МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ МГУ

ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

А.И. КОЗКО, Л.М. ЛУЖИНА., А.А. ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2023

УДК 517.3

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов. В этом пособии содержится материал, относящийся к курсу математического анализа, читаемому студентам второго курса химического факультета МГУ.

ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть M – цилиндроид, ограниченный цилиндром $\varphi(x, y) = 0$, высекающим на плоскости Oxy компакт σ, являющийся криволинейной трапецией

$$\sigma = \left\{\begin{matrix}(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), y_1(x), y_2(x) \in C([a,b])\end{matrix}\right\}$$

и поверхностями $z = z_{\text{в}}(x, y)$ (сверху) и $z = z_{\text{н}}(x, y)$ (снизу), $z = z_{\text{в}}(x, y)$, $z = z_{\text{н}}(x, y) \in C(\sigma)$. И пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна на M. Тогда тройной интеграл по этому цилиндроиду будет равен

$$\iiint_M f(x,y,z)dxdydz = \iint_\sigma \ dxdy \int_{z_{\text{н}}(x,y)}^{z_{\text{в}}(x,y)} f(x,y,z)dz =$$
$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_{\text{н}}(x,y)}^{z_{\text{в}}(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Задача 1. $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3y^2zdz = \int_0^a x^3dx \int_0^x y^2dy \int_0^{xy} zdz =$
$$= \int_0^a x^3dx \int_0^x y^2dy \left(\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^{xy} = \frac{1}{2}\int_0^a x^3dx \int_0^x y^2dy\,(x^2y^2) =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^a x^5dx \int_0^x y^4dy = \frac{1}{2}\int_0^a x^5dx \left(\frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int_0^a x^{10}dx = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{11}a^{11}.$$

Задача 2. Найти $\iiint_M \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, где компакт (цилиндроид) M ограничен плоскостями $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1$.

Компакт M – прямоугольная пирамида, расположенная в 1-м октанте. Пересечение плоскости $x + y + z = 1$ с плоскостью $z = 0$ можно найти, решив систему:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ z=0\,, \end{cases}$$

то есть плоскость $x + y + z = 1$ пересекает плоскость Oxy по прямой $y = 1 - x$, а соответствующие координатные оси при $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$.

$$\iiint_M \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3} = \iint_\sigma \ dxdy \int_{z_{\text{н}}(x,y)=0}^{z_{\text{в}}(x,y)=1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} =$$
$$= \iint_\sigma \ dxdy \int_0^{1-x-y} (x+y+z+1)^{-3} d(z + \underbrace{x+y+1}_{\substack{const \text{ при} \\ \text{интегрирова–} \\ \text{нии по } z}}) =$$
$$= \iint_\sigma \ dxdy \left(\frac{(x+y+z+1)^{-2}}{-2}\right)\Big|_0^{1-x-y} = -\frac{1}{2}\iint_\sigma \ dxdy \left(\frac{1}{(x+y+z+1)^2}\right)\Big|_0^{1-x-y} =$$
$$= -\frac{1}{2}\iint_\sigma \ dxdy \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(x+y+1)^2}\right) = -\frac{1}{2}\iint_\sigma \frac{1}{4}dxdy + \frac{1}{2}\iint_\sigma \frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy =$$
$$= -\frac{1}{8}\iint_\sigma dxdy + \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y+1)^{-2}\,dy =$$
$$= -\frac{1}{8}\cdot S(\sigma) + \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y+1)^{-2}\, d(y + \underbrace{x+1}_{\substack{const \text{ при} \\ \text{интегрирова–} \\ \text{нии по } y}}) =$$

$$= -\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 dx\left(\frac{(x+y+1)^{-1}}{-1}\right)\Big|_0^{1-x} = -\frac{1}{16} - \frac{1}{2}\int_0^1 dx\left(\frac{1}{x+y+1}\right)\Big|_0^{1-x} =$$
$$= -\frac{1}{16} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right)dx = -\frac{1}{16} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}\right)d(x+1) =$$
$$= -\frac{5}{16} + \frac{1}{2}(\ln|x+1|)\Big|_0^1 = -\frac{5}{16} + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 1 = -\frac{5}{16} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

Задача 3. Найти $\iiint_M xydxdydz,$ где компакт (цилиндроид) M ограничен поверхностями $z = xy$ (параболический гиперболоид, «седло», «повернутое и растянутое» в плоскости Oxy, напоминаем, что это легко увидеть с помощью замены $x = x' - y',\ y = x' + y'$), плоскостями $x + y = 1$ (плоский цилиндр!) и $z = 0$ $(z \geq 0)$.

Найдем пересечение гиперболоида с плоскостью $z = 0$:

$$\begin{cases} z = xy \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Это означает, что плоскость $z = 0$ пересекает гиперболоид по двум пересекающимся прямым, совпадающим с координатными осями, причем проекция гиперболоида находится в первом и третьем квадрантах. Но компакт получится, только если рассматривать часть фигуры, расположенной в первом октанте. Соответственно, проекция будет находиться в первом квадранте и будет представлять из себя прямоугольный треугольник. Вообще, параболический гиперболоид – одна из двух удивительных криволинейных поверхностей второго порядка, через каждую точку которой проходит пара прямых, целиком лежащих на этой поверхности.

$$\iiint_M xydxdydz = \iint_\sigma dxdy\int_{z_{\text{н}}(x,y)=0}^{z_{\text{в}}(x,y)=xy} xydz = \iint_\sigma xydxdy\int_{z_{\text{н}}(x,y)=0}^{z_{\text{в}}(x,y)=xy} dz =$$
$$= \iint_\sigma xydxdy(xy - 0) = \iint_\sigma x^2y^2dxdy = \int_0^1 x^2dx\int_0^{1-x} y^2dy =$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 x^2dx\left(y^3\big|_0^{1-x}\right) = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2(1-x)^3dx = \frac{1}{3}\int_0^1(x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5)dx =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6} - \frac{3}{20}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{10-9}{60} = \frac{1}{180}.$$

Задача 4. Найти $\iiint_M y\cos(z + x)\,dxdydz,$ где компакт (цилиндроид) M ограничен поверхностями $y = \sqrt{x}$ (цилиндр), плоскостями $y = 0,\ x + z = \frac{\pi}{2},\ z = 0$ (плоские цилиндры!).

Найдем пересечение плоского цилиндра $x + z = \frac{\pi}{2}$ с плоскостью $z = 0$:

$$\begin{cases} x + z = \frac{\pi}{2} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ z = 0\,. \end{cases}$$

Таким образом, проекция цилиндроида на плоскость Oxy – это фигура, ограниченная кривыми $y = \sqrt{x},\ y = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\iiint_M y\cos(z + x)\,dxdydz = \iint_\sigma dxdy\int_{z_{\text{н}}(x,y)=0}^{z_{\text{в}}(x,y)=\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z + x)\,dz =$$
$$= \iint_\sigma ydxdy\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(z + x)\,dz = \iint_\sigma ydxdy\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(z + x)\,d(z + x) =$$

$$= \iint_\sigma ydxdy\left(\sin(z+x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x}\right) = \iint_\sigma ydxdy\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin x\right) =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)dx\int_0^{\sqrt{x}}ydy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(1-\sin x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\cos x = \frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}\left(x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx =$$
$$= \frac{\pi^2}{16}+0-\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{\pi^2}{16}-1.$$

Переход к цилиндрическим и сферическим координатам

1. Цилиндрические координаты

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z\,, \end{cases}$$

где $r \geq 0$, $\varphi \in [0;2\pi]$ (во многих задачах – любому отрезку длины 2π), $z \in \mathbb{R}$.

Якобиан в этом случае равен

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \Longrightarrow |\mathcal{J}| = r.$$

2. Сферические координаты

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = r\sin\theta\,, \end{cases}$$

где $r \geq 0$, $\varphi \in [0;2\pi]$ (во многих задачах – любому отрезку длины 2π), $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Якобиан в этом случае равен

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta \\ -r\cos\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & 0 \\ -r\sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta \end{vmatrix} =$$
$$= r^2\begin{pmatrix} \cos^3\theta\cos^2\varphi + \cos\theta\sin^2\theta\sin^2\varphi + \\ + \cos^3\theta\sin^2\varphi + \cos\theta\sin^2\theta\cos^2\varphi \end{pmatrix} =$$
$$= r^2(\cos^3\theta + \cos\theta\sin^2\theta) = r^2\cos\theta.$$

$\Longrightarrow |\mathcal{J}| = r^2\cos\theta$, так как $\cos\theta \geq 0$ при $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Кроме того, при переходе к сферическим координатам выполняется:

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ и $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta$.

Задача 5. Сделать замену переменных $\iiint_M f(x,y,z)dxdydz$, где компакт (цилиндроид) M представляет собой часть 1-го октанта, ограниченного цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскостями $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $z = 0$, $z = 1$.

В этом случае от цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ плоскостями $z = 0$, $z = 1$ «отрезается» цилиндроид. Проекцией цилиндроида на плоскость Oxy является сектор, ограниченный прямыми $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ и окружностью $x^2 + y^2 = R^2$. Напомним, что угловой коэффициент прямой совпадает с тангенсом угла наклона этой прямой ($k = 1 \Longrightarrow \operatorname{tg}\varphi = 1 \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$, $k = \sqrt{3} \Longrightarrow \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$. Поэтому при переходе к цилиндрическим координатам получим

$$\iiint_M f(x,y,z)dxdydz = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^R rdr \int_0^1 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz.$$

Задача 6. Сделать замену переменных $\iiint_M f(x,y,z)dxdydz$, где компакт (цилиндроид) M ограничен цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$, плоскостью $z = 0$ и эллиптическим параболоидом («чашей») $z = x^2 + y^2$.

Цилиндр $x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ построен на окружности радиуса 1 с центром в точке $O(1,0)$. Чтобы найти пределы интегрирования при переходе к цилиндрическим координатам по переменным r и φ, надо проделать следующее:

1. $x^2 + y^2 = 2x \Longrightarrow r^2 = 2r\cos\varphi$
2. $r_1(\varphi) = 0$, $r_2(\varphi) = 2\cos\varphi$
3. $\begin{cases} r_1(\varphi) \geq 0 \\ r_2(\varphi) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \geq 0 \\ 2\cos\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому

$$\iiint_M f(x,y,z)dxdydz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} rdr \int_0^{r^2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz.$$

Задача 7. Вычислить $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz$.

Так как в плоскости Oxy интегрирование происходит по правому полукругу радиуса 1, то при переходе в цилиндрические координаты получим

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 rdr \int_0^a dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \int_0^1 rdr \cdot \int_0^a dz =$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \frac{\pi a}{2}.$$

Задача 8. Вычислить $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dz$.

В этом случае при каждом $x \in [0,2]$ переменная y меняется от $y = 0$ до $y = \sqrt{2x - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 2x - x^2 \end{cases}$ (см. задачу 5), поэтому при переходе в цилиндрические координаты получим

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2 + y^2} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} rdr \int_0^a zrdz =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int_0^a zdz =$$
$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\cos\varphi} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \, d\varphi =$$
$$= \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\varphi) d\sin\varphi =$$
$$= \frac{4a^2}{3} \left(\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{4a^2}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4a^2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8a^2}{9}.$$

Задача 9. Вычислить $\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz$.

Заметим, что интегрирование происходит по верхнему полушарию радиуса R, поэтому при переходе в сферические координаты получим

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \underbrace{r^2\cos^2\theta}_{=x^2+y^2} \cdot \underbrace{r^2\cos\theta}_{=|J|} dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \, d\theta \int_0^R r^4 \, dr =$$
$$= \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \, d\theta = \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\varphi) d\sin\varphi =$$
$$= \frac{2\pi R^5}{5} \left(\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{2\pi R^5}{5}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

Задача 10. $\iiint_M (x^2 + y^2) dxdydz$,
где $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \rho^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

В этой задаче компакт M представляет собой шаровой слой, то есть часть пространства между двумя концентрическими сферами радиусов ρ и R соответственно. Поэтому при переходе в сферические координаты получим

$$\iiint_M (x^2 + y^2) dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_\rho^R \underbrace{r^2\cos^2\theta}_{=x^2+y^2} \cdot \underbrace{r^2\cos\theta}_{=|J|} dr =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \, d\theta \int_\rho^R r^4 \, dr = 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} (R^5 - \rho^5) = \frac{8\pi(R^5 - \rho^5)}{15}.$$

Задача 11. $\iiint_M \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz$, где M – шар, ограниченный сферой $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

В этой задаче $x^2 + y^2 + z^2 = x \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ – сфера радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $O\left(\frac{1}{2}, 0{,}0\right)$. Чтобы определить пределы интегрирования при переходе в сферические координаты, снова решим задачу «в три действия»:

1. $x^2+y^2+z^2=x \Longrightarrow r^2=r\cos\theta\cos\varphi$
2. $r_1(\varphi,\theta)=0,\ r_2(\varphi,\theta)=\cos\theta\cos\varphi$
3. $\begin{cases} r_1(\varphi,\theta)\geq 0 \\ r_2(\varphi,\theta)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\geq 0 \\ \cos\theta\cos\varphi\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, так как $\cos\theta\geq 0$ при всех $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому

$$\iiint_M \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{r_1(\varphi,\theta)=0}^{r_2(\varphi,\theta)=\cos\theta\cos\varphi} r^2\cos\theta\, r\,dr=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\cos\theta\cos\varphi} r^3\,dr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^{\cos\theta\cos\varphi}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\,(\cos^4\theta\cos^4\varphi)=\frac{1}{4}\cdot\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi}_{\boxed{1}}\cdot\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,d\theta}_{\boxed{2}}\ \boxed{=}$$

$$\boxed{1}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\varphi)^2d\varphi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}+\underbrace{2\cos 2\varphi}_{T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi}+\frac{1}{2}\underbrace{\cos 4\varphi}_{T_0=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}}\right)d\varphi=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\pi=\frac{3\pi}{8}.$$

$$\boxed{2}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\cos^4\theta\cos\theta}_{\text{четная}}\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta)^2d\sin\theta=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)^2d\sin\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin^2\theta+\sin^4\theta)d\sin\theta=$$

$$=2\left(\left(\sin\theta-\frac{2\sin^3\theta}{3}+\frac{\sin^5\theta}{5}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=2\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{16}{15}.$$

$$\boxed{=}\ \frac{1}{4}\cdot\frac{3\pi}{8}\cdot\frac{16}{15}=\frac{\pi}{10}.$$

Задача 12. $\iiint_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}dxdydz$, где M – шар, ограниченный сферой $x^2+y^2+z^2=1$.

Заметим, что введение обычных сферических координат приведет к интегралу с очень непростой подынтегральной функцией. Поэтому введем «немножко другие» сферические координаты:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\cos\varphi \\ y=r\cos\theta\sin\varphi \\ z=r\sin\theta+2, \end{cases}$$

Якобиан в этом случае также равен $r^2\cos\theta$ (проверьте!).

Найдем пределы интегрирования (решим задачу «в три действия»):

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Longrightarrow r^2\cos^2\theta + (r\sin\theta + 2)^2 = 1$
$\Leftrightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + 4r\sin\theta + 4 = 1$
$\Leftrightarrow r^2 + 4r\sin\theta + 3 = 0$
2. $r_1(\varphi,\theta) = r_1(\theta) = -2\sin\theta - \sqrt{4\sin^2\theta - 3}$,
$r_2(\varphi,\theta) = r_2(\theta) = -2\sin\theta + \sqrt{4\sin^2\theta - 3}$
3. $\begin{cases} r_1(\theta) \geq 0 \\ r_2(\theta) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sin\theta - \sqrt{4\sin^2\theta - 3} \geq 0 \\ -2\sin\theta + \sqrt{4\sin^2\theta - 3} \geq 0 \end{cases}$

Заметим, что $r_2(\theta) \geq r_1(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow -2\sin\theta - \sqrt{4\sin^2\theta - 3} \geq 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{4\sin^2\theta - 3} \leq -2\sin\theta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sin^2\theta - 3 \geq 0 \\ -2\sin\theta \geq 0 \\ 4\sin^2\theta - 3 \leq 4\sin^2\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\theta \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta \leq 0 \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\theta \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right].$$

Так как $r_2(\theta)$, $r_1(\theta)$ не зависят от φ, то при $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right]$ будут неотрицательны при любом φ. Поэтому получаем

$$\iiint_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}\,dxdydz =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{-2\sin\theta-\sqrt{4\sin^2\theta-3}}^{-2\sin\theta+\sqrt{4\sin^2\theta-3}} \frac{1}{r}\cdot r^2\cos\theta\,dr =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \cos\theta\,d\theta \left(\frac{r^2}{2}\Big|_{-2\sin\theta-\sqrt{4\sin^2\theta-3}}^{-2\sin\theta+\sqrt{4\sin^2\theta-3}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \cos\theta\left(-4\sin\theta\sqrt{4\sin^2\theta - 3}\right)d\theta =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(-4)\cdot 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\sqrt{4\sin^2\theta - 3}\,d\sin\theta = \left\| \begin{matrix} \sin\theta = t \\ t \in \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \end{matrix} \right\| =$$
$$= -8\pi \int_{-1}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} t\sqrt{4t^2 - 3}\,dt = -8\pi\cdot\frac{1}{8}\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{4t^2 - 3}\,d(4t^2 - 3) =$$
$$= -\pi\cdot\frac{2}{3}\left((4t^2 - 3)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = -\frac{2\pi}{3}(0 - 1) = \frac{2\pi}{3}.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ С ПОМОЩЬЮ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

$$V(M) = \iiint_M dxdydz$$

Задача 13. Найти объем компакта $V(M)$, если M ограничен поверхностями $z = 4 - y^2$ и $z = y^2 + 2$ и плоскостями $x = -1$, $x = 2$.

Поверхности $z = 4 - y^2$ и $z = y^2 + 2$ являются цилиндрами, образующие которых параллельны оси Ox. Плоскости $x = -1$ и $x = 2$ отсекают от цилиндра цилиндроид. Найдем пересечение кривых $z = 4 - y^2$ и $z = y^2 + 2$, на которых построены цилиндры:

$$\begin{cases} z = 4 - y^2 \\ z = y^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 2 = 4 - y^2 \\ z = y^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ z = y^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \vee y = -1 \\ z = y^2 + 2. \end{cases}$$

Поэтому (нарисуйте «картинку» в плоскости Oxy) получаем:

$$V(M) = \iiint_M dxdydz = \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2+2}^{4-y^2} dz \int_{-1}^{2} dx = 3\int_{-1}^{1} dy \int_{y^2+2}^{4-y^2} dz =$$
$$= 3\int_{-1}^{1} dy\big((4 - y^2) - (y^2 + 2)\big) = 3\int_{-1}^{1} \underbrace{(2 - 2y^2)}_{\text{четная}} dy =$$
$$= 3 \cdot 2 \cdot 2\int_0^1 (1 - y^2)dy = 12\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 8.$$

Задача 14. Найти объем компакта $V(M)$, если M ограничен поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = x^2 + 2y^2$ и плоскостями $y = x,\ y = 2x,\ x = 1$.

Поверхности $z = x^2 + y^2$ и $z = x^2 + 2y^2$ являются эллиптическими параболоидами («чаши»). Плоскости $y = x,\ y = 2x,\ x = 1$ являются цилиндрами, образующие которых параллельны оси Oz. Их пересечение – тоже цилиндр, построенный на кривых $y = x,\ y = 2x,\ x = 1$ (нарисуйте «картинку» в плоскости Oxy).

$$V(M) = \iiint_M dxdydz = \iint_\sigma dxdy \int_{z_{\text{н}}=x^2+y^2}^{z_{\text{в}}=x^2+2y^2} dz =$$
$$= \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy(x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2) =$$
$$= \int_0^1 dx \int_x^{2x} y^2 dy = \frac{1}{3}\int_0^1 (8x^3 - x^3)dx = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Задача 15. Найти объем компакта $V(M)$, если M ограничен поверхностями $z = x^2 + y^2,\ z = 2x^2 + 2y^2,\ y = x^2$ и плоскостью $y = x$.

Поверхности $z = x^2 + y^2$ и $z = 2x^2 + 2y^2$ являются эллиптическими параболоидами («чаши»). Поверхности $y = x^2$ и $y = x$ являются цилиндрами, образующие которых параллельны оси Oz. Их пересечение – тоже цилиндр, построенный на кривых $y = x^2$ и $y = x$ (нарисуйте «картинку» в плоскости Oxy).

$$V(M) = \iiint_M dxdydz = \iint_\sigma dxdy \int_{z_{\text{н}}=x^2+y^2}^{z_{\text{в}}=2x^2+2y^2} dz =$$
$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy(2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2) =$$
$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy(x^2 + y^2) = \int_0^1 dx\left(\left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{x^2}^{x}\right) =$$
$$= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} = \frac{35-21-5}{105} = \frac{9}{105} =$$
$$= \frac{3}{35}.$$

Задача 16. Найти объем компакта $V(M)$, если M ограничен поверхностями $z = \ln(x + 2)$, $z = \ln(6 - x)$ и плоскостями $x = 0,\ x + y = 2,\ x - y = 2$.

Поверхности $z = \ln(x+2)$ и $z = \ln(6-x)$ являются цилиндрами, образующие которых параллельны оси Oy. Их пересечение – тоже цилиндр, построенный на кривых $z = \ln(x+2)$ и $z = \ln(6-x)$. Плоскости $x = 0$, $x + y = 2$, $x - y = 2$ также являются цилиндрами, построенными на прямых $x = 0$, $x + y = 2$, $x - y = 2$ образующие которых параллельны оси Oz. Их пересечение – тоже цилиндр, построенный на этих прямых. Таким образом, компакт M является пересечением двух цилиндров, причем,

$$\begin{cases} z = \ln(x+2) \\ z = \ln(6-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(6-x) = \ln(x+2) \\ z = \ln(6-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x = x + 2 \\ z = \ln(6-x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ z = \ln(6-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = \ln 4 \end{cases}.$$

$$V(M) = \iiint_M dxdydz = \int_0^2 dx \int_{x-2}^{-x+2} dy \int_{\ln(x+2)}^{\ln(6-x)} dz =$$
$$= \int_0^2 dx \int_{x-2}^{-x+2} dy(\ln(6-x) - \ln(x+2)) =$$
$$= \int_0^2 (\ln(6-x) - \ln(x+2))dx \int_{x-2}^{-x+2} dy =$$
$$= \int_0^2 (\ln(6-x) - \ln(x+2))dx\big((-x+2) - (x-2)\big) =$$
$$= 2\int_0^2 (2-x)(\ln(6-x) - \ln(x+2))dx \boxed{\equiv}$$

Заметим, что нам придется «по частям» считать 4 интеграла. Поэтому сделаем замену переменной $2 - x = t \Rightarrow dx = -dt$ и пределы интегрирования $x = 0 \Rightarrow t = 2$, $x = 2 \Rightarrow t = 0$ (теперь придется считать только два интеграла!).

$$\boxed{\equiv} - 2\int_2^0 t(\ln(4+t) - \ln(4-t))dt =$$
$$= 2\int_0^2 t\ln(4+t)\,dt - 2\int_0^2 t\ln(4-t)\,dt =$$
$$= \int_0^2 \ln(4+t)\,dt^2 - \int_0^2 \ln(4-t)\,dt^2 =$$
$$= (t^2\ln(4+t))\Big|_0^2 - \int_0^2 t^2 d\ln(4+t) + (t^2\ln(4-t))\Big|_0^2 - \int_0^2 t^2 d\ln(4-t) =$$
$$= 4\ln 6 - 0 - \int_0^2 \frac{t^2}{t+4}dt - 4\ln 2 + 0 + \int_0^2 \frac{t^2}{t-4}dt =$$
$$= 4\ln 3 - \int_0^2 \left(t - 4 + \frac{16}{t+4}\right)dt + \int_0^2 \left(t + 4 + \frac{16}{t-4}\right)dt =$$
$$= 4\ln 3 + \int_0^2 (-t + 4 + t + 4)dt - \int_0^2 \frac{16}{t+4}dt + \int_0^2 \frac{16}{t-4}dt =$$
$$= 4\ln 3 + 8\int_0^2 dt - 16\int_0^2 \frac{1}{t+4}d(t+4) + 16\int_0^2 \frac{1}{t-4}d(t-4) =$$
$$= 4\ln 3 + 8\cdot 2 - 16\big((\ln|t+4|)\big|_0^2\big) + 16\big((\ln|t-4|)\big|_0^2\big) =$$
$$= 4\ln 3 + 16 + 16\ln 2 - 16\ln 4 - 16\ln 6 + 16\ln 4 = 4\ln 3 + 16 + 16\ln\frac{1}{3} =$$
$$= 4\ln 3 + 16 - 16\ln 3 = 16 - 12\ln 3.$$

Задача 17. Найти объем компакта $V(M)$, если M ограничен поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2 z^4$.

В этом случае сложно представить, что это за поверхность и, тем более, изобразить ее проекцию на какую-то координатную плоскость.

Перейдем в сферические координаты. Как всегда, возникнет вопрос о том, какие значения могут принимать r, φ, θ.
Найдем пределы интегрирования (решим задачу «в три действия»):

1. $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^2 z^4 \Longrightarrow r^6 = a^2 r^4 \sin^4\theta$
$\Leftrightarrow r^4(r^2 - a^2\sin^4\theta) = 0$
2. $r_1(\varphi,\theta) = 0,\ \ r_2(\varphi,\theta) = r_2(\theta) = a\sin^2\theta$
3. $\begin{cases} r_1(\varphi,\theta) \ge 0 \\ r_2(\theta) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \ge 0 \\ a\sin^2\theta \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

Так как $r_1(\theta),\ r_2(\theta)$ не зависят от φ, то при $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ будут неотрицательны при любом φ.

Кроме того, заметим, что исходное уравнение является четным по всем трем переменным, а значит поверхность $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^2z^4$ ограничивает компакт, симметричный относительно всех координатный плоскостей, поэтому (пусть M_1 – часть компакта M, расположенная в 1 октанте)

$$V = \iiint_M dxdydz = 8\iiint_{M_1} dxdydz = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\sin^2\theta} r^2\cos\theta\, dr =$$
$$= 8\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_0^{a\sin^2\theta} r^2 dr = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta\left(\frac{r^3}{3}\bigg|_0^{a\sin^2\theta}\right) =$$
$$= \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^6\theta\, d\theta = \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\, d\sin\theta = \frac{4\pi a^3}{3}\left(\frac{\sin^7\theta}{7}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{1}{7} =$$
$$= \frac{4\pi a^3}{21}.$$

Задача 18. Найти объем компакта $V(M)$, если M ограничен поверхностью $(x^2+y^2)^2 + z^4 = a^3 z$.

Заметим, что z может принимать только неотрицательные значения. Поэтому поверхность находится в верхнем полупространстве.

Перейдем в сферические координаты. Как всегда, возникнет вопрос о том, какие значения могут принимать r, φ, θ.
Найдем пределы интегрирования (решим задачу «в три действия»):

1. $(x^2+y^2)^2 + z^4 = a^3 z \Longrightarrow (r^2\cos^2\theta)^2 + r^4\sin^4\theta = a^3 r\sin\theta$
$\Leftrightarrow r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta = a^3 r\sin\theta$
2. $r_1(\varphi,\theta) = 0,\ \ r_2(\varphi,\theta) = r_2(\theta) = \sqrt[3]{\frac{a^3\sin\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}$
3. $\begin{cases} r_1(\varphi,\theta) \ge 0 \\ r_2(\theta) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \ge 0 \\ \sqrt[3]{\frac{a^3\sin\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

Так как $r_1(\theta),\ r_2(\theta)$ не зависят от φ, то при $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ будут неотрицательны при любом φ.

Поскольку исходное уравнение является четным по переменным x и y, а значит поверхность $(x^2+y^2)^2 + z^4 = a^3 z$ ограничивает компакт, симметричный относительно координатный плоскостей Oxz и Oyz, то (пусть M_1 – часть компакта M, расположенная в 1 октанте)

$V = \iiint_M dxdydz = 4\iiint_{M_1} dxdydz = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt[3]{\frac{a^3 \sin\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}} r^2 \cos\theta\, dr =$

$= 4\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_0^{\sqrt[3]{\frac{a^3 \sin\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}} r^2 dr = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^{\sqrt[3]{\frac{a^3 \sin\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}}\right) =$

$= \frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \frac{\sin\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta} d\theta \boxed{=}$

так как $\cos^4\theta + \sin^4\theta = (\cos^2\theta)^2 + (\sin^2\theta)^2 =$

$= \frac{1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta - 2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta}{4} = \frac{1+\cos^2 2\theta}{2}$

$\boxed{=} \frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos^2 2\theta} d\theta = \frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{1+\cos^2 2\theta} d\theta =$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2 2\theta} d\cos 2\theta = -\frac{\pi a^3}{3}\left(\operatorname{arctg}(\cos 2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) =$

$= -\frac{\pi a^3}{3}(\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg}(1)) = -\frac{\pi a^3}{3}\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2 a^3}{6}.$

Задача 19. Найти объем компакта $V(M)$, если M ограничен поверхностью S, заданной уравнением $(x^2+y^2+z^2)^2 = axyz$.

Перейдем в сферические координаты. Как всегда, возникнет вопрос о том, какие значения могут принимать r, φ, θ.

Найдем пределы интегрирования (решим задачу «в три действия»):

1. $(x^2+y^2+z^2)^2 = axyz \Longrightarrow r^4 = ar\cos\theta\cos\varphi\, r\cos\theta\sin\varphi\, r\sin\theta$
   $\Leftrightarrow r^4 = ar^3\cos^2\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi$
2. $r_1(\varphi,\theta) = 0,\ \ r_2(\varphi,\theta) = a\cos^2\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi$
3. $\begin{cases} r_1(\varphi,\theta) \ge 0 \\ r_2(\varphi,\theta) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \ge 0 \\ a\cos^2\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \ge 0 \\ \sin\theta\cos\varphi\sin\varphi \ge 0. \end{cases}$

Если $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то $\sin\theta \ge 0$ и $\cos\varphi\sin\varphi \ge 0 \Leftrightarrow \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Если $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, то $\sin\theta \le 0$ и $\cos\varphi\sin\varphi \le 0 \Leftrightarrow \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Заметим также, что если $(x_0, y_0, z_0) \in S$, то $(-x_0, -y_0, z_0) \in S$, $(-x_0, y_0, -z_0) \in S$, $(x_0, -y_0, -z_0 \in S)$. Поэтому, если M_1 – часть компакта M, расположенная в 1 октанте, то

$V = \iiint_M dxdydz = 4\iiint_{M_1} dxdydz =$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos^2\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi} r^2\cos\theta\, dr =$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_0^{a\cos^2\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi} r^2 dr =$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^{a\cos^2\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi}\right) =$

$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, a^3\cos^6\theta\sin^3\theta\sin^3\varphi\cos^3\varphi\, d\theta =$

$= \frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^3\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\cos^6\theta\sin^3\theta\, d\theta =$

$= -\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^2\varphi\, d\sin\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta\sin^2\theta\, d\cos\theta =$

$$= -\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\,(1-\sin^2\varphi)d\sin\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta\,(1-\cos^2\theta)d\cos\theta =$$
$$= -\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\varphi - \sin^5\varphi)d\sin\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^7\theta - \cos^9\theta)d\cos\theta =$$
$$= -\frac{4a^3}{3}\left(\left(\frac{\sin^4\varphi}{4} - \frac{\sin^6\varphi}{6}\bigg|\right)_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\left(\left(\frac{\cos^8\varphi}{8} - \frac{\cos^{10}\varphi}{10}\bigg|\right)_0^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$
$$= -\frac{4a^3}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\left(0-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right) = -\frac{4a^3}{3}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{-1}{40} = \frac{a^3}{360}\,.$$