллелепипеды с гранями, параллельными координатным плоскостям, потом конечные объединения таких параллелепипедов, называемые элементарными телами. Эти элементарные тела вписываются в тело и описываются вокруг тела. Если точная нижняя грань объёмов описанных тел совпадает с точной верхней гранью объёмов вписанных тел, то это общее значение называется объёмом тела. Мы не будем выписывать свойства объёмов, как делали это для площадей и длин кривых, а лишь укажем, как можно использовать определённые интегралы для нахождения объёмов.

Тела, имеющие объём будем называть *кубируемыми*. В качестве элементарных тел можно рассматривать и другие вписанные и описанные многогранники.

С помощью определённых интегралов можно находить объёмы тел вращения вокруг различных осей.

Рассмотрим неотрицательную функцию $f \in R[a, b]$. Тогда объём тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и отрезками прямых $x = a$, $x = b$, **вокруг оси Ox** , находится по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Укажем, как можно было бы получить эту формулу. Прямоугольники, площади которых образуют интегральные суммы при вращении вокруг оси Ox переходят в цилиндры (см. рисунок).

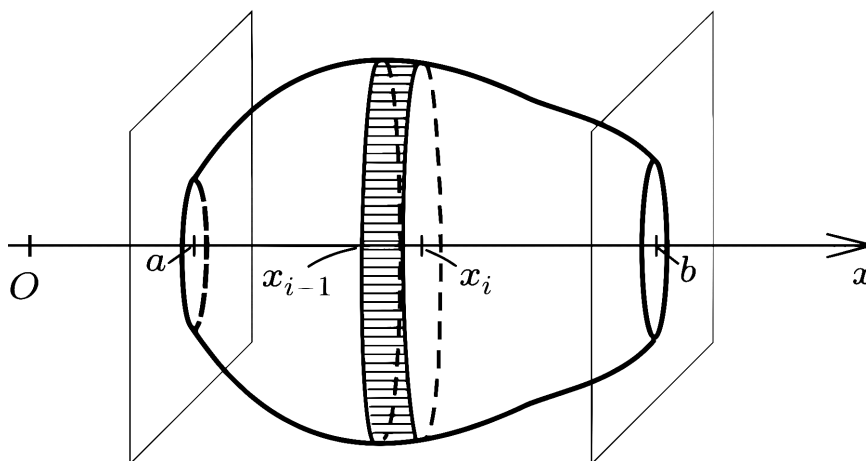


Рис. 10: Изображен один из получающихся цилиндров

Объём цилиндра на рисунке равен $V_{Ox} = \pi f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, где $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, сумма объёмов всех цилиндров равна

$$\pi \sum_{i=1}^n f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Можно доказать, что эта сумма лежит между объёмами вписанных и описанных многогранников, как и искомый объём тела вращения. Это так, так как при рассмотрении

верхней и нижней сумм Дарбу мы получаем объёмы вписанных и описанных вокруг тела вращения объединений цилиндров, а такие объединения кубируемы, так как каждый цилиндра кубируем, что легко проверить. Так как $f \in R[a, b]$, то и $f^2 \in R[a, b]$, поэтому сумма объёмов цилиндров выше может восприниматься как интегральная сумма для интегрируемой функции f^2 , а тогда при стремлении диаметра разбиения к нулю эта сумма стремится к интегралу

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Более подробно переходы обосновывать не будем.

Объём тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и отрезками прямых $x = a$, $x = b$, **вокруг оси Oy** , находится по формуле

$$V_{Oy} = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Для объяснения этой формулы снова рассмотрим прямоугольники, суммы площадей которых являются римановыми суммами для функции f на $[a, b]$. Для простоты ограничимся случаем $b > a > 0$. Тогда всякий такой прямоугольник, вращаясь вокруг оси Oy , образует кольцевой цилиндр (см. рисунок).

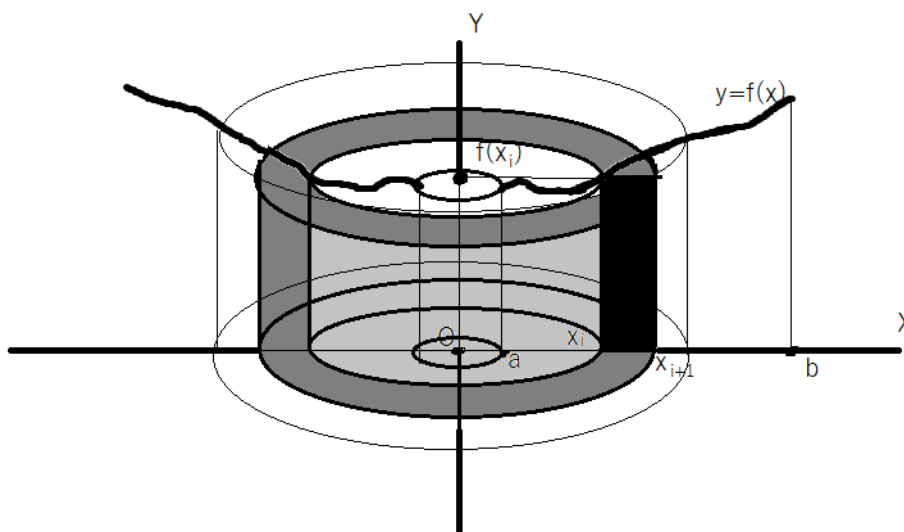


Рис. 11: Черный прямоугольник образует цилиндр

На этом рисунке черный прямоугольник, вращаясь вокруг Oy , образует цилиндр с кольцами в основании, выделенными тёмно-серым. Высота этого цилиндра равна значению функции $f(\xi_{i+1})$ в некоторой точке отрезка $[x_i, x_{i+1}]$. Объём цилиндра равен разности объёмов цилиндра, образованного большим кругом основания, и цилиндра, образованного меньшим кругом основания:

$$V = \pi f(\xi_{i+1})(x_{i+1}^2 - x_i^2).$$

Сумма объёмов всех цилиндров, образованных прямоугольниками, площади которых составляют риманову сумму, равна

$$\pi \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i+1})(x_{i+1}^2 - x_i^2) = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i+1}) \frac{x_{i+1} + x_i}{2} (x_{i+1} - x_i).$$

Выберем в качестве разметки середины отрезков разбиения: $\xi_{i+1} = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$. Функция $g(x) = xf(x)$ интегрируема на $[a, b]$, так как является произведением двух интегрируемых функций, поэтому риманова сумма

$$2\pi \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) \frac{x_{i+1} + x_i}{2} (x_{i+1} - x_i) = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \xi_{i+1} f(\xi_{i+1}) (x_{i+1} - x_i)$$

сходится к интегралу

$$2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

при стремлении диаметра разбиения к нулю.

При этом можно показать, что такие римановы суммы всегда лежат между аналогичными суммами, образованными объёмами тел, полученных вращением вокруг оси Oy объединений прямоугольников, соответствующих верхним и нижним суммам Дарбу.

Можно также показать, что объединения кольцевых цилиндров кубируемы, откуда и следует наличие объёма, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси Oy . Так как интеграл всегда зажат между объёмами вписанных и описанных кубируемых тел, а эти объёмы могут отличаться сколь угодно мало, то интеграл $2\pi \int_a^b xf(x)dx$ и выражает искомый объём.

Рассмотрим ещё одну формулу. Пусть тело расположено в пространстве $Oxyz$ между плоскостями $x = a$ и $x = b$ и площадь его сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ox , равна $S(x)$ ($a \leq x \leq b$).

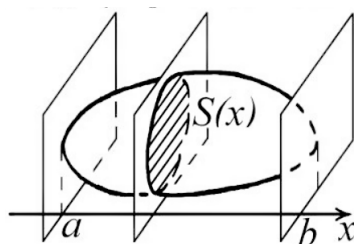


Рис. 12: Площадь сечения равна $S(x)$

Пусть функция S интегрируема на $[a, b]$, а само тело имеет объём V . Пусть также проекции фигур $S(x_1)$ и $S(x_2)$ на плоскость Oyz , где $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$ содержатся одна в другой. Тогда

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Теперь приведём примеры применения всех формул.

Пример 28. 1) Пусть криволинейная трапеция ограничена линиями

$$y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1.$$

Тогда

$$V_{Ox} = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1), \quad V_{Oy} = 2\pi \int_0^1 xe^x dx = 2\pi xe^x|_0^1 - 2\pi \int_0^1 e^x dx = 2\pi.$$

2) Найдём объём общей части цилиндров $x^2 + z^2 \leq 1$ и $y^2 + z^2 \leq 1$. Эта общая часть не является телом вращения, поэтому лучше всего воспользоваться третьей формулой для объёма. В качестве оси, к которой мы берём перпендикулярные плоскости, секущие тело, возьмём ось Oz . Любая горизонтальная плоскость, пересекающая цилиндры, будет их сечь по параллельным прямым, так как прямолинейные образующие первого цилиндра параллельны оси Oy , а второго – оси Ox . При этом сечение плоскостью $z = z_0$ не будет пустым множеством, если $-1 \leq z \leq 1$. Линии пересечения получаются из систем

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1, \\ z = z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{1 - z_0^2}, \\ z = z_0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 1, \\ z = z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{1 - z_0^2}, \\ z = z_0, \end{cases}$$

то есть линии пересечения представляют собой равные отрезки, лежащие в плоскости $z = z_0$, два из которых параллельны оси Ox , а два других – оси Oy . Таким образом, сечение горизонтальной плоскостью представляет собой либо точку (при $z = \pm 1$), либо квадрат со стороной $2\sqrt{1 - z_0^2}$ (см. рисунок).

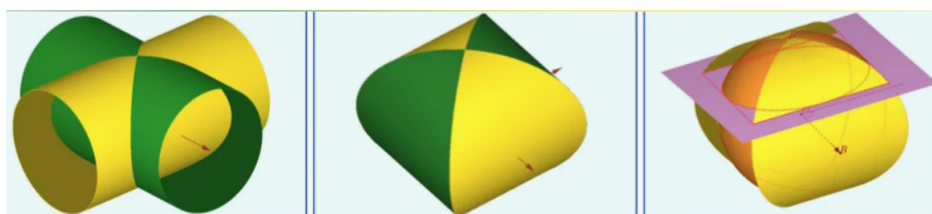


Рис. 13: Пересечение двух цилиндров, в сечении – квадрат

Площадь каждого квадрата равна $4(1 - z_0^2)$, поэтому по третьей формуле для объёма

$$V = 4 \int_{-1}^1 (1 - z^2) dz = 4 \left(z \Big|_{-1}^1 - \frac{z^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right) = \frac{16}{3}.$$