Дисциплина «**Уравнения математической физики**» относится к базовой части блока математических и естественно-научных дисциплин, является обязательным курсом.

Курс предназначен для студентов **1-го и 2-го курсов** химического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (**1 - 4-й семестры**). Программа курса «**Уравнения математической физики**» состоит из следующих основных разделов: Программа курса уравнений математической физики состоит из следующих основных разделов: классификация уравнений, корректные постановки задач.

Метод Фурье. В первом разделе дается вывод уравнения диффузии, а также классификация линейных уравнений второго порядка по типам и методом характеристик приведением их к каноническому виду.

Во втором разделе рассматриваются корректные постановки начальных и краевых задач в зависимости от типа уравнений и изучаются некоторые свойства решений.

В третьем разделе приводятся дополнительные сведения об ортогональных функциях и рядах Фурье, задаче Штурма-Лиувилля и методом разделения переменных решаются краевые задачи, задача о стационарной диффузии.

Цели и задачи освоения дисциплины:

- приобретение знаний, необходимых для эффективного использования быстро развивающихся математических методов
- получение навыков построения и исследования математических моделей химических процессов
- развитие математической культуры, достаточной для самостоятельного освоения в дальнейшем математических методов
- способность создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные математические результаты, владение знаниями об ограничениях и границах применимости моделей; способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания в области физики
- владение фундаментальными разделами математики, необходимыми для решения научно-исследовательских и практических задач в профессиональной области
- использование основных законов естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности, применение методов математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования

Требования к результатам освоения содержания дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен

знать типы линейных уравнений II порядка;

уметь поставить корректные и краевые задачи;

владеть методами характеристик и разделения переменных решения задач;

иметь опыт решения типовых задач в том числе имитирующих реальные проблемы с которыми приходится сталкиваться в практике химических исследований.

Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единиц (72 часов), из них 16 часов лекций, 32 часа семинаров, самостоятельная работа 24 часа.

Вид работы	Всего
Общая трудоёмкость, акад. часов	72
Аудиторная работа:	48
Лекции, акад. часов	16
Семинары, акад. часов	32
Самостоятельная работа, акад. часов	24
Вид итогового контроля (зачёт, зачёт с оценкой, экзамен)	зачет

Лекции

№	Наименование раздела	Содержание раздела
1	Классификация уравнений	Уравнения с частичными производными. Примеры. Вывод уравнения диффузии. Линейные уравнения II порядка. Характеристическая форма. Гиперболический, эллиптический, параболический типы. Двухмерный случай уравнений, сохранение линейности, порядка и типа при невырожденной замене независимых переменных. Характеристики, канонические виды и приведение к ним.
2	Корректные задачи	Понятие корректности задачи. Общая задача Коши в двумерном случае. Формула Даламбера для волнового уравнения и корректность задачи Коши. Постановка задачи Коши для уравнения диффузии. Некорректность задачи Коши для уравнения Лапласа.
		Задачи в органической области. Краевые условия Дирихле, Неймана, III краевое условие. Постановки краевых задач для волнового уравнения диффузии Лапласа. Интеграл энергии. Единственность решения смешанных задач для волнового уравнения. Принцип максимума для уравнения диффузии. Теорема единственности и непрерывной зависимости решения для I кривой задачи. Принцип максимума для уравнения Лапласа. Теорема о единственности решения и непрерывной зависимости для задачи Дирихля.
3	Метод Фурье	Понятие о методе разделения, переменных (методе Фурье) для решения однородных краевых задач и задачи Штурма-Лиувилля на примерах уравнения диффузии, волнового уравнения. Замечание о неоднородных задачах.
		Метод Фурье для уравнения Лапласа в круге и вне его. Интеграл Пуассона. Теорема о среднем для гармонических функций.

		Примеры ортогональных полиномов, систем бесселевых функций. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Задачи Штурма-Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций. Теорема Стеклова. Стационарная диффузия.
		Преобразование Фурье. Его свойства. Преобразование Фурье производной. Формула Пуассона. Решение задачи Коши для уравнения диффузии.

Семинары (практические занятия)

№ раздела	№ занятия	Тема
1	1	Решение простейших уравнений. Отыскание общего решения. Переход к полярным координатам.
	2	Уравнение характеристик, тип уравнения, приведение к каноническому виду.
2	1	Решение задач Коши методом характеристик.
	2	Задача Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера. Задача Гаусса с данными на характеристиках.
		Контрольная работа
3	1	Тригонометрические ряды Фурье
	2	Интеграл Фурье
	3	Решение задач Штурма-Лиувилля
	4	Метод разделения переменных для уравнения диффузии. I краевая задача
	5	Метод Фурье для уравнения диффузии. Краевые условия I и II типов.
	6	Метод Фурье для волнового уравнения I краевая задача.
	7	Метод Фурье для волнового уравнения. Смешанные задачи
	8	Уравнение Лапласа. Решение внутренней задачи Дирихле.
	9	Внешние краевые задачи для уравнения Лапласа
	10	Контрольная работа
	11	Задача о стационарной диффузии

Примеры задач к зачету

Найти общее решение уравнения:

1. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

Ответ: $U(x,y) = f(y-2x) + g(y-3x)$.

Решить задачи Коши:

2. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, $(U)_{y=x} = 2\sin x$, $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=x} = 2\cos x$

Ответ: $U = 5\sin\frac{x+y}{2} - 3\sin\frac{5x+y}{6}$.

3. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $(U)_{t=0} = 0$, $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t=0} = 4xe^{-x^2}$

Ответ: $U = e^{-(x-t)^2} - e^{-(x+t)^2} = 2e^{-(x^2+t^2)}ch2xt$.

Разложить в ряд Фурье функции:

4. $f(x) = 4\sin^3 x$

Ответ: $f = 3\sin x - \sin 3x.$

5. $f(x) = \cos\frac{x}{2}, \ |x| < \pi$

Ответ: $f = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx.$

Представить интегралом Фурье функцию:

6. $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{если } |x| \le 1 \\ 0, & \text{если } |x| > 0 \end{cases}$

Ответ: $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos y}{y^2}\cos yx\,dy.$

Решить краевые задачи:

7. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \ U(0,x) = 0, \frac{\partial U(0,x)}{\partial t} = \sin 7x, U(t,0) = 0, U(t,\pi) = 0, 0 < x < \pi, t > 0$

Ответ: $U = \frac{1}{7a}\sin 7x \sin at.$

8. $\frac{\partial U}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U(0,x) = \sin\frac{7x}{2}, U(t,0) = 0, \frac{\partial U(t,\pi)}{\partial x} = 0, 0 < x < \pi, t > 0$

Ответ: $U(t,x) = e^{-49t}\sin\frac{7x}{2}.$

Найти гармоническую в *D* функцию, удовлетворяющую на окружности *Г*: $x^2 + y^2 = R_0^2$ условию $(U(x,y))_\Gamma = 4y^3$, если:

9. *D*: $x^2 + y^2 \le R_0^2$

Ответ: $U = 3R_0^2 r\sin\varphi - r^3\sin 3\varphi = 3R_0^2 y + y^3 - 3x^2 y.$

10. *D*: $x^2 + y^2 \ge R_0^2$

Ответ: $U = \left(\frac{R_0}{r}\right)^3(3R_0 r^2\sin\varphi - R_0^3\sin 3\varphi) = R_0^4\left[\frac{3y}{x^2+y^2} + R_0^2\frac{y^3 - 3x^2 y}{(x^2+y^2)^3}\right].$

Основная литература

1. *А.И. Козко, Е.С. Соболева, А.В. Субботин, Т.М. Фатеева, В.Г. Чирский, С.В. Кравцев, Н.Б. Малышева. Математические методы решения химических задач (часть II), М.: «Академия» 2013.*

2. Б.П. Демидович, В.П. Моденов. Дифференциальные уравнения – С.-Пб: «Иван Федоров», 2003.

3. Е.С. Соболева, Г.М. Фатеева. Задачи и упражнения по уравнениям математической физики. – М.:Физматлит»,2012.

Дополнительная литература

1. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М.:»Наука», 2004.