

**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА**

**ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА**  
**(для студентов химических специальностей)**

**А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ**

**2025**

**Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов**

*В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.*

*Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.*

*В серии методических разработок «математика для современной химии» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций.*

*Предлагаемая Вашему вниманию серия пособий содержит описание курса лекций по линейной алгебре, многие годы читавшегося на общем потоке химического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.*

*Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче ими экзаменов и зачётов.*

## 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

### 1.4.3. Правило Крамера

## 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

### 2.1. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений

### 2.2. Векторные пространства

#### 2.2.1. Определение векторного пространства

#### 2.2.2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов

#### 2.2.3. Размерность векторного пространства. Его базис

### 2.3. Свойства линейно независимых векторов. Подпространство

#### 2.3.1. Свойства линейно независимых векторов

#### 2.3.2. Линейная оболочка системы векторов. Подпространство

### 2.4. Ранг матрицы

### 1.4.3. Правило Крамера

Вернёмся к решению системы  $A\bar{x} = \bar{b}$  в случае, когда  $|A| \neq 0$ . При этом, согласно теореме 3, существует обратная для матрицы  $A$  матрица  $A^{-1}$ . Умножим обе части равенства  $A\bar{x} = \bar{b}$  слева на матрицу  $A^{-1}$  и получим  $A^{-1}A\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$ , или  $E\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$ , или

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b}. \quad (1.43)$$

Рассмотрим произведение

$$A^{-1}\bar{b} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Заметим, что справедливы равенства

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда равенства (1.43), (1.44) дают

$$x_1 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$x_2 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$x_3 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Эти формулы и называют **правилами Крамера** решения системы линейных уравнений.

Аналогичная теорема справедлива и для решения системы  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными  $A\bar{x} = \bar{b}$  в случае, когда  $|A| \neq 0$ . Координата решения  $x_i$  получается делением определителя, полученного из определителя исходной системы заменой в нём столбца с номером  $i$  столбцом свободных членов, на определитель исходной системы. Иными словами,

$$x_i = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, i = 1, \dots, n. \quad (1.45)$$

Ограничимся пока системами уравнений с 2-мя и 3-мя неизвестными.

**Задача 1.1.** Решить систему уравнений  $\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ 2x - 7y = 81. \end{cases}$

Решение.

В этом случае матрица  $A$  и столбец свободных членов  $\bar{b}$  имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ 81 \end{pmatrix}.$$

Посчитаем основной определитель – определитель матрицы  $A$ , обозначив его символом  $\Delta$ :

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -21 + 10 = -11.$$

Посчитаем определитель, который получается из определителя основной матрицы заменой первого столбца (столбец коэффициентов при неизвестной  $x$ ) вектором  $\bar{b}$ , обозначим его символом  $\Delta_x$ :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & -5 \\ 81 & -7 \end{vmatrix} = -91 + 405 = 314.$$

Посчитаем определитель, который получается из определителя основной матрицы заменой второго столбца (столбец коэффициентов при неизвестной  $y$ ) вектором  $\bar{b}$ , обозначим его символом  $\Delta_y$ :

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 81 \end{vmatrix} = 243 - 26 = 217.$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{314}{-11} = -\frac{314}{11}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{217}{-11} = -\frac{217}{11}.$$

$$\text{Ответ: } (x, y) = \left(-\frac{314}{11}, -\frac{217}{11}\right).$$

**Замечание 1.** Обратите внимание, что решение этой системы методом подстановки было бы сопряжено с очень неприятными вычислениями, в отличие от метода Крамера.

**Замечание 2.** В такой задаче при необходимости (но вовсе не обязательно!) всегда можно сделать проверку, подставив найденные значения для  $x$  и  $y$  *во все уравнения системы (а не в некоторые!)*.

Сделаем проверку ответа в задаче 1.1.

$$3 \cdot \left(-\frac{314}{11}\right) - 5 \cdot \left(-\frac{217}{11}\right) = \frac{-942+1085}{11} = \frac{143}{11} = 13 - \text{верно.}$$

$$2 \cdot \left(-\frac{314}{11}\right) - 7 \cdot \left(-\frac{217}{11}\right) = \frac{-628+1519}{11} = \frac{891}{11} = 81 - \text{верно.}$$

Поскольку было доказано, что такая система имеет единственное решение, то это означает, что ответ верный.

**Задача 1.2.** Решить систему уравнений  $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 3x + 4y = 18. \end{cases}$

Решение.

В этом случае матрица  $A$  и столбец свободных членов  $\bar{b}$  имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Посчитаем основной определитель – определитель матрицы  $A$ , обозначив его символом  $\Delta$ :

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 12 = 24.$$

Посчитаем определитель, который получается из определителя основной матрицы заменой первого столбца вектором  $\bar{b}$ , обозначим его символом  $\Delta_x$ :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 18 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 72 = 76.$$

Посчитаем определитель, который получается из определителя основной матрицы заменой второго столбца вектором  $\bar{b}$ , обозначим его символом  $\Delta_y$ :

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 54 - 3 = 51.$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{76}{24} = \frac{19}{6}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{51}{24} = \frac{17}{8}.$$

Ответ:  $(x, y) = \left(\frac{19}{6}, \frac{17}{8}\right)$ .

**Задача 1.3.** Решить систему уравнений  $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10. \end{cases}$

Решение.

В этом случае матрица  $A$  и столбец свободных членов  $\bar{b}$  имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Посчитаем основной определитель – определитель матрицы  $A$ , обозначив его символом  $\Delta$ :

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 + 1 - 30 = -29.$$

Посчитаем определитель, который получается из определителя основной матрицы заменой первого столбца вектором  $\bar{b}$ , обозначим его символом  $\Delta_x$ :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 30 + 0 - 0 + 16 - 75 = -29.$$

Посчитаем определитель, который получается из определителя основной матрицы заменой второго столбца вектором  $\bar{b}$ , обозначим его символом  $\Delta_y$ :

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -32 + 0 + 0 - 0 + 5 - 60 = -87.$$

Посчитаем определитель, который получается из определителя основной матрицы заменой третьего столбца вектором  $\bar{b}$ , обозначим его символом  $\Delta_z$ :

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 25 - 0 - 10 - 160 = -145.$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-29}{-29} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-87}{-29} = 3$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-145}{-29} = 5.$$

Ответ:  $(x, y, z) = (1, 3, 5)$ .

**Задача 1.4.** Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10 \\ 3x + 7y + 4z = 3 \\ x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$$

Решение.

В этом случае матрица  $A$  и столбец свободных членов  $\bar{b}$  имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Посчитаем основной определитель – определитель матрицы  $A$ , обозначив его символом  $\Delta$ :

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 28 + 12 + 30 - 35 - 18 - 16 = 1.$$

Посчитаем определитель, который получается из определителя основной матрицы заменой первого столбца вектором  $\bar{b}$ , обозначим его символом  $\Delta_x$ :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 140 + 36 + 30 - 105 - 80 - 18 = 3.$$

Посчитаем определитель, который получается из определителя основной матрицы заменой второго столбца вектором  $\bar{b}$ , обозначим его символом  $\Delta_y$ :

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 40 + 45 - 15 - 60 - 24 = -2.$$

Посчитаем определитель, который получается из определителя основной матрицы заменой третьего столбца вектором  $\bar{b}$ , обозначим его символом  $\Delta_z$ :

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 42 + 9 + 60 - 70 - 12 - 27 = 2.$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2.$$

Ответ:  $(x, y, z) = (3, -2, 2)$ .

## 2. Системы линейных уравнений. Векторные пространства

### 2.1. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений

Перейдём к исследованию вопроса о решении системы линейных уравнений  $A\bar{x} = \bar{b}$  в общем случае, не делая предположений о том, что существует отличный от нуля определитель матрицы этой системы. (Это – аналог уравнения  $ax = b$  без условия  $a \neq 0$ ). Пусть система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow A\bar{x} = \bar{b}. \quad (2.1)$$

Изложим метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса решения этой системы). Если  $A$  – нулевая матрица, то для  $\bar{b} = \bar{0} \in \mathbb{R}^m$  решением системы является любой вектор  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , а для  $\bar{b} \neq \bar{0} \in \mathbb{R}^m$ , решений нет.

Пусть среди чисел  $a_{ij}$  есть отличные от 0. Можно считать, что  $a_{11} \neq 0$ , поскольку нумерация переменных и нумерация уравнений в нашем распоряжении.

(Пояснение: если, например, в исходной системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$$

$a_{11} = 0$ , а  $a_{22} \neq 0$ , то введем в рассмотрение переменные  $y_1 = x_2$ ,  $y_2 = x_1$ ,  $y_3 = x_3$  и получим систему в новых переменных

$$\begin{cases} a_{11}y_2 + a_{12}y_1 + a_{13}y_3 = b_1 \\ a_{21}y_2 + a_{22}y_1 + a_{23}y_3 = b_2 \end{cases}$$

далее, поменяв местами уравнения,

$$\begin{cases} a_{22}y_1 + a_{21}y_2 + a_{23}y_3 = b_2 \\ a_{12}y_1 + a_{11}y_2 + a_{13}y_3 = b_1 \end{cases}$$

и введя обозначения  $a_{22} = \widetilde{a_{11}}$ ,  $a_{21} = \widetilde{a_{12}}$ ,  $a_{23} = \widetilde{a_{13}}$ ,  $b_2 = \widetilde{b_1}$ ,  $a_{12} = \widetilde{a_{21}}$ ,  $a_{11} = \widetilde{a_{22}}$ ,  $a_{13} = \widetilde{a_{23}}$ ,  $b_1 = \widetilde{b_2}$ , получим систему

$$\begin{cases} \widetilde{a_{11}}y_1 + \widetilde{a_{12}}y_2 + \widetilde{a_{13}}y_3 = \widetilde{b_1} \\ \widetilde{a_{21}}y_1 + \widetilde{a_{22}}y_2 + \widetilde{a_{23}}y_3 = \widetilde{b_2} \end{cases}$$

Найдя её решение  $y_1, y_2, y_3$ , мы, тем самым, найдем  $x_1, x_2, x_3$  – компоненты решения исходной системы.

Итак, пусть  $a_{11} \neq 0$ . Вычтем теперь из второго уравнения системы первое её уравнение, умноженное на  $\frac{a_{22}}{a_{11}}$ . При этом получаем систему, равносильную исходной, второе уравнение которой не содержит переменной  $x_1$ .

Прделав аналогичные процедуры с остальными уравнениями (то есть вычитая из каждого первого уравнение, умноженное на  $\frac{a_{k1}}{a_{11}}$ ), получим систему, рав-

носившую исходной, у которой все уравнения, начиная со второго, не содержат переменной  $x_1$ . Оставляя без изменений первое уравнение системы, рассмотрим остальные её  $m - 1$  уравнений, которые образуют систему вида:

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

Снова можно считать, что  $a_{22} \neq 0$ , так как перестановка уравнений не меняет систему, а изменение нумерации неизвестных  $x_2, \dots, x_n$  в этой системе приведет к изменению нумерации этих же переменных в первом (оставшемся) уравнении. Сделаем с этой системой аналогичные, описанные выше преобразования и приведем в результате к системе уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots \dots \dots & + a'_{1n}x_n = b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \dots \dots \dots & + a''_{3n}x_n = b''_3 \\ \dots \dots \dots & \\ a''_{ml}x_l + \dots \dots \dots + a''_{mn}x_n & = b''_m \end{array} \right.$$

в которой все уравнения, начиная со второго, не содержат переменных  $x_1$  и  $x_2$ .

Полученную систему подвергнем тем же преобразованиям и т.д.

Если в процессе преобразований получено уравнение, у которого все коэффициенты и свободный член равны 0, то мы убираем его из системы.

Когда остановится процесс, и к каким результатам он может привести?

Если мы пришли к системе, одно из уравнений которой, имеет отличный от 0 свободный член, а остальные коэффициенты равны 0, то полученная система, а вместе с ней и равносильная ей исходная система, **несовместна**.

В противном случае получится система из  $l, l \leq t$  уравнений:

[illegible]

у которой  $a_{11} \neq 0, \tilde{a}_{22} \neq 0, \tilde{a}_{ll} \neq 0$ .

Если  $l = n$ , то полученная система имеет единственное решение.

Действительно, из её последнего уравнения находим  $x_n = \frac{\tilde{b}_n}{\tilde{a}_{nn}}$

и затем, подставляя это значение в предпоследнее уравнение, найдем  $x_{n-1}$ , после чего, подставляем  $x_n$  и  $x_{n-1}$  в предыдущее уравнение, найдем  $x_{n-2}$  и так далее.

Если же  $l < n$ , то эту систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1l}x_l = b_1 - a_{1,l+1}x_{l+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \dots + \tilde{a}_{2l}x_l = \tilde{b}_2 - \tilde{a}_{2,l+1}\tilde{x}_{l+1} - \dots - \tilde{a}_{2n}\tilde{x}_n \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \tilde{a}_{ll}x_l = \tilde{b}_l - \tilde{a}_{l,l+1}x_{l+1} - \dots - \tilde{a}_{ln}\tilde{x}_n \end{cases} \quad (2.3)$$

Придавая переменным  $x_{l+1}, \dots, x_n$  произвольные значения, получаем из этой системы соответствующие, однозначно определённые, значения остальных переменных.

Равенства (2.3) представляют собой алгоритм решения системы (2.1), но не дают явного описания структуры множества её решений.

Для этого нам потребуется сначала описать свойства решений такой системы и ввести в рассмотрение ряд новых важных понятий.

Рассмотрим сначала так называемую однородную систему уравнений

$A\bar{x} = \bar{0}$ . Заметим, что если векторы  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$  являются решениями этой системы, то их сумма  $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$  также является решением этой системы. Действительно,  $A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = A\bar{x}_1 + A\bar{x}_2 = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$ . Кроме того, если вектор  $\bar{x}$  – решение этой системы, то есть  $A\bar{x} = \bar{0}$ , то для любого  $\lambda \in \mathbb{R}$  вектор  $\lambda\bar{x}$  тоже является решением этой системы, так как  $A(\lambda\bar{x}) = \lambda A\bar{x} = \lambda\bar{0} = \bar{0}$ .

Это означает, что множество решений однородной системы  $A\bar{x} = \bar{0}$  образует так называемое векторное пространство. К изучению этого понятия мы и перейдем, решив сначала несколько задач.

Рассмотрим для простоты систему с 3-мя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

и постараемся осознать, что делать преобразования, описанные выше, для этой системы – это в некотором смысле то же самое, что делать эти преобразования со строками так называемой «расширенной матрицы системы»:

$$\tilde{A} = (A|\bar{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right), \text{ где}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

**Задача 2.1.** Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение.

В этом случае  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Рассмотрим «расширенную матрицу»

$$\tilde{A} = (A|\bar{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right).$$

Прделаем со строками этой матрицы следующие преобразования. Получим «новые» строки таким образом:

1-я строка: оставим на месте.

2-я строка: 1-ю строку умножим на 2 и вычтем 2-ю.

3-я строка: из 1-ой строки вычтем 3-ю.

4-я строка: из 1-ой строки вычтем 4-ю.

Обозначим (1), (2), (3), (4) – строки рассматриваемой системы. Тогда наши преобразования можно описать так:

$$(1) \rightarrow (1)$$

$$(2) \rightarrow 2 \cdot (1) - (2)$$

$$(3) \rightarrow (1) - (3)$$

$$(4) \rightarrow (1) - (4).$$

Тогда исходная матрица  $\tilde{A} = (A|\bar{b})$  будет эквивалентна матрице

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \sim$$

поделим 3-ю строку на  $-4$  и поменяем ее местами с 4-й строкой, получим

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim$$

обратите внимание: в полученной матрице в первом столбце только верхнее число не равно нулю, а все числа под ним равны нулю;

$$(3) \rightarrow (2) + (3)$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

обратите внимание: в этой матрице уже во втором столбце только верхние два числа не равны нулю, а все числа под ними равны нулю;

$$(4) \rightarrow (3) + 4 \cdot (0)$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Мы привели матрицу к «ступенчатому виду». Причем, последняя строка соответствует уравнению

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -1,$$

а это не может выполняться ни при каких значениях  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Поэтому система решений не имеет.

Ответ: решений нет.

**Замечание.** Постепенно Вы научитесь приводить матрицу к ступенчатому виду с помощью более рациональных (с точки зрения вычислений) преобразований. Понимание, как это делать, придет с опытом...

**Задача 2.2.** Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$$

Решение.

В этом случае  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix}$ .

Рассмотрим «расширенную матрицу»

$$\tilde{A} = (A|\bar{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{array} \right).$$

Проведем со строками этой матрицы следующие (эквивалентные) преобразования. Преобразования строк, которые не изменяются, иногда описывать не будем.

$$\begin{aligned} \tilde{A} = (A|\bar{b}) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) \rightarrow (1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} (3) \rightarrow (1) - (3) \\ (4) \rightarrow 2(1) - (4) \end{matrix}} \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} (3) \rightarrow 2(2) - 5(3) \\ (4) \rightarrow 3(2) - 5(4) \end{matrix}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 22 & -44 \\ 0 & 0 & -22 & 44 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Мы с помощью «верхних» строк получили «верхнюю треугольную матрицу», то есть матрицу, у которой **все элементы под главной диагональю равны нулю**.

Теперь, с помощью нижних строк (начиная с «самой нижней») будем постепенно **обнулять элементы над главной диагональю**.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 5 \\ 0 & 5 & 1 & | & 8 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1) \rightarrow (1) - (3)]{(3) \rightarrow (3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 7 \\ 0 & 5 & 0 & | & 10 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1) \rightarrow (1) - 3(2)]{(2) \rightarrow (2) - (3)} \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Если теперь от этой расширенной матрицы вернуться к системе, то мы получим

$$\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 = 2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -2. \end{cases}$$

Ответ:  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, -2)$ .

**Задача 2.3.** Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{В этом случае } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 17 & 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим «расширенную матрицу»

$$\tilde{A} = (A | \bar{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & 17 & 4 & 0 \end{array} \right).$$

Прделаем со строками этой матрицы эквивалентные преобразования.

$$\begin{aligned}
\tilde{A} = (A | \bar{b}) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & 17 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[(4) \rightarrow (1) - (4)]{(2) \rightarrow 2(1) - (2)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & 2 & 0 \\ 0 & -14 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[(4) \rightarrow 2(2) + (4)]{(3) \rightarrow 2(2) - (3)} \\
&\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim
\end{aligned}$$

Последнее преобразование показывает, что можно, не обнуляя, сразу отбрасывать строки, которые пропорциональны какой-то строке.

Мы получили ступенчатую матрицу. У матрицы, составленной из первых двух столбцов полученной матрицы, обнулим элемент, стоящий над ее главной диагональю.

$$\begin{array}{l} (2) \rightarrow (2) \\ (1) \rightarrow 7(1) - 3(2) \end{array} \quad \widetilde{\left( \begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{array} \right)}.$$

Если теперь от этой расширенной матрицы вернуться к системе, то мы получим

$$\begin{cases} 7x_1 + 0 \cdot x_2 + 11x_3 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x_1 + 11x_3 = 0 \\ 7x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы видно, что неизвестные  $x_1$  и  $x_2$  выражаются через  $x_3$ :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{11}{7}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{7}x_3, \end{cases}$$

причем, **неизвестная  $x_3$  может принимать любые действительные значения**. Но тогда решение системы можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{11}{7}t \\ x_2 = -\frac{1}{7}t \\ x_3 = t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{11}{7}t, -\frac{1}{7}t, t\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Задача 2.4. Решить систему уравнений} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{В этом случае } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим «расширенную матрицу»

$$\tilde{A} = (A|\bar{b}) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right).$$

Прделаем со строками этой матрицы эквивалентные преобразования.

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(3) \rightarrow (1) - (3)}}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(3) \rightarrow 5(2) + (3) \\ (4) \rightarrow 7(2) + (4)}}} \\ &\sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array} \right). \end{aligned}$$

У матрицы, составленной и первых трех столбцов полученной матрицы, обнулим элементы, стоящие над ее главной диагональю.

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(3) \rightarrow (3) \\ 2 \rightarrow (2) - 3(3)}}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(3) \rightarrow (3) \\ 2 \rightarrow (2)}}} \\ &\sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Вернемся к системе, получим

$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 - x_4 = 3 \\ x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$$

Из этой системы видно, что неизвестные  $x_2$  и  $x_3$  выражаются через  $x_4$ :

$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = x_4 + 3 \\ x_3 = 2x_4 + 6, \end{cases}$$

причем, **неизвестная  $x_4$  может принимать любые действительные значения**. Но тогда решение системы можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 3 + t \\ x_3 = 6 + 2t \\ x_4 = t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ответ:  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8; 3 + t; 6 + 2t; t), t \in \mathbb{R}$ .

**Замечание.** Компоненты вектора можно отделять «запятой» или «точкой с запятой». Как удобнее.

Метод Гаусса позволяет вычислять обратную матрицу  $A^{-1}$  для матрицы  $A$  следующим образом. Рассмотрим расширенную матрицу  $(A|E)$ . С помощью эквивалентных преобразований получим матрицу  $(E|B)$ . Тогда матрица  $B = A^{-1}$ . То есть для нахождения обратной матрицы надо проделать эквивалентные преобразования

$$(A|E) \rightarrow (E|A^{-1}).$$

Конечно, это будет возможно, только когда обратная матрица существует, то есть, когда определитель матрицы не равен нулю.

**Задача 2.5.** Вычислить обратную матрицу для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ .

Решение.

Рассмотрим матрицу  $(A|E)$ :

$$\begin{aligned} (A|E) &= \left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(1) \rightarrow 2(1) - (2)} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) \rightarrow 5(1) - (2)} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 10 & -6 \end{array} \right) \sim \\ &\xrightarrow{(2) \rightarrow \frac{1}{2}(2)} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{(1) \rightarrow (1) - (2)} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) \rightarrow \frac{1}{2}(2)} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{array} \right) = \\ &= (E|A^{-1}). \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Задача 2.6.** Вычислить обратную матрицу для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$ .

Решение.

Рассмотрим матрицу  $(A|E)$ :

$$\begin{aligned} (A|E) &= \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -5 & 8 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) \rightarrow 5(1) + 2(2)} \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{array} \right) \sim \\ &\xrightarrow{(1) \rightarrow (1) + 3(2)} \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 16 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{(1) \rightarrow \frac{1}{2}(1)} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{array} \right) = (E|A^{-1}). \end{aligned}$$

Следовательно,  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ .

Ответ:  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Задача 2.7.** Вычислить обратную матрицу для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ .

Решение.

Рассмотрим матрицу  $(A|E)$ :

$$\begin{aligned} (A|E) &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3) \rightarrow 7(1) - 2(3)]{(2) \rightarrow 2(1) - (2)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & | & 7 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \\ &\xrightarrow[(2) \rightarrow -(2)]{(3) \rightarrow 2(2) - (3)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3) \rightarrow -(3)]{(1) \rightarrow (1) + (3)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & | & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \\ &\xrightarrow[(1) \rightarrow \frac{1}{2}(1)]{(1) \rightarrow \frac{1}{2}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1) \rightarrow (1) - (2)]{(1) \rightarrow (1) - (2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3) \rightarrow \frac{1}{3}(3)]{(3) \rightarrow \frac{1}{3}(3)} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = (E|A^{-1}). \end{aligned}$$

Следовательно,  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ .

Ответ:  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ .

**Задача 2.8.** Вычислить обратную матрицу для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ .

Решение.

Рассмотрим матрицу  $(A|E)$ :

$$\begin{aligned}
(A|E) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\substack{(2) \rightarrow 2(1) - 3(2) \\ (3) \rightarrow (1) - (3)}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \\
&\xrightarrow[\sim]{\substack{(3) \rightarrow 2(2) - 11(3) \\ (2) \rightarrow -(2)}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -7 & -6 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{(3) \rightarrow -(3)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 6 & -11 \end{array} \right) \sim \\
&\xrightarrow[\sim]{\substack{(1) \rightarrow 3(1) - (3) \\ (2) \rightarrow 3(2) - 7(3)}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 9 & 6 & 0 & -4 & -6 & 11 \\ 0 & 33 & 0 & -55 & -33 & 77 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 6 & -11 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 9 & 6 & 0 & -4 & -6 & 11 \\ 0 & 3 & 0 & -5 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 6 & -11 \end{array} \right) \sim \\
&\xrightarrow[\sim]{(1) \rightarrow (1) - 2(2)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 9 & 6 & 0 & -4 & -6 & 11 \\ 0 & 3 & 0 & -5 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 6 & -11 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{(1) \rightarrow (1) - 2(2)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -5 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 6 & -11 \end{array} \right) \sim \\
&\xrightarrow[\sim]{\substack{(1) \rightarrow \frac{1}{9}(1) \\ (2) \rightarrow \frac{1}{3}(2), (3) \rightarrow \frac{1}{3}(3)}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & 2 & -\frac{11}{3} \end{array} \right) = (E|A^{-1}).
\end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & -1 & \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} & 2 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -5 & -3 & 7 \\ 7 & 6 & -11 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -5 & -3 & 7 \\ 7 & 6 & -11 \end{pmatrix}.$$

**Замечание.** Сравните эти решения с решениями методом Крамера, полученными в 1-м пособии.

**Замечание.** Напомним, что обратная матрица существует, только если определитель матрицы не равен нулю. Нужно ли считать определитель матрицы всякий раз перед тем, как искать обратную матрицу? Не обязательно. Рассмотрим задачу.

**Задача 2.9.** Вычислить обратную матрицу для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ .

Решение.

Рассмотрим матрицу  $(A|E)$ :

$$(A|E) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{(2) \rightarrow 2(1) - 3(2) \\ (3) \rightarrow (1) - 3(3)}]{\substack{(3) \rightarrow 2(2) - 3 \\ (2) \rightarrow -(2)}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -22 & -14 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right) \sim$$

$$\xrightarrow[\substack{(2) \rightarrow -(2)}]{(3) \rightarrow 2(2) - 3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 & 6 \end{array} \right).$$

И мы получаем, что в левой части расширенной матрицы получить единичную матрицу не удастся.

Ответ: обратной матрицы не существует.

## 2.2. Векторные пространства

### 2.2.1. Определение векторного пространства

Начнём с рассмотрения важного общего понятия *линейного* или *векторного пространства* (эти слова – синонимы). Примеры векторных пространств приведены ниже.

**Определение.** Непустое множество  $V$  элементов  $\bar{x}$ , называемых *векторами*, в котором введены операции суммы векторов, сопоставляющей каждой паре  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in V$  вектор  $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in V$ , и операция произведения числа  $\lambda \in \mathbb{R}$  на вектор, дающая вектор  $\lambda\bar{x} \in V$  (говорят, что множество  $V$  *замкнуто* относительно этих операций), называется *векторным пространством*, если эти операции подчиняются следующим законам (аксиомам векторного пространства):

1. Для любых  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in V$

$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \bar{x}_2 + \bar{x}_1$ , то есть сложение векторов – коммутативно.

2. Для любых  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \in V$

$\bar{x}_1 + (\bar{x}_2 + \bar{x}_3) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) + \bar{x}_3$ , то есть сложение векторов – ассоциативно.

3. Существует *нейтральный элемент* по сложению, обозначаемый  $\bar{0}$  такой, что для любого  $\bar{x} \in V$ :

$$\bar{x} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{x} = \bar{x}.$$

Легко доказать, что такой элемент ровно один: Если есть два элемента с таким свойством, скажем,  $\bar{0}_1$  и  $\bar{0}_2$ , то  $\bar{0}_1 + \bar{0}_2 = \bar{0}_2 + \bar{0}_1 = \bar{0}_1$  и  $\bar{0}_2 + \bar{0}_1 = \bar{0}_1 + \bar{0}_2 = \bar{0}_2 + \bar{0}_1 = \bar{0}_2$ , откуда  $\bar{0}_1 = \bar{0}_2$ .

4. Для любого  $\bar{x} \in V$  существует *обратный элемент по сложению*, обозначаемый  $-\bar{x}$  такой, что:  $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$ .

(Легко доказать единственность обратного элемента).

Первые 4 аксиомы означают, что по отношению к операции сложения векторное пространство представляет собой коммутативную (или, что то же самое, абелеву) группу. Понятие группы и его приложения будет подробнее изучено далее.

5. Для любых  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in V$  и любого  $\lambda \in \mathbb{R}$ :  $\lambda(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \lambda\bar{x}_1 + \lambda\bar{x}_2$ .

6. Для любых  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  и любого  $\bar{x} \in V$ :

$$(\lambda + \mu)\bar{x} = \lambda\bar{x} + \mu\bar{x}, (\lambda\mu)\bar{x} = \lambda(\mu\bar{x}).$$

7. Для любого  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\lambda\bar{0} = \bar{0}.$$

8. Для любого  $\bar{x} \in V$

$$0 \cdot \bar{x} = \bar{0}, \quad 1 \cdot \bar{x} = \bar{x}.$$

### **Примеры.**

1. Само множество  $\mathbb{R}$  действительных чисел с обычными операциями умножения и сложения – векторное пространство.
2. Множество векторов на плоскости и в пространстве с обычными операциями суммы векторов и умножения векторов на число – векторные пространства.
3. Множество наборов чисел  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ , в котором введены операции сложения векторов:

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

и умножения вектора на число:

$$\lambda\bar{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

образует векторное пространство  $\mathbb{R}^n$ , называемое ***n-мерным арифметическим пространством***. Термин *n-мерное*, хотя и очевиден в данном примере, будет подробно изучен ниже.

Отметим, что при введении координат на плоскости или в пространстве геометрические векторы обладали теми же свойствами операций, что и их

изображения наборами координат, что позволяло нам отождествлять множество векторов плоскости с пространством  $\mathbb{R}^2$  и множество векторов пространства с  $\mathbb{R}^3$ .

4. Множество непрерывных на отрезке функций с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число – векторное пространство.

### 2.2.2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Пусть  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in V, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ .

**Определение.** Выражение

$$c_1 \bar{x}_1 + \dots + c_n \bar{x}_n \tag{2.4}$$

называется *линейной комбинацией* векторов  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  с коэффициентами  $c_1, \dots, c_n$ .

(Ясно, что  $c_1 \bar{x}_1 + \dots + c_n \bar{x}_n$  тоже является элементом  $V$ , то есть вектором.)

Если  $c_1 = \dots = c_n = 0$ , то линейная комбинация

$0 \cdot \bar{x}_1 + \dots + 0 \cdot \bar{x}_n = \bar{0}$  называется *тривиальной*.

Если среди чисел  $c_1, \dots, c_n$  имеются отличные от 0 (что для  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  равносильно условию  $c_1^2 + \dots + c_n^2 \neq 0$ ), то линейная комбинация (2.4) называется *нетривиальной*.

**Определение.** Векторы  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in V$  называются *линейно зависимыми*, если существуют их нетривиальная линейная комбинация (2.4), равная нулевому вектору, то есть, если существуют  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}, c_1^2 + \dots + c_n^2 \neq 0$  такие, что:

$$c_1 \bar{x}_1 + \dots + c_n \bar{x}_n = \bar{0}. \tag{2.5}$$

**Определение.** Если из равенства (2.4) вытекает, что  $c_1 = \dots = c_n = 0$ , то векторы  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in V$  называются *линейно независимыми*.

Другими словами, любая нетривиальная линейная комбинация линейно независимых векторов отлична от нулевого вектора.

**Задача 4.1.** Доказать, что векторы  $(0; 1), (1; 0)$  пространства  $\mathbb{R}^2$  линейно независимы.

Решение.

Рассмотрим линейную комбинацию этих векторов  $c_1(0; 1) + c_2(1; 0)$ .

Если эта линейная комбинация равна нулевому вектору:

$$c_1(0; 1) + c_2(1; 0) = (c_1; c_2) = (0; 0),$$

то  $c_1 = c_2 = 0$ .

**Задача 4.2.** Доказать, что функции  $\sin^2 x$ ,  $\cos^2 x$ ,  $1$ , рассматриваемые как элементы векторного пространства непрерывных на всей прямой функций, линейно зависимы.

Решение.

Так как нулевым вектором этого пространства является тождественно равная нулю функция и имеет место тождество  $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ , то

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 \equiv 0,$$

– нетривиальная линейная комбинация рассматриваемых функций с коэффициентами  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = -1$ .

Следовательно, функции  $\sin^2 x$ ,  $\cos^2 x$ ,  $1$ , рассматриваемые как элементы векторного пространства непрерывных на всей прямой функций, линейно зависимы.

**Замечание.** Когда рассматриваются линейные пространства функций, определенных на множестве  $M$ , то под равенством

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

понимают *тождественное равенство*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) \equiv 0,$$

то есть равенство, которое *выполняется при всех  $x \in M$* .

**Задача 4.3.** Доказать, что функции  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $1$ , рассматриваемые как элементы векторного пространства функций, непрерывных на всей прямой, линейно независимы.

Решение.

Доказать, что функции  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $1$  линейно независимы, значит доказать, что тождество

$$c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot 1 \equiv 0,$$

может выполняться, только если  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ .

Напомним, что тождество  $c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot 1 \equiv 0$  должно выполняться при всех значениях  $x$ , в частности, оно должно выполняться при  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \pi$ . Подставим эти значения в наше тождество и получим систему из трех уравнений относительно  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ :

$$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 1 = 0 \\ c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 1 = 0 \\ c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot (-1) + c_3 \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что получилась однородная система (столбец свободных членов равен  $\bar{0}$ ). Поэтому, если основной определитель матрицы коэффициентов системы не будет равен нулю, то система будет иметь только тривиальное решение  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 1 - 0 - 1 - 0 = -2 \neq 0.$$

Следовательно, наша система имеет только тривиальное решение, а значит, тождество  $c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot 1 \equiv 0$  выполняется, только когда  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ . А это значит, что система  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $1$  линейно независима.

**Задача 4.4.** Доказать, что функции  $x, x^2, x^3$ , рассматриваемые как элементы векторного пространства функций, непрерывных на отрезке  $[0; 1]$ , линейно независимы.

Решение.

Доказать, что функции  $x, x^2, x^3$  линейно независимы, значит доказать, что тождество

$$c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 \equiv 0,$$

будет выполняться при всех  $x \in [0; 1]$ , только если  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ .

Напомним, что тождество  $c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 \equiv 0$  должно выполняться при всех значениях  $x \in [0; 1]$ , в частности, оно должно выполняться при  $x = \frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{1}{3}$ ,  $x = 1$ . Подставим эти значения в наше тождество и получим систему из трех уравнений относительно  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ :

$$\begin{cases} c_1 \cdot \frac{1}{2} + c_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + c_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0 \\ c_1 \cdot \frac{1}{3} + c_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + c_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0 \\ c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot (1)^2 + c_3 \cdot (1)^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \\ 9c_1 + 3c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что получилась однородная система (столбец свободных членов равен  $\bar{0}$ ). Поэтому, если основной определитель матрицы коэффициентов системы не будет равен нулю, то система будет иметь только тривиальное решение  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 2 + 9 - 3 - 18 - 4 = -2 \neq 0.$$

Следовательно, наша система имеет только тривиальное решение, а значит, тождество  $c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 \equiv 0$  выполняется, только когда  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ . А это значит, что система функций  $x, x^2, x^3$ , рассматриваемых как элементы векторного пространства функций, непрерывных на отрезке  $[0; 1]$ , линейно независима.

**Замечание.** Отметим, что точно так же можно было доказать линейную независимость этой системы функций на любом промежутке действительной оси (в частности, на всей действительной оси). Более того, можно было доказать линейную независимость любой системы  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  на всей действительной оси.

**Теорема 2.1.** Если векторы  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in V$  линейно зависимы, то существует число  $i, 1 \leq i \leq n$ , такое, что вектор  $\bar{x}_i$  является линейной комбинацией остальных векторов.

► Пусть выполнено равенство (2.5).

Среди чисел  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  есть отличные от нуля по определению линейной зависимости векторов  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in V$ . Пусть  $c_i \neq 0$ . Тогда из (2.5) получим:

$$c_i \bar{x}_i = -c_1 \bar{x}_1 + \dots - c_{i-1} \bar{x}_{i-1} - c_{i+1} \bar{x}_{i+1} - \dots - c_n \bar{x}_n$$

и, так как  $c_i \neq 0$ :

$$\bar{x}_i = -\frac{c_1}{c_i} \bar{x}_1 + \dots - \frac{c_{i-1}}{c_i} \bar{x}_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i} \bar{x}_{i+1} - \dots - \frac{c_n}{c_i} \bar{x}_n. \blacktriangleleft$$

**Теорема 2.2.** Если среди  $n$  векторов  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in V$  есть  $k, k < n$  линейно зависимых векторов, то и векторы  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in V$  линейно зависимы.

► Без ограничения общности пусть  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$  линейно зависимы (нумерация векторов в нашем распоряжении). Тогда

$$c_1 \bar{x}_1 + \dots + c_k \bar{x}_k = \bar{0} \quad (2.6)$$

и среди чисел  $c_1, \dots, c_k$  есть отличные от 0. Полагая  $c_{k+1} = \dots = c_n = 0$ , получим, ввиду (2.6), что:

$$c_1 \bar{x}_1 + \dots + c_k \bar{x}_k + 0 \cdot \bar{x}_{k+1} + \dots + 0 \cdot \bar{x}_n = \bar{0} \quad (2.7)$$

и линейная комбинация в правой части (2.7) нетривиальная, так как среди чисел  $c_1, \dots, c_k$  есть отличные от 0.

Чтобы не забывать о системах уравнений, представим себе, что строки матрицы  $A$  системы линейных однородных уравнений

$$A\bar{x} = \bar{0} \quad (2.8)$$

линейно зависимы.

Это означает, согласно предыдущей теореме, что среди этих строк есть строка, например, с номером  $i$ , представляющая собой линейную комбинацию остальных. Это означает, что  $i$ -е уравнение системы (2.8) есть линейная комбинация остальных, то есть это уравнение – лишнее в системе, оно следует из остальных. Значит, одной из наших задач (которые мы подробнее рассмотрим позже) является избавление от лишних уравнений в системе (2.8), что означает получение матрицы системы, строки которой линейно независимы.

### 2.2.3. Размерность векторного пространства. Его базис

**Определение.** Будем говорить, что *размерность* пространства  $V$  равна числу  $n$  (что обозначается так:  $\dim V = n$ ), если в нем существуют линейно независимые векторы  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  такие, что для любого вектора  $\bar{x} \in V$  существуют числа  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  такие, что  $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n$ .

При этом векторы  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  называются **базисом** пространства  $V$ , а числа  $x_1, \dots, x_n$  – **координатами** вектора  $\bar{x}$  в базисе  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ .

Пространство, имеющее конечную размерность, называется **конечномерным**.

**Примеры.**

- 1) Размерность пространства  $\mathbb{R}^3$  равна 3, так как векторы  $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$  линейно независимы и для любого вектора  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$  имеет место равенство:  $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3$ .

2) Вполне аналогично, размерность  $\mathbb{R}^n$  равна  $n$ .

Для этого достаточно установить следующую полезную лемму:

**Лемма 2.1.** Если линейно независимые векторы  $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_l$  являются линейными комбинациями векторов  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k$ , то  $k \geq l$ .

Доказательство леммы будет приведено позднее.

**Теорема 2.3.** Размерность пространства определена корректно, то есть любые два его базиса имеют одинаковое число векторов.

► Из леммы 2.1 следует, что если  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  и  $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m$  — два базиса пространства  $V$ , то поскольку, например, любой вектор  $\bar{g}_i$  есть линейная комбинация векторов  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ , то  $n \geq m$ . Обратно, любой вектор  $\bar{e}_j$  есть линейная комбинация векторов  $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m$ , следовательно,  $n \leq m$ . Таким образом,  $n = m$  и размерность пространства определена корректно. ◀

**Теорема 2.4.** Любому элементу  $\bar{x} \in V$  отвечает единственный набор координат  $x_1, \dots, x_n$  в базисе  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ .

► Действительно, если бы было

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n = y_1 \bar{e}_1 + \dots + y_n \bar{e}_n,$$

$$\text{то } \bar{0} = (x_1 - y_1) \bar{e}_1 + \dots + (x_n - y_n) \bar{e}_n,$$

откуда  $x_1 - y_1 = 0, \dots, x_n - y_n = 0$  ввиду линейной независимости векторов  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ . ◀

**Замечание.** Сумма векторов  $\bar{x}, \bar{y} \in V$  с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $(y_1, \dots, y_n)$  есть вектор  $\bar{x} + \bar{y}$  с координатами  $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ , так как

$$\begin{aligned} \bar{x} + \bar{y} &= x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n + y_1 \bar{e}_1 + \dots + y_n \bar{e}_n = \\ &= (x_1 + y_1) \bar{e}_1 + \dots + (x_n + y_n) \bar{e}_n. \end{aligned}$$

Вектор  $\lambda \bar{x}$ ,  $\bar{x} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ , имеет координаты  $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ . Это означает, что операциям с векторами соответствуют операции со строками их координат.

Таким образом, мы установили, что для любого векторного пространства  $V$  размерности  $n$  существует взаимнообратное отображение этого пространства в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , при котором сумме векторов  $\bar{x}, \bar{y} \in V$  сопоставляется сумма соответствующих им векторов из пространства  $\mathbb{R}^n$ , а вектору  $\lambda \bar{x} \in V$  соответствует произведение на число  $\lambda$  соответствующего вектора из пространства  $\mathbb{R}^n$ .

Это обстоятельство именуется **изоморфизмом** пространств  $V$  и  $\mathbb{R}^n$ .

Таким образом, доказана еще одна теорема

**Теорема 2.5.** Любое  $n$ -мерное векторное пространство  $V$  изоморфно пространству  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.3. Свойства линейно независимых векторов. Подпространство

### 2.3.1. Свойства линейно независимых векторов

Вернёмся к однородной системе линейных уравнений  $A\bar{x} = \bar{0}$ , множество решений которой образует векторное пространство. Нас будет интересовать естественный вопрос о размерности этого пространства и о его базисе.

Отметим важное для дальнейшего изложения следствие полученных результатов.

**Лемма 2.2.** При  $m < n$  система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

имеет отличные от  $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$  решения, и таких решений – бесконечное множество.

► В самом деле, применяя к системе (2.9) метод Гаусса, получим равносильную ей систему вида (2.3) с  $b_1 = \tilde{b}_2 = \dots = \tilde{b}_l = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1l}x_l = -a_{1,l+1}x_{l+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \dots + \tilde{a}_{2l}x_l = -\tilde{a}_{2,l+1}x_{l+1} - \dots - \tilde{a}_{2n}x_n \\ \tilde{a}_{ll}x_l = -\tilde{a}_{l,l+1}x_{l+1} - \dots - \tilde{a}_{ln}x_n. \end{cases}$$

Так как  $m < n$ , то и  $l < n$ .

Как отмечено выше, при произвольном выборе чисел  $x_{l+1}, \dots, x_n$  мы получим соответствующие числа  $x_1, \dots, x_l$  такие, что  $x_1, \dots, x_n$  – это решение системы (2.9).

Выбирая  $x_{l+1}, \dots, x_n$  так, чтобы хотя бы одно из них не равнялось 0, получим утверждение леммы. (Таких выборов – бесконечно много.) ◀

Эта лемма позволяет дать доказательство леммы 2.1.

Напомним ее формулировку.

**Лемма 2.1.** Если линейно независимые векторы  $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_l$  являются линейными комбинациями векторов  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k$ , то  $l \leq k$ .

► Действительно, пусть

$$\bar{g}_1 = c_{11}\bar{f}_1 + \dots + c_{k,1}\bar{f}_k$$

... ..

$$\bar{g}_l = c_{1l}\bar{f}_1 + \dots + c_{k,l}\bar{f}_k$$

Если числа  $x_1, \dots, x_l$  таковы, что

$$x_1\bar{g}_1 + \dots + x_l\bar{g}_l = \bar{0}, \quad (2.10)$$

то, заменяя векторы  $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_l$  их выражениями через  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k$ , получаем

$$x_1(c_{11}\bar{f}_1 + \dots + c_{k,1}\bar{f}_k) + \dots + x_l(c_{1l}\bar{f}_1 + \dots + c_{k,l}\bar{f}_k) = \bar{0}$$

или

$$(c_{11}x_1 + \dots + c_{1l}x_l)\bar{f}_1 + \dots + (c_{k,1}x_1 + \dots + c_{k,l}x_l)\bar{f}_k = \bar{0}.$$

При этом, разумеется, это равенство выполняется, если выполнены равенства

$$\begin{cases} (c_{11}x_1 + \dots + c_{1l}x_l) = 0 \\ \dots \\ (c_{k,1}x_1 + \dots + c_{k,l}x_l) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Таким образом, для любого решения системы (2.11) выполняется равенство (2.10). При  $k < l$  система (3.11), по лемме 1 имеет отличные от

$$x_1 = 0, \dots, x_l = 0$$

решения, что дает противоречие с условием линейной независимости векторов  $g_1, \dots, g_l$ . ◀

Напомним, что из леммы 1 следовало, что любые два базиса конечномерного пространства имеют одинаковое число элементов. Это означает, что размерность пространства определена корректно.

**Теорема 2.6.** Пусть  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m \in V$  – линейно независимые векторы  $n$ -мерного пространства  $V$  и  $m < n$ . Тогда векторы  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  можно дополнить до базиса пространства  $V$ .

► Требуется доказать, что в пространстве  $V$  есть  $n - m$  векторов, которые мы обозначим  $\bar{a}_{m+1}, \dots, \bar{a}_n$  такие, что векторы  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$  линейно независимы

(и, следовательно, образуют базис  $n$ -мерного пространства). Докажем сначала, что есть хотя бы один вектор  $\bar{a}_{m+1} \in V$  такой, что векторы  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  и  $\bar{a}_{m+1}$  линейно независимы. Предположим противное: для любого  $\bar{a} \in V$  существуют не все равные нулю числа  $c_1, \dots, c_{m+1}$  такие, что

$$c_1 \bar{a}_1 + \dots + c_m \bar{a}_m + c_{m+1} \bar{a}_{m+1} = \bar{0}.$$

Число  $c_{m+1} \neq 0$ , иначе мы получили бы, что векторы  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  линейно независимы, вопреки условию.

Тогда любой вектор  $\bar{a} \in V$  есть линейная комбинация  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ . Значит,  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  является базисом пространства  $V$ . Но любой базис  $V$ , как доказано, имеет  $n$  векторов. Полученное противоречие с условием теоремы  $m < n$  доказывает существование вектора  $\bar{a}_{m+1}$  линейно независимого с векторами  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ . Далее, если  $m + 1 < n$  доказываем, что существует  $\bar{a}_{m+2} \in V$  такой, что  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{m+2}$  линейно независимы и так далее. ◀

### 2.3.2. Линейная оболочка системы векторов. Подпространство

Ранее мы часто встречались с линейными комбинациями уравнений и, соответственно, с линейными комбинациями векторов – строк матрицы системы.

Рассмотрим в общем виде вопрос о том, что представляют собой всевозможные линейные комбинации векторов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m \in V$ .

**Определение.** Множество

$$L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) = \{c_1 \bar{a}_1 + \dots + c_m \bar{a}_m, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}\}$$

всевозможных линейных комбинаций векторов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m \in V$  называется **линейной оболочкой** векторов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m \in V$ .

**Теорема 2.7.** Линейная оболочка  $L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$  представляет собой линейное пространство с теми же операциями сложения и умножения на число, что были введены в пространстве  $V$ .

► Требуется проверить, что если  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in L$ , то  $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in L$  и, если  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{x} \in L$ , то  $\alpha \bar{x} \in L$ .

Действительно, пусть  $\bar{x}_i = c_{i1} \bar{a}_1 + \dots + c_{im} \bar{a}_m, i = 1, 2$ .

Тогда  $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = (c_{11} + c_{21}) \bar{a}_1 + \dots + (c_{1m} + c_{2m}) \bar{a}_m$ .

Итак, вектор  $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$  тоже имеет вид линейной комбинации векторов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  и, следовательно, принадлежит  $L$ . Аналогично, для  $\bar{x} = c_1 \bar{a}_1 + \dots + c_m \bar{a}_m$  вектор  $\alpha \bar{x} = \alpha c_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha c_m \bar{a}_m$  и принадлежит  $L$ . ◀

**Определение.** Подмножество линейного пространства  $V$ , которое само является линейным пространством относительно операций пространства  $V$ , называют *подпространством пространства  $V$* .

Теорема 2.7 допускает эквивалентную формулировку:

**Теорема 2.8.** Линейная оболочка  $L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$  является подпространством  $V$ .

В этом случае говорят, что подпространство  $L$  *порождено векторами*  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m \in V$  (или *натянута на векторы*  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m \in V$ ).

**Пример.**

Пусть  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $\bar{a}_1 = (1; 0; 0)$ ,  $\bar{a}_2 = (0; 1; 0)$ .

Тогда  $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \{(\bar{x} = (x_1, x_2, 0) | x_1, x_2 \in \mathbb{R})\}$ .

Исследуем вопрос о размерности и базисе подпространства  $L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ .

**Теорема 2.9.** Если векторы  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  линейно независимые, то размерность подпространства  $L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$  равна  $m$ , а векторы  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  образуют его базис.

**Замечание.** Напомним, что размерность пространства  $V$  обозначается  $\dim V$ , поэтому первое утверждение теоремы 2.9 можно записать в виде: если  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  линейно независимы, то  $\dim L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) = m$ .

► Поскольку, по определению,  $L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$  состоит из линейных комбинаций векторов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ , для любого  $\bar{a} \in L$  существуют  $c_1, \dots, c_m$  такие, что  $\bar{a} = c_1 \bar{a}_1 + \dots + c_m \bar{a}_m$ . Таким образом, линейно независимые векторы  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  образуют базис пространства  $L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ . ◀

**Теорема 2.10.** Любое подпространство  $L$  пространства  $V$  является линейной оболочкой некоторых векторов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ .

► Если подпространство  $L$  состоит только из нулевого вектора  $\bar{0}$ , то утверждение теоремы очевидно. Если же в  $L$  есть вектор  $\bar{a}_1 \neq \bar{0}$  то, используя теорему 2.6, можно дополнить  $\bar{a}_1$  до базиса  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  подпространства  $L$ .

Так как, по определению базиса, любой вектор из  $L$  является линейной комбинацией векторов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ , то по определению линейной оболочки имеет место равенство:

$$L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) = L. \blacktriangleleft$$

**Примечание.** Разумеется, само векторное пространство  $V$  является линейной оболочкой любого своего базиса  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ .

Какова же размерность  $L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$  в случае, когда векторы  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  линейно зависимы?

**Теорема 2.11.** Если  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  линейно зависимы и максимальное число линейно независимых среди них равно  $l$ , то:

$$\dim L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) = l.$$

► Пусть, например,  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l$  линейно независимы, тогда любой вектор  $\bar{a}_{l+1}, \dots, \bar{a}_m$  линейно выражается через  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l$ . Например, векторы  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l, \bar{a}_{l+1}$  линейно зависимы, так как их больше, чем  $l$ . Поэтому существуют числа  $c_1, \dots, c_{l+1}$ , не все равные 0, такие, что:

$$\bar{0} = c_1 \bar{a}_1 + \dots + c_{l+1} \bar{a}_{l+1}$$

Число  $c_{l+1} \neq 0$ , иначе векторы  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l$  оказались бы линейно зависимыми вопреки условию. Следовательно,

$$\bar{a}_{l+1} = -\frac{c_1}{c_{l+1}} \bar{a}_1 - \dots - \frac{c_l}{c_{l+1}} \bar{a}_l, \quad (2.12)$$

что и утверждалось.

Аналогично доказываем, что так как  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l, \bar{a}_j, j = l+2, \dots, m$  линейно зависимы, каждый вектор  $\bar{a}_j, j = l+2, \dots, m$  есть линейная комбинация векторов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l$ .

$$d_1 \bar{a}_1 + \dots + d_l \bar{a}_l = \bar{a}_j. \quad (2.13)$$

Так как любой элемент  $\bar{x} \in L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$  имеет вид  $\bar{x} = x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_m \bar{a}_m$ , то из равенств (2.12) и (2.13) следует, что любой вектор  $\bar{x} \in L$  есть линейная комбинация линейно независимых векторов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l$ . Значит,  $\dim L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) = l. \blacktriangleleft$

В теореме 2.9 доказано, что любая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  образует базис пространства

$L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ . По теореме 2.3 любые два базиса линейного пространства  $L$  имеют одинаковое количество векторов.

**Определение.** Рангом системы векторов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  называется максимальное количество линейно независимых среди них.

Согласно сказанному выше, это определение корректное.

**Теорема 2.12.** Если векторы  $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r$  являются линейными комбинациями векторов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ , то  $L(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r) \subset L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ .

► Действительно, проведя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 3.5, получаем, что любая линейная комбинация векторов  $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r$  является линейной комбинацией векторов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ . ◀

**Следствие.** Если векторы  $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r$  являются линейными комбинациями векторов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  и, наоборот, векторы  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  являются линейными комбинациями  $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r$ , то  $L(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r) = L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ .

Системы векторов, удовлетворяющих условиям следствия, называют **эквивалентными**.

## 2.4. Ранг матрицы

**Определение.** Рангом матрицы  $A$  называется ранг системы её строк, то есть максимальное количество линейно независимых среди них.

Пусть в матрице  $A$  размера  $m \times n$  зафиксированы  $k$  номеров строк и  $k$  номеров столбцов, элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов образуют квадратную матрицу, определитель которой называем **минором матрицы**, соответствующим выбранным строкам и столбцам.

Например, для матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

минор, соответствующий первой и третьей строкам и второму и пятому столбцу равен

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{32} & a_{35} \end{vmatrix}$$

Среди всех миноров матрицы рассмотрим отличные от нуля миноры.

**Теорема 2.13.** Ранг матрицы  $A$  равен наивысшему из порядков ее отличных от нуля миноров.

► Для простоты считаем, что отличен от 0 минор

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ll} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.14)$$

матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и что любой ее минор порядка  $l + 1$  равен 0.

Во-первых, первые  $l$  строк матрицы  $A$  линейно независимы. Действительно, если бы эти строки были линейно зависимы, то какая-то из них была бы линейной комбинацией других. Но тогда минор (2.14) был бы равен нулю по свойству 8 определителя.

Докажем, что любая другая строка с номером  $k, k = l + 1, \dots, n$  является линейной комбинацией первых  $l$  строк. Для этого рассмотрим всевозможные определители вида:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ll} & a_{lj} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} & a_{kj} \end{vmatrix}, j = 1, \dots, n. \quad (2.15)$$

Все эти определители равны нулю, так как при  $j = 1, \dots, l$  они содержат одинаковый столбец, а при  $j = l + 1, \dots, n$  определитель (2.15) представляет собой минор  $(l + 1)$ -го порядка исходной матрицы, а все миноры такого порядка равны 0.

Рассмотрим алгебраические дополнения элементов  $j$ -го столбца определителя (2.15). Алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  равно  $(-1)^{i+l+1}A_i$ , где

$$A_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,l} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ll} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{vmatrix}, i = 1, \dots, l.$$

По условию,

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ll} \end{vmatrix} \neq 0.$$

По теореме Лапласа о разложении определителя (2.15) по столбцу имеем:

$$a_{1j}A_1 + \cdots + a_{lj}A_l + a_{kj}A = 0,$$

или

$$a_{kj} = -\frac{A_1}{A}a_{1j} - \cdots - \frac{A_l}{A}a_{lj}, j = 1, \dots, n$$

Это означает, что строка  $(a_{k1}, \dots, a_{kn})$  матрицы  $A$  является линейной комбинацией строк  $(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{l1}, \dots, a_{ln})$  этой матрицы с коэффициентами  $-\frac{A_1}{A}, \dots, -\frac{A_l}{A}$ , что и утверждалось. ◀

Важным следствием доказанной теоремы является такое утверждение.

**Теорема 2.14.** Ранг матрицы равен максимальному количеству линейно независимых столбцов этой матрицы.

► Транспонируем матрицу, то есть сделаем её строки столбцами. При транспонировании матрицы миноры исходной матрицы совпадут, по свойству определителей, с минорами транспонированной матрицы и максимальный порядок отличных от нуля миноров не изменится. ◀

Дополним свойство 8 определителя утверждением.

**Теорема 2.15.** Определитель порядка  $n$  равен 0 тогда и только тогда, когда его строки линейно зависимы.

► Мы уже доказали, что из линейной зависимости строк следует равенство нулю определителя. Обратно, если определитель равен нулю, то максимальным порядком отличного от нуля минора может быть число, не превосходящее  $n - 1$ . Значит, ранг матрицы не превосходит числа  $n - 1$  и, следовательно, её строки линейно зависимы. ◀

**Задача 5.1.** Вычислить ранг матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ .

Решение.

Итак, ранг матрицы равен максимальному порядку отличного от нуля минора.

Рассмотрим минор  $|a_{11}| = 3 \neq 0$ . Следовательно, ранг матрицы  $A$  больше либо равен 1. Будем это записывать так:  $\text{rang } A \geq 1$ .

Рассмотрим минор  $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$ . То есть минор порядка 2 равен нулю. Но это вовсе не означает, что ранг матрицы равен двум, потому что, возможно существует другой минор порядка 2, который не равен нулю. Действительно, рассмотрим минор  $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7 \neq 0$ . Следовательно,  $\text{rang } A \geq 2$ .

Рассмотрим минор максимального размера для этой матрицы:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 60 + 18 + 4 - 4 - 60 - 18 = 0.$$

Следовательно,  $\text{rang } A = 2$ .

Ответ:  $\text{rang } A = 2$ .

**Замечание.** Вычисление ранга матрицы с помощью миноров сопряжено с большим количеством вычислений. Рассмотрим еще один способ вычисления ранга матрицы. Напомним, что ранг матрицы не меняется при эквивалентных преобразованиях матрицы.

**Задача 5.2.** Вычислить ранг матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ .

Решение.

Приведем матрицу  $A$  к ступенчатому виду с помощью эквивалентных преобразований.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{---}]{\substack{(1) \rightarrow (3) \\ (3) \rightarrow (1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{---}]{\substack{(2) \rightarrow 2(1) - (2) \\ (3) \rightarrow 3(1) - (3)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\text{rang } A = 2$ .

Ответ:  $\text{rang } A = 2$ .

**Замечание.** Выбор метода определения ранга матрицы зависит от задачи.

**Задача 5.3.** Вычислить ранг матрицы  $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$ .

Решение.

Приведем матрицу  $A$  к ступенчатому виду с помощью эквивалентных преобразований.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\substack{(1) \rightarrow (4) \\ (4) \rightarrow (1)}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\substack{(2) \rightarrow 4(1) - (2) \\ (3) \rightarrow 10(1) - (3)}} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 20 & 50 & 5 \\ 0 & 52 & 130 & 13 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 20 & 50 & 5 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 20 & 50 & 5 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,  $\text{rang } A = 2$ .

Ответ:  $\text{rang } A = 2$ .

**Задача 5.4.** Вычислить ранг матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

Решение.

Приведем матрицу  $A$  к ступенчатому виду с помощью эквивалентных преобразований.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\substack{(3) \rightarrow (1) - (3) \\ (4) \rightarrow (1) - (4)}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\substack{(3) \rightarrow (2) + (3) \\ (4) \rightarrow 2(2) + (4)}} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,  $\text{rang } A = 3$ .

Ответ:  $\text{rang } A = 3$ .

**Задача 6.1.** Является ли система векторов  $\bar{a}_1 = (2, -3, 1)$ ,  $\bar{a}_2 = (3, -1, 5)$ ,  $\bar{a}_3 = (1, -4, 3)$  линейно зависимой?

Решение.

Рассмотрим матрицу  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ .

Определим ранг матрицы, для чего приведем ее к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\begin{matrix} (2) \rightarrow 3(1) - (2) \\ (3) \rightarrow 2(1) - (3) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -11 & 4 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -11 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -11 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,  $\text{rang } A = 3$ . А значит система векторов линейно независима.

Ответ: линейно независима.

**Задача 6.2.** Является ли система векторов

$$\bar{a}_1 = (4, -5, 2, 6), \bar{a}_2 = (2, -2, 1, 3), \bar{a}_3 = (6, -3, 3, 9), \bar{a}_4 = (4, -1, 5, 6)$$

линейно зависимой?

Решение.

Рассмотрим матрицу  $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 3 & 9 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ .

Определим ранг матрицы, для чего приведем ее к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 3 & 9 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\begin{matrix} (2) \rightarrow (1) - 2(2) \\ (3) \rightarrow (1) - 2(3) \\ (4) \rightarrow (1) - (4) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг этой матрицы уже меньше 4 (есть две одинаковые строки), поэтому система линейно зависима.

Ответ: система линейно зависима.