Лекция 4

Бесконечно малые последовательности

Определение 1. *Последовательность* $\{a\}_{n=1}^{\infty}$ *бесконечно малая, если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Предложение 1. *Если последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *бесконечно малая, а последовательность* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ограниченная, то последовательность* $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *бесконечно малая.*

Доказательство. По определению ограниченности имеем такое число $M > 0$, что

$$|b_n| \le M \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Так как последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N, что при всех $n > N$ $|a_n| < \varepsilon$, поэтому при всех таких n имеем $|a_n \cdot b_n| < M\varepsilon$, что в силу произвольности положительного числа ε влечёт равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$. □

Из арифметики пределов следует, что сумма и произведение любого числа бесконечно малых последовательностей снова является бесконечно малой последовательностью.

Дадим определение предела в терминах бесконечно малых последовательностей.

Определение 2. *Число* A *называется пределом последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*, если существует такая бесконечно малая последовательность* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$*, что* $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = A + \alpha_n$.

Точная верхняя и точная нижняя грань

Определение 3. *Пусть дано непустое подмножество* A *множества действительных чисел. Число* C *называется верхней гранью множества* A*, если* $a \le C$ *при всех* $a \in A$*. Если множество* A *имеет хотя бы одну верхнюю грань, то оно называется ограниченным сверху. Наименьшая из верхних граней множества* A *(если она существует) называется его точной верхней гранью и обозначается* $\sup A$ *(читается: супремум.)*

Число c *называется нижней гранью множества* A*, если* $a \ge c$ *при всех* $a \in A$*. Если множество* A *имеет хотя бы одну нижнюю грань, то оно называется ограниченным снизу. Наибольшая из нижних граней множества* A *(если существует) называется его точной нижней гранью и обозначается* $\inf A$ *(читается: инфимум.)*

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется ограниченным.

Докажем, что любое у любого ограниченного сверху множества существует точная верхняя грань.

Теорема 1. *Пусть множество* A *непусто и ограничено сверху. Тогда существует* $\sup A$.

Доказательство. Пусть B – множество всех верхних граней множество A. Оно непусто, так как множество A ограничено сверху по условию. Из определения ограниченности сверху вытекает, что A левее B. По принципу полноты существует $c \in \mathbb{R}$, разделяющее множества A и B. По определению разделяющего элемента

$$a \le c \le b \text{ при всех } a \in A, b \in B.$$

В частности, отсюда следует, что c – наименьшая из верхних граней, то есть, по определению, точная верхняя грань. □

Приведём ещё одно определение точной верхней грани.

Определение 4. *Число C называется точной верхней гранью множества A, если:*
1) $a \le C$ для всех $a \in A$;
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A : a > C - \varepsilon$.

Приведённые определения точной верхней грани равносильны. Действительно, если выполнено первое определение, то, во-первых, число C является верхней гранью, то есть справедливо условие 1 второго определения, а во-вторых, ни одно число, меньшее C, уже не является верхней гранью, то есть выполнено и условие 2 второго определения.

Обратно, если верно второе определение, то условие 1 означает, что число C – верхняя грань, а условие 2 – что число C является наименьшей из всех верхних граней.

В качестве упражнения дайте определение точной нижней грани, аналогичное второму из определений для верхней грани.

Приведём примеры точных верхних и нижних граней некоторых множеств.

Пример 1. *1) У любого конечного числового множества есть наибольший и наименьший элементы. Точная верхняя грань – это наибольший элемент, а точная нижняя грань – наименьший элемент.*
2) Пусть $A = [0, 1]$. Тогда $0 \le a \le 1$ при всех $a \in [0, 1]$, поэтому множество A ограничено. При этом для любого числа $b < 1$ существует число $a \in A$ (например, $a = 1$) которое больше b, поэтому $\sup A = 1$. Рассуждая аналогично, получим, что $\inf A = 0$.
3) Если множество $A = (0, 1)$, то оно снова является ограниченным и для каждого числа $b < 1$ имеем $1 - b = \varepsilon_0 > 0$, поэтому если положить $a = 1 - \varepsilon_0/2$, то будут выполнены неравенства $1 > a > b$. Таким образом, $\sup A = 1$. Аналогично доказывается, что $\inf A = 0$. Важно отметить, что в примерах 1) и 2) точные верхние и нижние грани принадлежат множествам, а в пункте 3) ни супремум, ни инфимум множеству A не принадлежит.
4) Рассмотрим множество $A = \{(-1)^n + 1/n, n \in \mathbb{N}\}$. Будем выписывать первые его элементы: $\{0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{6}, ...\}$. Мы видим, что все элементы с чётными номерами положительны. Легко доказать, что все элементы с чётными номерами, большими 2 ограничены сверху числом $3/2$, поэтому ни один элемент множества A не превысит $\frac{3}{2}$ (проведите доказательство!). Так как второй элемент множества равен $\frac{3}{2}$, то $\sup A = \frac{3}{2}$. Проверьте самостоятельно, что все нечётные элементы не больше 0 и строго больше -1. При этом число n можно выбрать так, что $-1 + \frac{1}{2n-1} - (-1) = \frac{1}{2n-1}$ будет меньше любого $\varepsilon > 0$, поэтому $\inf A = -1$. При этом ни один элемент множества A не равен -1, так что $\sup A \in A$, а $\inf A \notin A$.

Теорема Вейерштрасса

Теперь мы можем сформулировать важную для дальнейшего курса теорему Вейерштрасса. Прежде всего дадим необходимые определения.

Определение 5. *Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется неубывающей, если $a_n \le a_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и невозрастающей, если $a_n \ge a_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Невозрастающая или неубывающая последовательность называется* ***монотонной.***

Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется возрастающей, если $a_n < a_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и убывающей, если $a_n > a_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Возрастающая или убывающая последовательность называется ***строго монотонной.***

Например, $a_n = \frac{1}{n}$ – убывающая последовательность, а $a_n = -\frac{1}{n}$ – возрастающая последовательность. Любая строго монотонная последовательность очевидно является монотонной.

Теорема 2. *(Вейерштрасс). Монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.*

Доказательство. Будем считать (без ограничения общности), что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ неубывающая и $A = \{a_1, a_2, a_3...\}$ – множество значений этой последовательности. Тогда по условию она ограничена сверху, поэтому по теореме 1 существует точная верхняя грань множества значений $a = \sup A$.

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. По второму определению точной верхней грани

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists a_k \in A:\ a_k > a - \varepsilon \text{ и } \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \le a < a + \varepsilon.$$

Так как последовательность монотонна, при всех $n > k$ $a_k \le a_n$, поэтому $a_n > a - \varepsilon$. Таким образом, доказано, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно взять такое натуральное число k, что для всех $n > k$ $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$, то есть для последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ выполнено определение предела.

Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ невозрастающая, то для неубывающей последовательности $\{-a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ наличие предела доказывается, как и выше, а тогда существование предела у $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ следует из арифметики предела. □

В теореме доказано даже более детальное обстоятельство: предел неубывающей и ограниченной последовательности равен её точной верхней грани.

Приведём примеры использования теоремы Вейерштрасса.

Пример 2. *Пусть $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ (напомним, что в этом случае говорят, что последовательность задана рекуррентно). Требуется найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим будем иметь:*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot 2\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \ge \frac{1}{2}\sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}.$$

Таким образом, данная последовательность ограничена снизу. Если мы докажем, что она не возрастает, то будет применима теорема Вейерштрасса, то есть у последовательности будет предел.

Докажем, что последовательность не возрастает. Имеем:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \le \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}\right) = a_n,$$

чем и доказано, что $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ не возрастает.

Итак, последовательность не возрастает и ограничена снизу, поэтому в силу теоремы Вейерштрасса у неё есть предел, который обозначим через A. Из ограниченности снизу и предельного перехода в неравенствах следует, что $A \ge \sqrt{2}$. Мы можем перейти к пределу равенстве $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$. Пользуясь арифметикой пределов, будем иметь:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(A + \frac{2}{A}\right) \Leftrightarrow A^2 = 2 \Leftrightarrow A = \pm\sqrt{2},$$

откуда получим $A = \sqrt{2}$.

Интересен также вопрос о том, насколько быстро данная последовательность сходится к своему пределу, то есть сколько рекурсий необходимо для получения заданной точности. Для того, чтобы это выяснить, выпишем цепочку неравенств:

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| = \left|\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - \sqrt{2}\right| = \frac{|a_n^2 - 2\sqrt{2}a_n + 2|}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} \leq (a_n - \sqrt{2})^2.$$

Отсюда получаем цепочку неравенств

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| \leq (a_n - \sqrt{2})^2 \leq (a_{n_1} - \sqrt{2})^4 \leq (a_{n_2} - \sqrt{2})^8 \leq ... \leq (2 - \sqrt{2})^{2^{n+1}},$$

то есть скорость сходимости превышает экспоненциальную. Таким образом, рекуррентная формула даёт очень хорошее приближения числа $\sqrt{2}$.

Число e

В этом разделе будет определена одна из важнейших констант, встречающаяся практически во всех разделах математики, а также важная для многих приложений. Некоторые свойства этой константы мы изучим на семинарах.

Теорема 3. *Последовательность* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел.*

Доказательство. Докажем, что эта последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху. Тогда существование предела будет следовать из теоремы Вейерштрасса.
Ограниченность. По биному Ньютона имеем:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = C_n^0\left(\frac{1}{n}\right)^0 + C_n^1\left(\frac{1}{n}\right)^1 + C_n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + ... + C_n^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} + C_n^n\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n\cdot(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{n^3} + ... + \frac{1}{(n-1)!}\frac{n\cdot(n-1)\cdot ... \cdot 2}{n^{n-1}} +$$
$$+ \frac{1}{n!}\frac{n\cdot(n-1)\cdot ... \cdot 2\cdot 1}{n^n} = 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot ... \cdot\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

(обязательно разберитесь, как получаются друг из друга эти равенства).

Теперь отметим, что $\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot ... \cdot\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq \frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ... \cdot(k-1)\cdot k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, откуда получим, что $a_n \leq 2 + \sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$.

Монотонность. Отметим, что $\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot ... \cdot\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdot ... \cdot\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$ Таким образом, имеем цепочку неравенств:

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot ... \cdot\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdot ... \cdot\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \leq$$
$$\leq 2 + \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdot ... \cdot\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) = a_{n+1}$$

(почему верно последнее неравенство?).

Итак, доказаны ограниченность сверху и монотонное возрастание последовательности, поэтому она имеет предел. □

Определение 6. *Числом e называют предел последовательности $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, то есть по определению полагают $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.*

Число e является иррациональным. Полезно знать, что это число является также пределом последовательности

$$b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

С помощью этой последовательности можно вычислять знаки после запятой в числе e. Выпишем несколько знаков: $e \approx 2,718281828459045$.

Константу e ввел Якоб Бернулли, изучая задачу об изменении процентного дохода, начисляемого по формуле сложных процентов при увеличении частоты начисления процентов. Проценты можно начислять раз в год, раз в квартал, а если частоту начислений устремить к бесконечности, то процентный доход увеличится как раз в e раз.