Программа дисциплины «**Теория вероятностей**» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО к структуре и результатам освоения основных образовательных программ специалитета по профессиональному циклу по специальности 011000 - Химия.
Дисциплина «**Теория вероятностей**» относится к базовой части блока математических и естественно-научных дисциплин, является обязательным курсом.
Курс предназначен для студентов **2-го курса** химического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (**3-й семестр**). Программа курса включает в себя следующие основные разделы:

- аксиоматика теории вероятностей: дискретные и произвольные вероятностные пространства; свойства вероятностной меры
- элементы комбинаторного анализа
- условные вероятности и независимость событий
- схема Бернулли и предельные теоремы, полиномиальная схема
- дискретные и непрерывные случайные величины, способы задания; конкретные распределения и их характеристики (математическое ожидание, дисперсия)
- многомерные случайные величины и наборы случайных величин; независимость случайных величин, характеристики зависимости
- закон больших чисел, достаточные условия его применимости
- центральная предельная теорема

Данная программа предполагает, что студенты знакомы с основными понятиями теории множеств, успешно освоили интегральное и дифференциальное счисление, суммирование рядов. Достаточно большое количество теорем дается без доказательств, позволяя сконцентрироваться на применении в задачах.

Цели и задачи освоения дисциплины:
Целью освоения дисциплины «Теория вероятностей» является формирование у студентов умений и навыков в решении типовых задач по теории вероятностей, знаний используемых моделей.

Требования к результатам освоения содержания дисциплины
В результате освоения дисциплины студент должен
знать

- основные понятия теории вероятностей
- основные элементы комбинаторного анализа
- основные модели теории вероятностей и возможности их применения
- наиболее часто используемые распределения и их свойства

уметь

- формализовать задачу
- выбрать подходящую модель, распределение
- применять изученные теоремы на практике

Структура дисциплины

(К – коллоквиум, Т – проверочная самостоятельная работа (тест), РК - рубежная контрольная работа, ДЗ – домашнее задание, РГЗ – расчетно-графическое задание)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 115 часов, из них лекции по «Теория вероятностей» (36 часов), семинары по «Теория вероятностей» (36 часов), самостоятельная работа по «теории вероятностей» – 2 з.е. (49 часов)

Вид работы	Семестр			Всего
	1	2	3	

Общая трудоёмкость, акад. часов	0	0	144	144
Аудиторная работа:				
Лекции, акад. часов	0	0	36	36
Семинары, акад. часов	0	0	36	36
Лабораторные работы, акад. часов	0	0	0	
Самостоятельная работа, акад. часов	0	0	72	72
Вид итогового контроля (зачёт, зачёт с оценкой, экзамен)			экзамен	

Содержание разделов дисциплины (*аббревиатуры форм контроля указаны выше*)

№ раздела	Наименование раздела	Количество часов				Форма текущего контроля
		Всего	Аудиторная работа		Самостоятельная работа	
			Лекции	Семинары		
1	Формализация вероятностной задачи.	2	2	0	0	
2	Элементы комбинаторного анализа.	10	2	4	4	ДЗ
3	Классическое определение вероятности	10	2	4	4	ДЗ,КР
4	Условные вероятности	6	2	2	2	ДЗ
5	Схема Бернулли	8	4	2	2	ДЗ,КР, К
6	Дискретные и непрерывные случайные величины	16	4	6	6	ДЗ
7	Наборы случайных величин	20	8	6	6	ДЗ
8	Числовые характеристики случайных величин	17	5	6	6	ДЗ,КР
9	Закон больших чисел	5	5	0	0	
10	Центральная предельная теорема	2	2	0	0	
11	Контрольные работы	12	0	6	6	
12	Подготовка к экзамену	36	0	0	36	
	ИТОГО	144	36	36	72	

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Планы лекций

№ раздела	Наименование раздела	Содержание раздела

1	Формализация вероятностной задачи.	Понятия случайного эксперимента, статистической устойчивости частот. Формализация вероятностной задачи. Аксиомы теории вероятностей. Дискретные вероятностные пространства.
3	Классическое определение вероятности	Классическое определение вероятности. Произвольные вероятностные пространства. Геометрические вероятности. Свойства вероятности. Парадокс Бертрана.
4	Условные вероятности	Условные вероятности. Теорема умножения. Независимость событий. Пример Бернштейна. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
5	Схема Бернулли	Последовательность независимых испытаний с двумя исходами (схема Бернулли). Биномиальное распределение. Полиномиальная схема. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Схема серий. Теорема Пуассона. Теоремы Муавра-Лапласа.
6	Дискретные и непрерывные случайные величины	Случайные величины. Распределение. Функция распределения и ее свойства. Дискретные случайные величины. Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотность распределения. Смесь распределений.
7	Наборы случайных величин	Многомерные распределения. Функция распределения случайного вектора. Связь маргинальных распределений с совместным распределением.Независимость случайных величин. Необходимые и достаточные условия независимости дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин. Функции от случайных величин. Формула свертки.
8	Числовые характеристики случайных величин	Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции. Их свойства. Связь между независимостью и некоррелированностью. Матрица ковариаций.
9	Закон больших чисел	Неравенства Маркова и Чебышева. Сходимость по вероятности. Закон больших чисел. Достаточные условия выполнения закона больших чисел (теоремы Маркова, Чебышева, Бернулли).
10	Центральная предельная теорема	Сходимость по распределению. Центральная предельная теорема. Теорема Слуцкого.

Содержание лекций

Теория вероятностей	2 часа. Понятия случайного эксперимента, статистической устойчивости частот. Формализация вероятностной задачи. Аксиомы теории вероятностей. Дискретные вероятностные пространства. 2 часа. Классическое определение вероятности. Произвольные вероятностные пространства. Геометрические вероятности. Свойства вероятности. Парадокс Бертрана.

	2 часа. Условные вероятности. Теорема умножения. Независимость событий. Пример Бернштейна. Формула полной вероятности. Формулы Байеса. 4 часа. Последовательность независимых испытаний с двумя исходами (схема Бернулли). Биномиальное распределение. Полиномиальная схема. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Схема серий. Теорема Пуассона. Теоремы Муавра-Лапласа. 2 часа. Случайные величины. Распределение. Функция распределения и ее свойства. Дискретные случайные величины. 2 часа. Непрерывные случайные величины. Плотность распределения. Смесь распределений. 2 часа. Многомерные распределения. Функция распределения случайного вектора. Связь маргинальных распределений с совместным распределением. 2 часа. Независимость случайных величин. Необходимые и достаточные условия независимости дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин. 2 часа. Функции от случайных величин. Формула свертки. 4 часа. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции. Их свойства. Связь между независимостью и некоррелированностью. Матрица ковариаций. 4 часа. Неравенства Маркова и Чебышева. Сходимость по вероятности. Закон больших чисел. Достаточные условия выполнения закона больших чисел (теоремы Маркова, Чебышева, Бернулли). 2 часа. Сходимость по распределению. Центральная предельная теорема. Теорема Слуцкого.

Семинары (практические занятия)

№ раздела	№ занятия	Тема	Кол-во часов
2	1,2	Элементы комбинаторного анализа. Правило сложения и правило умножения. Выборки из генеральной совокупности. Размещение частиц по ячейкам. Разбиение конечного множества на подмножества.	4
3	3	Решение задач на классическое определение вероятности.	4
4	4	Решение задач на условные вероятности, формулу полной вероятности и формулу Байеса.	2
5	5	Решение задач на предельные теоремы в схеме Бернулли.	2
6,8	6,7,8	Решение задач на распределения дискретных случайных величин: бернуллиевское, биномиальное, пуассоновское, геометрическое, гипергеометрическое. Построение функций распределения, нахождение численных	6

		характеристик (мат. ожидание, дисперсия).	
	9,10,11	Решение задач на распределения непрерывных случайных величин: равномерное, экспоненциальное, нормальное, Коши. Построение функций распределения, нахождение численных характеристик (мат. ожидание, дисперсия).	6
7,8	12	Нахождение распределения функций от случайных величин. Применение неравенств Маркова и Чебышева для оценки вероятностей событий.	2
	13	Решение задач на многомерные дискретные распределения. Определение зависимости случайных величин. Подсчет ковариации и корреляции случайных величин. Подсчет распределения суммы случайных величин с использованием формулы свертки.	4

Лабораторные работы не предусмотрены

- Примеры домашних заданий

1. Грани тетраэдра последовательно раскрашиваются в цвета: красный, зеленый, синий, а четвертая грань во все эти 3 цвета. Далее тетраэдр подбрасываем и смотрим, какой цвет присутствует на грани, на которую он упал. Будут ли независимыми события {есть красный цвет}, {есть зеленый цвет}, {есть синий цвет}?
2. Бросается игральная кость 2 раза. Событие А состоит в том, что во второй раз выпала 1,2,5; событие В в том, что во второй раз выпала 4,5 или 6; событие С - сумма выпавших очков в двух бросаниях равна 9. Будут ли независимыми эти события?
3. Шесть шаров случайным образом раскладывают в 3 ящика. Найти вероятность, что во всех ящиках разное число шаров при условии, что все они не пустые.
4. В ящике 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наудачу вынимаются два шара. Какова вероятность, что вынутые шары разного цвета, если известно, что не вынут синий шар?
5. В прибор входит комплект из двух независимых деталей, вероятность которых выйти из строя в течение года соответственно равна 0.1 и 0.2. Если детали исправны, то прибор работает в течение года с вероятностью 0,99. Если выходит из строя только первая деталь, то прибор работает с вероятностью 0.7; а если только вторая - то с вероятностью 0.8. Если выходят из строя обе детали, прибор будет работать с вероятностью 0.1. Какова вероятность, что прибор будет работать в течение года?
6. В первой урне лежат один белый и три черных шара, а во второй урне - 2 белых и 1 черный шар. Из первой урны во вторую не глядя перекладывается один шар, затем один шар перекладывается из второй урны в первую. После этого из первой урны вынули один шар. Найти вероятность, что он белый.

1. Найти вероятность, что при 1000 подбрасываний монеты число орлов и решек совпадет
2. Два шахматиста встречались за доской 50 раз, причем 15 раз выиграл первый, второй выиграл 10, остальные закончились вничью. Найти вероятность того, что в матче из 10 партий между ними 3 партии выиграет первый, 2 партии выиграет второй, а 5 партий закончатся вничью.

3. Лифт начинает движение с 7 пассажирами и останавливается на 10 этажах. Найти вероятность того, что три пассажира вышли на одном этаже, еще два вышли на другом, последние два - на еще одном этаже.
4. В лотерее каждый сотый билет выигрышный. Сколько нужно купить билетов, чтобы с вероятностью 0.95 быть уверенным в том, что хотя бы один билет окажется выигрышным.
5. В коробке 3 детали, вероятность брака каждой детали 0.1. Какова вероятность того, что среди 10 коробок будет не менее 8 не содержащих бракованных деталей?

1. Построить график функции распределения пуассоновской случайной величины с параметром 2. Найти ее дисперсию.
2. Случайная величина равна количеству независимых испытаний Бернулли до появления первого успеха. Найти математическое ожидание и дисперсию.
3. Найти математическое ожидание гипергеометрической случайной величины (случайной величины, равной количеству бракованных деталей в выборке размером k, если всего деталей N, из которых M бракованных).
4. Подбрасываются 10 кубиков, сумму очков возводят в квадрат. Вычислить математическое ожидание данной величины.

1. нормальное распределение.

- **Примеры контрольных работ**

1. Случайная величина x равномерно распределена на отрезке [-1;1]. Найти плотность распределения случайной величины $\log(x^2)$
2. Лаборант допускает промахи в 1% анализов. Найти вероятность того, что в серии из 1000 анализов он сделает не более пяти промахов.
3. Известно, что высокое содержание некоторого вещества наблюдается в 5% случаев. Сколько в среднем необходимо перебрать образцов, чтобы найти хотя бы один с высоким содержанием вещества?
4. На отрезок [2,5] наудачу бросаются две точки. Какова вероятность, что расстояние между ними меньше 2?

1. Случайная величина x равномерно распределена нормально с параметрами (0,1). Найти плотность распределения случайной величины x2
2. Известно, что высокое содержание некоторого вещества наблюдается в 25% случаев. Найти вероятность того, что среди 2500 образцов окажется ровно 625 с высоким содержанием вещества.
3. В химической лаборатории установлен новый прибор со средним сроком службы 2500 рабочих дней. В предположении, что срок службы прибора имеет показательное распределение, найти вероятность того, что он прослужит более 3000 дней?
4. Семь проб вещества отправляются каждая в одну из семи лабораторий . Найти вероятность того, что все пробы попадут в разные лаборатории.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

- **Вопросы к экзамену**

2. Детерминированные и случайные явления. Случайный эксперимент. Статистическая устойчивость частот. Формализация вероятностной задачи. Вероятностное пространство. Случайные события. Операции над событиями.

Связь вероятностной терминологии с теоретико-множественной терминологией. Примеры. Дискретные и произвольные пространства элементарных исходов (ПЭИ). Алгебра и сигма-алгебра событий.

3. Вероятность (вероятностная мера) в дискретном ПЭИ. Аксиомы. Примеры задания вероятности в дискретном ПЭИ. Теорема сложения и ее обобщения. Классическое и статистическое определения вероятности. Примеры.
4. Элементы комбинаторного анализа. Правило умножения и правило сложения комбинаторики. Выборки из генеральной совокупности. Размещения частиц по ячейкам. Использование классического определения вероятности для построения вероятностных пространств, в которых элементами ПЗИ являются различные выборки и размещения. Гипергеометрическое распределение. Разбиение конечного множества на подмножества с заданным количеством элементов .
5. Вероятность (вероятностная мера) в произвольном ПЭИ. Аксиомы теории вероятностей. Геометрические вероятности. Парадокс Бертрана. Свойства вероятности, вытекающие из аксиом. Примеры.
6. Условные вероятности. Теорема умножения. Независимость событий. Независимость событий в совокупности. Пример С.Н.Бернштейна. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Примеры.
7. Последовательность независимых испытаний с двумя исходами (схема Бернулли). Вероятностное пространство для схемы Бернулли. Биномиальное распределение. Последовательность независимых испытаний с N (N > 2) исходами (полиномиальная схема). Примеры.
8. Предельные теоремы в схеме Бернулли, Теорема Пуассона. Распределение Пуассона. Локальная предельная теорема Муавра (без док-ва). Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа (без док-ва). Примеры применения теорем.
9. Случайная величина (определения). Функция распределения. Распределение вероятностей. Свойства функции распределения (поведение в бесконечности и непрерывность слева - без док-ва).
10. Дискретные случайные величины (распределения). Функция распределения. Примеры: вырожденное, дискретное равномерное, бернуллиевское, биномиальное, пуассоновское, геометрическое, гипергеометрическое распределения; распределение Паскаля. Содержательный смысл указанных распределений.
11. Абсолютно непрерывные случайные величины (распределения). Функция распределения. Плотность распределения. Примеры: равно мерное распределение на отрезке, нормальное распределение с параметрами (a,6) , стандартное нормальное распределение, показательное распределение (свойство отсутствия последействия), распределение Коши. Содержательный смысл указанных распределений.
12. Многомерные распределения. Функция распределения случайного вектора и ее свойства (без док-ва). Дискретные и абсолютно непрерывные многомерные распределения. Плотность распределения. Примеры: равномерное распределение в области на плоскости, двумерное нормальное распределение, дискретное распределение на конечном множестве точек плоскости. Связь маргинальных (одномерных) распределений с совместным распределением.
13. Независимость случайных величин (определения). Необходимые и достаточные условия независимости дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин (без док-ва).
14. Функции от случайных величин. Пример: нахождение плотности распределения квадрата нормальной стандартной случайной вели чины

(распределение хи-квадрат с одной степенью свободы). Преобразование n-мерного случайного вектора в m-мерный. Формула композиции (свертка). Примеры: распределение суммы двух нормальных, двух пуассоновских, двух биномиальных независимых случайных величин.

15. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание. Формулы для вычисления математического ожидания функций от случайных величин (без док-ва). Свойства математического ожидания. Дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции. Их свойства. Дисперсия линейной комбинации n произвольных случайных величин. Связь между независимостью и некоррелированностью. Примеры. Матрица ковариаций n-мерного случайного вектора.
16. Неравенства Маркова и Чебышева. Примеры применения. Сходимость по вероятности. Закон больших чисел. Достаточные условие применимости закона больших чисел: теоремы Маркова, Чебышева и Бернулли. Примеры.
17. Сходимость по распределению (слабая сходимость). Центральная предельная теорема (различные достаточные условия выпол нения теоремы - без док-ва). Примеры применения. Понятие асимптотической нормальности. Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа как частный случай центральной предельной теоремы.
18. Теорема Слуцкого и теорема о сходимости (без док-ва). Приближенные доверительные интервалы для оценки неизвестной вероятности успеха по частоте в схеме Бернулли. Примеры. Многомерное нормальное распределение.

- **Примеры контрольных работ**

1. Случайная величина x равномерно распределена на отрезке [-1;1]. Найти плотность распределения случайной величины $\log(x^2)$
2. Лаборант допускает промахи в 1% анализов. Найти вероятность того, что в серии из 1000 анализов он сделает не более пяти промахов.
3. Известно, что высокое содержание некоторого вещества наблюдается в 5% случаев. Сколько в среднем необходимо перебрать образцов, чтобы найти хотя бы один с высоким содержанием вещества?
4. На отрезок [2,5] наудачу бросаются две точки. Какова вероятность, что расстояние между ними меньше 2?

1. Случайная величина x равномерно распределена нормально с параметрами (0,1). Найти плотность распределения случайной величины x2
2. Известно, что высокое содержание некоторого вещества наблюдается в 25% случаев. Найти вероятность того, что среди 2500 образцов окажется ровно 625 с высоким содержанием вещества.
3. В химической лаборатории установлен новый прибор со средним сроком службы 2500 рабочих дней. В предположении, что срок службы прибора имеет показательное распределение, найти вероятность того, что он прослужит более 3000 дней?
4. Семь проб вещества отправляются каждая в одну из семи лабораторий . Найти вероятность того, что все пробы попадут в разные лаборатории.

Фонд проверки остаточных знаний

Теоретические вопросы

- Вероятность (вероятностная мера) в произвольном ПЭИ. Аксиомы теории вероятностей

- Условные вероятности. Независимость событий. Формула полной вероятности
- Предельные теоремы в схеме Бернулли. Теорема Пуассона, интегральная теорема Муавра-Лапласа

УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ

Основная литература (базовые учебники выделены курсивом, они имеются в библиотеке химического факультета). Контрольные экземпляры в электронном и бумажном виде хранятся на кафедре математического анализа (механико-математический факультет).

Основная литература

1. *В. П. Чистяков, Курс теории вероятностей, 7-е изд., Дрофа, Москва, 2007,* 256 с.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. 8-е изд., испр. и доп.—М.: Едиториал УРСС, 2005.— 448 с.
3. А.Зубков, Б.Севастьянов, В.Чистяков. Сборник задач по теории вероятностей. Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. — 1989. — 320 с. — ISBN 5-02-013949-1.

Дополнительная литература

Интернет-ресурсы

1. М.М.Мусин, С.Г.Кобельков, А.А.Голдаева (под редакцией А.В.Лебедева) Сборник задач по теории вероятностей для химиков, 2013 http://www.math.msu.su/department/probab/index-k.htmlhttp://www.math.msu.su/department/probab/index-k.html

.

В. Программное обеспечение и Интернет-ресурсы.