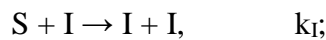


Задача 6. Кинетика инфицирования (10 баллов)

Вопрос	1	2	3	4	5	6	7	Всего
Очки	2	3	3	6	2	2	2	20

Автор – М.И. Козлов

Многие биологические и биохимические процессы включают автокаталитическую стадию. В частности, простейшая модель распространения инфекционной болезни включает в себя автокаталитическую стадию. В этой модели есть стадия заражения:



где S – здоровое население, I – инфицированные. Далее инфицированные или выздоравливают и приобретают иммунитет (R), или погибают (D):



- Запишите систему дифференциальных уравнений, соответствующих предложенной схеме, в качестве переменных используйте долю здорового населения S , долю заражённых I , долю, обладающих иммунитетом R и долю случаев с летальным исходом D .

$$r_I = k_I IS$$

$$r_R = k_R I$$

$$r_D = k_D I$$

2 балла

- Как повлияют на предложенную схему (изменятся константы скорости, появятся новые уравнения реакций) следующие события?

а) Введены карантинные меры.

Снижается константа k_I

1 балл

б) Начато производство препарата, показавшего высокую противоиnфекционную активность.

Снижается константа k_D и повышается k_R

1 балл

в) Начата массовая вакцинация населения.

Появляется уравнение $S \rightarrow R$

1 балл

- Выразите скорость изменения доли инфицированного населения dI/dt через I и константы скорости. Считайте, что на начальных стадиях R и D намного меньше, чем S и I .

$$\frac{dI}{dt} = k_1IS - k_RI - k_D I$$

$$1 = S + I + R + D \approx S + I$$

$$\frac{dI}{dt} = k_1I(1 - I) - (k_R - k_D)I$$

3 балла

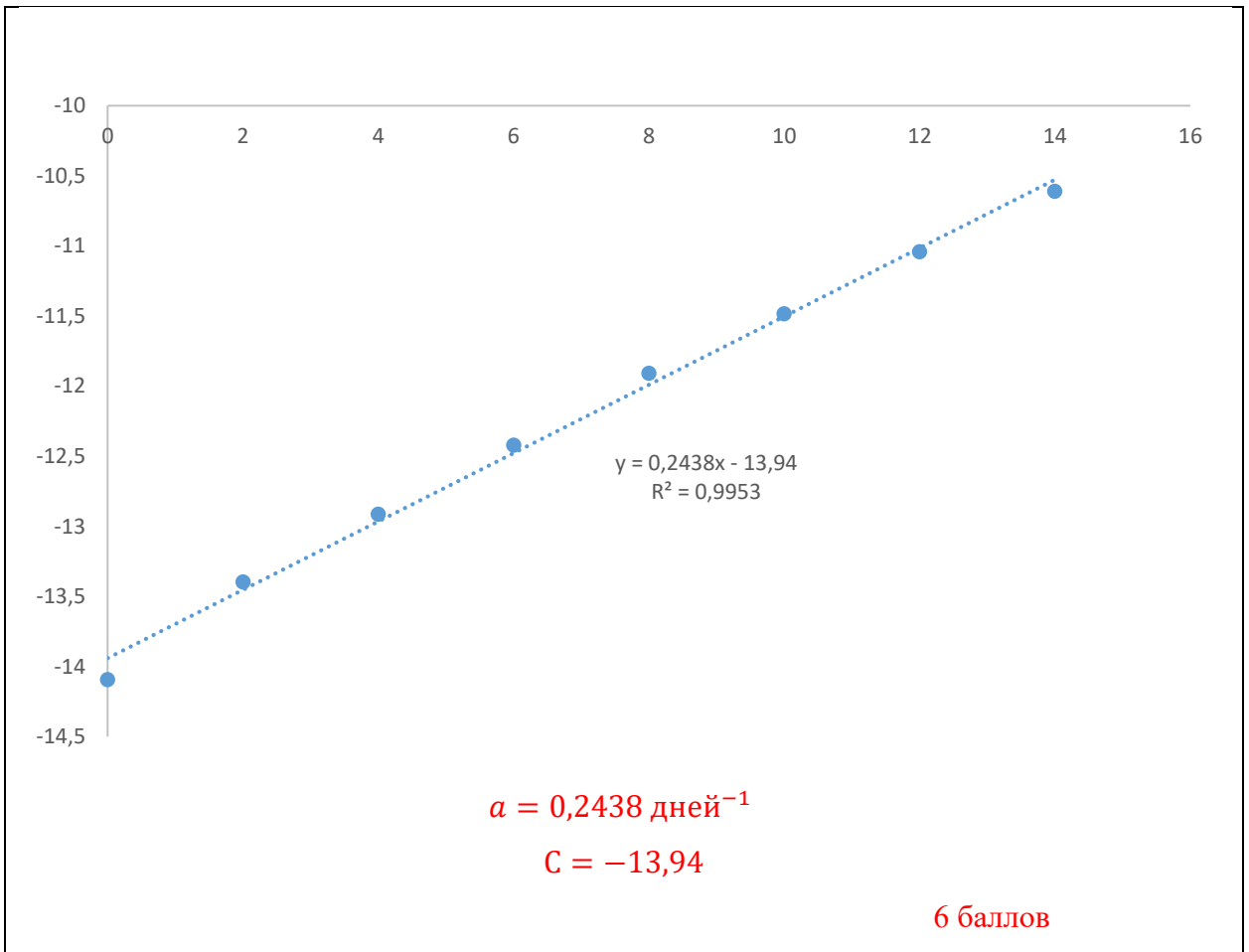
Решением дифференциального уравнения для автокаталитической реакции является функция вида:

$$\ln \frac{I}{1 - I} = at + C.$$

В таблице приведены данные о количестве зараженных на один миллион человек:

N	0,76	1,52	2,46	4,04	6,74	10,29	16,03	24,68
t, день	0	2	4	6	8	10	12	14

- Определите параметры a и C .



- Через сколько дней в рамках данной модели произойдёт удвоение числа больных по сравнению с четырнадцатым днём?

$$I = 4,936 * 10^{-5}$$

$$t = \frac{1}{a} \ln \frac{I}{1-I} - \frac{C}{a} = 16,5 \approx 17$$

2 балла

- Через сколько дней в рамках данной модели будет заражён каждый тысячный человек?

$$I = 1,00 * 10^{-3}$$

$$t = \frac{1}{a} \ln \frac{I}{1-I} - \frac{C}{a} = 28,8 \approx 29$$

2 балла

Недостатком предложенной модели является то, что в рамках этой модели возможна только одна «волна» эпидемии. Вторая и прочие «волны» возникают, если использовать константы скорости, зависящие от времени. Например, если $k_I = k/t^h$ возможно наличие двух «волн».

- Объясните качественно, почему при таком описании возникает вторая «волна».

S – убывающая функция; I – возрастающая функция, следовательно их произведение может иметь один максимум – одну «волну», если константа будет убывающей функцией времени, то возможно появление минимума скорости, разделяющего две «волны».

1 балла

Всего 20 баллов