МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ

ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ МГУ

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2023

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке приведены примеры вычисления определённых интегралов и решения прикладных задач.

Определенный интеграл

Напомним свойства и дополнительные определения, связанные с определенным интегралом. Предполагается, что функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на рассматриваемых промежутках

1) Если $a > b$, то по определению, полагаем $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Заметим, что это равенство справедливо и в случае $a < b$, так как тогда $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.
2) Также по определению положим $\int_a^a f(x)dx = 0$.
3) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.
4) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.
5) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
6) Если $f(x) \geq 0$ на $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, то $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)dx \geq 0$.
7) Если $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
8) $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Теорема. ***(Формула Ньютона-Лейбница). Если $\boldsymbol{f(x) \in C([a; b])}$, то для любой первообразной $\boldsymbol{F(x)}$ имеет место равенство $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$.***

Задача 1. По определению посчитать $\int_a^b xdx$.

Рассмотрим разбиение отрезка $[a; b]$ точками $x_k = \left\{a + \frac{b-a}{n}k\right\}_{k=0}^{n}$. Тогда $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$. И пусть $\xi_k = x_k$. Для интегральной суммы получим выражение

$S(f, T) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \cdot \frac{b-a}{n} =$

$= a(b-a) \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = a(b-a) \cdot \frac{1}{n} \cdot n + \frac{(b-a)^2}{n^2}\left(\frac{1+n}{2} \cdot n\right) =$

$= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \Rightarrow$

$\lim\limits_{d(\lambda)\to 0} S(f, T) = \lim\limits_{d(\lambda)\to 0}\left(a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{n+1}{n}\right) = ab - a^2 + \frac{a^2+b^2-2ab}{2} =$

$= \frac{2ab-2a^2+a^2+b^2-2ab}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$.

Заметьте, что мы рассмотрели самое простое разбиение и не доказали, что предел не зависит от выбора разбиения и выбора точек $\{\xi_k\}$. А по формуле Ньютона – Лейбница мы легко получим

$\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$.

Оцените и испытайте чувство благодарности!..

Задача 2. $\int_1^3 (x^2-2x+3)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\Big|_1^3 =$
$= (9-9+9) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 3\right) = 9 - 2\frac{1}{3} = 6\frac{2}{3}$.

Задача 3. $\int_0^\pi (2x+\sin 2x)\,dx = \int_0^\pi 2x\,dx + \int_0^\pi \sin 2x\,dx = x^2|_0^\pi - \frac{1}{2}\cos 2x|_0^\pi =$
$= \pi^2 - 0 - \frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos 0) = \pi^2 - \frac{1}{2}(1-1) = \pi^2$.

Задача 4. $\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2}\int_{-5}^{-2} \frac{d(2x-3)}{2x-3} = \frac{1}{2}(\ln|2x-3|)|_{-5}^{-2} =$
$= \frac{1}{2}(\ln|-7| - \ln|-13|) = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{13}$.

Задача 5. $\int_1^e \frac{(x-\sqrt{x})\,dx}{x\sqrt{x}} = \int_1^e \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)dx = 2\sqrt{x}\Big|_1^e - \ln|x||_1^e =$
$= 2\sqrt{e} - 2 - \ln e + \ln 1 = 2\sqrt{e} - 2 - 1 + 0 = 2\sqrt{e} - 3$.

Задача 6. $\int_1^5 \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}(\ln|1+x^2|)\Big|_1^5 = \frac{1}{2}(\ln 26 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln 13$.

Задача 7. $\int_1^2 \frac{(x+2)\,dx}{3-x} = -\int_1^2 \frac{(x+2)\,dx}{x-3} = -\int_1^2 \frac{(x-3+3+2)\,dx}{x-3} =$
$= -\int_1^2 dx - 5\int_1^2 \frac{d(x-3)}{x-3} = -(2-1) - 5(\ln|x-3|)\Big|_1^2 =$
$= -1 - 5(\ln|-1| - \ln|-2|) = -1 + 5\ln 2$.

Замечание. $\int_a^b dx = x|_a^b = b - a \Rightarrow \boxed{\int_a^b dx = b - a}$

Задача 8. $2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cos 8x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 10x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 6x\,dx =$
$= -\frac{1}{10}\cos 10x|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{6}(\cos 6x)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{10}\left(\cos\frac{5\pi}{3} - \cos 0\right) + \frac{1}{6}(\cos\pi - \cos 0) =$
$= -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1}{6}(-1-1) = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{20} - \frac{1}{3} = \frac{3-20}{60} = -\frac{17}{60}$.

В дальнейшем бывает очень полезна следующая теорема.

Теорема. У функций $\sin px$ и $\cos px$, $p > 0$ наименьший период равен $T_0 = \frac{2\pi}{p}$. Если в интегралах $\int_a^b \sin px\,dx$ и $\int_a^b \cos px\,dx$ величина $b - a = \frac{2\pi}{p}n$, $n \in \mathbb{Z}$, то эти интегралы равны 0.

Пример. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\sin 12x}_{T_0=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}}\,dx = 0$, так как $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}\cdot 2$.

Задача 9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cos x \sin^2 x\, dx =$
$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin^2 x)\sin^2 x\, d\sin x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x - \sin^4 x) d\sin x =$
$= \left(\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 = \frac{1}{3\cdot 2\sqrt{2}} - \frac{1}{5\cdot 4\sqrt{2}} = \frac{7}{60\sqrt{2}}$.
Задача 10. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 x\, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin^2 x)^2 dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$
$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$
$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx =$
$= \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\sin 2x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}(\sin 4x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$
$= \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\left(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{32}\left(\sin\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{16} - 0 + \frac{1}{32}\left(-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= \frac{\pi}{16} - \frac{\sqrt{3}}{32}$.
Задача 11. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}^2 x\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dx =$
$= (\mathrm{tg}\, x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}$.
Задача 12. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2} dx = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2} dx = -\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sin\frac{1}{x}\, d\frac{1}{x} = \left(\cos\frac{1}{x}\right)\Big|_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} =$
$= \cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi = 0 - (-1) = 1$.
Задача 13. $\int_1^3 \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int_1^3 \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+1} = \mathrm{arctg}(x+3)\,\Big|_1^3 = \mathrm{arctg}\, 6 - \mathrm{arctg}\, 4$.

Не надо торопиться в несложных задачах делать замену переменных, так как она приводит к дополнительным вычислениям и преобразованиям. Рассмотрим пример.
Задача 14. $\int_{-\frac{2}{5}}^{0} (2+5x)^4 dx = \frac{1}{5}\int_{-\frac{2}{5}}^{0} (2+5x)^4 d(2+5x) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}(2+5x)^5\,\Big|_{-\frac{2}{5}}^{0} =$
$= \frac{1}{25}(32-0) = \frac{32}{25}$.

Или другое решение (использующее замену переменной):

$$\int_{-\frac{2}{5}}^{0} (2+5x)^4 dx = \left\| \begin{matrix} 2+5x=t \\ dx=\frac{1}{5}dt \\ x=-\frac{2}{5} \Rightarrow t=0 \\ x=0 \Rightarrow t=2 \end{matrix} \right\| = \int_0^2 t^4\, dt = \frac{1}{5}t^5\Big|_0^2 = \frac{1}{5}(32-0) = \frac{32}{25}.$$

Интегрирование по частям

В общем случае для использования формулы интегрирования по частям надо проделать следующую работу

$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b u(x)v'(x)\,dx =$

$\boxed{= \int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)} =$

$= u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$

Задача 14. $\int_1^e \underbrace{\ln x}_{u}\, d\,\underbrace{x}_{v} = \ln x \cdot x\Big|_1^e - \int_1^e x d\ln x =$

$= \ln e \cdot e - \ln 1 \cdot 1 - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}dx = e - 0 - (e-1) = 1.$

Задача 15. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{\sin x}_{v'}\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{6}} xd\cos x = -x\cos x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\, dx =$

$= -\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} + 0 + \sin x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\frac{\pi}{6} - 0 = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{2}.$

Задача 16. $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = \operatorname{arctg} x \cdot x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\, d\operatorname{arctg} x =$

$= \operatorname{arctg} 1 \cdot 1 - \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\,.$

Теорема. $\boldsymbol{\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{если } f(x) - \text{четная на } [-a;a] \\ 0, & \text{если } f(x) - \text{нечетная на } [-a;a]. \end{cases}}$

Задача 17. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \sin 5x}{\cos 2x + \cos 7x + 4}dx = 0,$

так как рассматривается интеграл по симметричному промежутку от нечетной функции (докажите, что функция $\frac{\sin x + \sin 5x}{\cos 2x + \cos 7x + 4}$ – нечетная).

Уравнение относительно интеграла

Задача 17. $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\, d\sin x = e^{2x}\sin x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, de^{2x} =$

$= e^{\pi}\cdot 1 - 0 - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x\, dx = e^{\pi} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\, d\cos x =$

$= e^{\pi} + 2e^{2x}\cos x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, de^{2x} = e^{\pi} + 2(0-1) - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx =$

$= \boxed{e^{\pi} - 2 - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx} \Rightarrow$

$5\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx = e^{\pi} - 2 \Rightarrow \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx = \frac{e^{\pi}-2}{5}.$

Очень важная подстановка

Задача 18. $\int_0^a x^5\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left\| \begin{matrix} x = a\sin t \\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ dx = a\cos t dt \end{matrix} \right\| =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^5 \sin^5 t\,\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\, a\cos t\, dt =$

$= a^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\, \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t\, dt = a^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\, \sqrt{\cos^2 t} \cos t\, dt =$
$= a^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\, |\cos t| \cos t\, dt \boxed{=}$

так как $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos t \geq 0 \Rightarrow |\cos t| = \cos t$

$\boxed{=}\ a^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^5 t\, dt = a^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^4 t \sin t\, dt =$
$= -a^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, (1-\cos^2 t)^2 d\cos t = -a^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos^2 t + \cos^4 t)\, d\cos t =$
$= -a^7 \left(\cos t - \frac{2\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^5 t}{5}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -a^7 \cdot 0 + a^7 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{8a^7}{15}$.

Простейшие применения определенного интеграла

I.1. Площадь между кривыми заданными графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$

Пусть $f(x) \geq g(x)$ на $[a; b]$. Тогда площадь полученной криволинейной трапеции равна $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

Задача 1. Найти площадь между кривыми $y = \sin x$ и $y = 0$ при $-\frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

Решение. График функции $y = \sin x$ будет лежать выше оси Ox при $-\frac{7\pi}{6} \leq x \leq -\pi$ и $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ и будет лежать ниже оси Ox при $-\pi \leq x \leq 0$ (обязательно нарисуйте «картинку»!). Поэтому

$S = \int_{-\frac{7\pi}{6}}^{-\pi} (\sin x - 0)dx + \int_{-\pi}^{0} (0 - \sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - 0)dx =$
$= \int_{-\frac{7\pi}{6}}^{-\pi} (\sin x)dx - \int_{-\pi}^{0} (\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x)dx =$
$= -\cos x \Big|_{-\frac{7\pi}{6}}^{-\pi} + \cos x \Big|_{-\pi}^{0} - \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$
$= -\left(-1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \left(1 - (-1)\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 =$
$= 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

Замечание. Хорошо бы осознать и запомнить, что площадь «четвертинки синусоиды» равна 1, действительно
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$

Задача 2. Найти площадь между кривыми $y = -x^3$ и $y = -9x$.
Решение. Функции $y = -x^3$ и $y = -9x$ являются нечетными. Поэтому «картинка» (обязательно нарисуйте!) будет центрально симметрична, и площадь искомой фигуры будет равна удвоенной площади части фигуры, например, при $x \geq 0$. Легко найти точки пересечения этих кривых.

Замечание. ***Чтобы найти точки пересечения двух кривых, заданных уравнениями*** $\boldsymbol{\varphi(x,y)=0}$ ***и*** $\boldsymbol{\phi(x,y)=0}$***, надо решить систему***

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varphi(x,y)=0}\\ \boldsymbol{\phi(x,y)=0}.\end{cases}$$

В нашем случае система имеет вид

$$\begin{cases}y=-x^3\\ y=-9x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x^3=-9x\\ y=-9x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\vee x=-3\vee x=3\\ y=-9x\end{cases}$$

Поэтому

$$S=2\int_0^3(-x^3+9x)dx=2\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{9x^2}{2}\right)\Big|_0^3=2\left(-\frac{3^4}{4}+\frac{9\cdot3^2}{2}-0\right)=2\cdot\frac{3^4}{4}=\frac{81}{2}.$$

Задача 3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\arccos x$, $x=-1,\ x=0,\ y=1$.

Решение. Нарисуйте «картинку». Легко видеть, что

$$S=\int_{-1}^0(\arccos x-1)dx=\int_{-1}^0\arccos x\,dx-\int_{-1}^0dx=$$

$$=\arccos x\cdot x\Big|_{-1}^{0}+\int_{-1}^0 xd\arccos x-\big(0-(-1)\big)=$$

$$=0-\arccos(-1)\cdot(-1)+\int_{-1}^0\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}-1=\pi-1-\frac{1}{2}\int_{-1}^0\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\pi-1-\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^{0}=\pi-1-1+0=\pi-2.$$

А теперь внимательно посмотрите на «картинку» и постарайтесь увидеть, что площадь искомой фигуры легко найти, если из площади прямоугольника со сторонами 1 и π вычесть площадь прямоугольника со сторонами 1 и 1 и площадь «четвертинки синусоиды», то есть действительно

$$S=1\cdot\pi-1\cdot1-1=\pi-2.$$

Задача 4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=-x^2+5x-6$ и $y=x^2-6$.

Решение. Прежде чем рисовать «картинку», найдем точки пересечения этих двух парабол, для чего решим систему

$$\begin{cases}y=-x^2+5x-6\\ y=x^2-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+5x-6=x^2-6\\ y=x^2-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-5x=0\\ y=x^2-6\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\vee x=\frac{5}{2}\\ y=x^2-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-6\end{cases}\vee\begin{cases}x=\frac{5}{2}\\ y=\frac{1}{4}\end{cases}.$$

В качестве «картинки» мы получили «вырожденную» криволинейную трапецию, то есть трапецию, у которой параллельные стороны «выродились в точки».

$$S=\int_0^{\frac{5}{2}}\big((-x^2+5x-6)-(x^2-6)\big)dx=\int_0^{\frac{5}{2}}(-2x^2+5x)dx=$$

$$=\left(-\frac{2x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{5}{2}}=-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3+\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^3\left(-\frac{2}{3}+1\right)=\frac{125}{24}.$$

Задача 5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\operatorname{tg}^2x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=0$.

Решение. Из соответствующей задачи «картинки» видно, что

$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}^2\, x - 0) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx =$
$= \mathrm{tg}\, x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = 1 - 0 - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$

Замечание. Площадь фигуры всегда неотрицательна. Если получился отрицательный ответ, надо искать ошибку.

I.2. Площадь сектора в полярных координатах

Если сектор ограничен лучами $\boldsymbol{\varphi = \varphi_1}$, $\boldsymbol{\varphi = \varphi_2}$ и кривой $\boldsymbol{r = r(\varphi)}$, то

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi}$$

Задача 6. Найти площадь «трехлепестковой розы», то есть площадь фигуры, ограниченной кривой $r = \sin 3\varphi$.
Решение. Напомним, что точки кривой $r(\varphi) = \sin 3\varphi$ будут находиться только на лучах $\varphi = \varphi_0$, на которых $r(\varphi) \geq 0$.
$r(\varphi) \geq 0 \Leftrightarrow \sin 3\varphi \geq 0 \Leftrightarrow 0 + 2\pi n \leq 3\varphi \leq \pi + 2\pi n \Leftrightarrow \frac{2\pi n}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. В силу периодичности функции $r(\varphi) = \sin 3\varphi$ достаточно рассмотреть $n = 0,1,2$. Кроме того, при каждом из этих n мы получим одинаковые по площади «лепестки». Поэтому

$$S = 3 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\varphi\, d\varphi = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(1 - \underbrace{\cos 6\varphi}_{T_0 = \frac{2\pi}{6}}\right) d\varphi = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 7. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
$r_1(\varphi) = a(1 - \cos\varphi)$ – кардиоида
$r_2(\varphi) = a$ – окружность
вне кардиоиды.
Решение. Нарисуйте «картинку» и убедитесь, что точки фигуры будут при $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - a^2(1 - \cos\varphi)^2) d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 1 + 2\cos\varphi - \cos^2\varphi) d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos\varphi - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \underbrace{\cos 2\varphi}_{T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi - 0 = 2a^2 - \frac{\pi a^2}{4}.$$

Задача 8. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой
$r(\varphi) = 3(1 + \sin\varphi)$.
Решение. Заметим, что $r(\varphi) = 3(1 + \sin\varphi) \geq 0 \ \ \forall \varphi \in [-\pi; \pi]$. Поэтому

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}9(1+\sin\varphi)^2d\varphi=\frac{9}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+2\underbrace{\sin\varphi}_{\text{нечет}}+\sin^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{9}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\underbrace{\cos 2\varphi}_{T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi}\right)d\varphi=\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\pi=\frac{27\pi}{2}.$$

I.3. Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически

Если кривая задана параметрически

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=x(t)}\\ \boldsymbol{y=y(t)}\end{cases},\ \boldsymbol{y(t)\ge 0},\ \boldsymbol{a=x(t_1)},\ \boldsymbol{b=x(t_2)},$$

причем $\boldsymbol{x\in[a;b]}$, $\boldsymbol{t: t_1\to t_2}$. ***Тогда площадь криволинейной трапеции между кривой и осью*** $\boldsymbol{Ox}$ ***вычисляется по формуле***

$$\boldsymbol{S=\int_{t_1}^{t_2}y(t)x'(t)dt}.$$

Задача 9. Найти площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$.

Решение. В этом случае и кривая, и фигура, ограниченная этой кривой называются «эллипс». Параметрическое уравнение эллипса (кривой) имеет вид:

$$\begin{cases}x=a\cos t\ \Longrightarrow x'(t)=-a\sin t\\ y=b\sin t\\ t\in[-\pi;\pi]\end{cases}.$$

Заметим, что эллипс состоит из двух равных по площади половинок: верхней и нижней. Рассмотрим верхнюю. Точки верхней половинки получаются при $x\in[-a;a]$. Но $x:-a\to a$ при $t:\pi\to 0$! Поэтому

$$S=2\int_{\pi}^{0}b\sin t\,(-a\sin t)dt=-2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t\,dt=-ab\int_{\pi}^{0}\left(1-\underbrace{\cos 2t}_{T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi}\right)dt=$$

$$=-ab(0-\pi)=\pi ab.$$

Задача 10. Найти площадь астроиды (фигуры, ограниченной кривой, которая также называется астроидой)

$$\begin{cases}x=a\cos^3 t\ \Longrightarrow x'(t)=-3a\cos^2 t\sin t\\ y=a\sin^3 t\\ t\in[-\pi;\pi]\end{cases}.$$

Заметим, что астроида состоит из двух равных по площади половинок: верхней и нижней. Рассмотрим верхнюю. Точки верхней половинки получаются при $x\in[-a;a]$. Но $x:-a\to a$ при $t:\pi\to 0$! Поэтому

$$S=2\int_{\pi}^{0}a\sin^3 t\,(-3a\cos^2 t\sin t)dt=-6a^2\int_{\pi}^{0}\sin^4 t\cos^2 t\,dt=$$

$$=-6a^2\int_{\pi}^{0}\sin^2 t\sin^2 t\cos^2 t\,dt=-6a^2\int_{\pi}^{0}\frac{1-\cos 2t}{2}\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2dt=$$

$$=-6a^2\cdot\frac{1}{8}\int_{\pi}^{0}\sin^2 2t\,dt+6a^2\cdot\frac{1}{8}\int_{\pi}^{0}\sin^2 2t\cos 2t\,dt=$$

$$= -\frac{3a^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_{\pi}^{0}\left(1-\underbrace{\cos 4t}_{T_0=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}}\right)dt+\frac{3a^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_{\pi}^{0}\sin^2 2t\,d\sin 2t=$$

$$= -\frac{3a^2}{4}\cdot\frac{1}{2}(0-\pi)+0+\frac{3a^2}{8}\left(\frac{\sin^3 2t}{3}\right)\Big|_{\pi}^{0}=\frac{3\pi a^2}{8}+0=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

Задача 11. Найти площадь между первой аркой циклоиды

$$\begin{cases} x=t-\sin t \Longrightarrow x'(t)=1-\cos t\\ y=1-\cos t\\ t\in[0;2\pi]\end{cases}$$

и прямой $y=\frac{1}{2}$.

Решение. Найдем точки пересечения циклоиды и прямой:

$$\begin{cases} y=1-\cos t\\ y=\frac{1}{2}\\ t\in[0;2\pi]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\cos t=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}\\ t\in[0;2\pi]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}\\ t\in[0;2\pi]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{\pi}{3}\vee t=\frac{5\pi}{3}\\ y=\frac{1}{2}\\ t\in[0;2\pi].\end{cases}$$

$$S=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}(1-\cos t)(1-\cos t)dt-\frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt-\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt-\frac{2\pi}{3}=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)-2\sin t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}-\frac{2\pi}{3}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}-2\left(\sin\frac{5\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}\left(\sin\frac{10\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{2\pi}{3}=$$

$$=2\pi-2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{4\pi}{3}+\frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

II. Длина кривой

II.1. Длина кривой, заданной в виде $\boldsymbol{y=y(x)}$, $\boldsymbol{x\in[a;b]}$ или $\boldsymbol{x=x(y)}$, $\boldsymbol{y\in[c;d]}$:

$$\boldsymbol{l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}} \quad \textit{или} \quad \boldsymbol{l=\int_c^d\sqrt{1+(x')^2}}.$$

Задача 1. Найти длину кривой $y=\ln\sin x$, $x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$.

Решение. $y'=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\sin x} \Longrightarrow$

$$l=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{|\sin x|}dx\ \boxed{=}$$

так как $x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]\Longrightarrow\sin x\geq 0\Longrightarrow|\sin x|=\sin x$

$$\boxed{=} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin x}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin\frac{x}{2}dx}{\cos\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos\frac{x}{2}dx}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin\frac{x}{2}d\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos\frac{x}{2}d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \left(-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \left(\ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right| = \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \ln\sqrt{3} + \ln\sqrt{3} = 2\ln\sqrt{3}.$$

Задача 2. Найти длину части параболы $y = -x^2 + 2x$ от вершины до точки с координатами $(2; 0)$.

Решение. Вершина параболы находится в точке с координатами

$x_0 = -\frac{2}{-2} = 1,\ y_0 = 1,$ и $y' = -2x + 2 \implies$

$$l = \int_1^2 \sqrt{1 + (-2x+2)^2}dx = \int_1^2 \sqrt{1 + (2x-2)^2}dx \ \boxed{=}$$

Рассмотрим сначала неопределенный интеграл

$$\int \sqrt{1 + (2x-2)^2}dx = \left\|\begin{matrix} 2x-2=t \\ dx=\frac{1}{2}dt \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\int t d\sqrt{1+t^2} = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+1-1)dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+1)dt}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \sqrt{1+t^2}dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \sqrt{1+t^2}dt + \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|.$$

Получили уравнение относительно интеграла $\implies$

$$\int \sqrt{1+t^2}dt = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right| + C,\ C \in \mathbb{R} \implies$$

$$\int \sqrt{1 + (2x-2)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}(2x-2)\sqrt{1 + (-2x+2)^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x - 2 + \sqrt{1 + (-2x+2)^2}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{=} \frac{1}{4}\left((2x-2)\sqrt{1 + (-2x+2)^2}\right)\Big|_1^2 +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\ln\left|2x - 2 + \sqrt{1 + (-2x+2)^2}\right|\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\sqrt{5} - 0 + \frac{1}{4}\ln\left|2 + \sqrt{5}\right| - \frac{1}{4}\ln 1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(2 + \sqrt{5}\right).$$

Замечание. Ответ $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{5} - 2\right)$ тоже верный. Почему?

II.2. Длина кривой, заданной параметрически

Если кривая задана параметрически

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x(t)} \\ \boldsymbol{y = y(t)} \\ \boldsymbol{t \in [t_1; t_2]} \end{cases} \implies \boldsymbol{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt.}$$

Задача 3. Найти длину кривой (астроиды)

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \\ t \in [-\pi;\pi]\,. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t \\ y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t \\ t \in [-\pi;\pi]\,. \end{cases} \Rightarrow$$

$$l = \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\cos^2 t\sin^4 t}\,dt =$$

$$= 3a\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t)}dt = 3a\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 3a\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 2t}\,dt = \frac{3a}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\sin^2 2t}\,dt = \frac{3a}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin 2t|dt \boxed{\equiv}$$

Заметим, что астроида состоит из четырех кусочков одинаковой длины, причем, для того, который расположен в первом октанте выполняется условие $\sin 2t \geq 0 \Rightarrow |\sin 2t| = \sin 2t \quad \forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\boxed{\equiv}\ 4\cdot\frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt = 6a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3a(-1-1) = 6a.$$

Задача 4. Найти длину кривой (циклоида), заданной условиями

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \\ t \in [0;2\pi]\,. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 1 - \cos t \\ y'(t) = \sin t \\ t \in [0;2\pi]\,. \end{cases} \Rightarrow$$

$$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{2 - 2\cos t}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt \boxed{\equiv}$$

при $t \in [0;2\pi]$ аргумент $\frac{t}{2} \in [0;\pi] \Rightarrow \sin\frac{t}{2} \geq 0 \Rightarrow \left|\sin\frac{t}{2}\right| = \sin\frac{t}{2}$,

$$\boxed{\equiv}\ 2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2(-2)\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4(-1-1) = 8\,.$$

Задача 5. Найти длину кривой, заданной условиями

$$\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \\ t \in [0;1]\,. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = e^t\cos t - e^t\sin t \\ y'(t) = e^t\sin t + e^t\cos t \\ t \in [0;1]\,. \end{cases} \Rightarrow$$

$$l = \int_0^1\sqrt{(e^t\cos t - e^t\sin t)^2 + (e^t\sin t + e^t\cos t)^2}dt =$$

$$= \int_0^1\sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - 2\cos t\sin t + \sin^2 t + \cos^2 t + 2\cos t\sin t + \sin^2 t)}\,dt =$$

$$= \int_0^1\sqrt{e^{2t}\cdot 2}\,dt = \sqrt{2}e^t\Big|_0^1 = \sqrt{2}(e^1 - e^0) = \sqrt{2}(e-1).$$

II.3. Длина кривой, заданной в полярных координатах

Если кривая задана в полярных координатах $\boldsymbol{r = r(\varphi)}$, $\boldsymbol{\varphi \in [\varphi_1;\varphi_2]}$ ***то***

$$\boldsymbol{l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi}$$

Задача 6. Найти длину кривой, заданной условиями

$$\begin{cases} r = \sqrt{2}e^{\varphi} \\ \varphi \in [0; \pi] \end{cases} \Rightarrow r' = \sqrt{2}e^{\varphi} \Rightarrow$$

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\sqrt{2}e^{\varphi}\right)^2 + \left(\sqrt{2}e^{\varphi}\right)^2} dt = \int_0^{\pi} \sqrt{4e^{2\varphi}} dt = 2\int_0^{\pi} e^{\varphi} dt = 2e^{\varphi}\Big|_0^{\pi} =$$
$$= 2(e^{\pi} - 1).$$

Задача 7. Найти длину кривой, заданной условием $r = \sqrt{2}\sin\varphi$.
Так как $\sin\varphi$ – периодическая функция, то достаточно рассмотреть $\varphi \in [0; 2\pi]$ и тогда $\sin\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \in [0; \pi]$.
$r' = \sqrt{2}\cos\varphi \Rightarrow$

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\sqrt{2}\sin\varphi\right)^2 + \left(\sqrt{2}\cos\varphi\right)^2} dt = \int_0^{\pi} \sqrt{2} dt = \sqrt{2}\pi.$$

Задача 8. Найти длину кривой, заданной условием $r = a(1 + \cos\varphi)$ (кардиоида).
Так как $\sin\varphi$ – периодическая функция, то достаточно рассмотреть $\varphi \in [-\pi; \pi]$.

$$r' = -a\sin\varphi \Rightarrow l = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2(-\sin\varphi)^2} dt \boxed{=}$$

так как под знаком интеграла стоит четная функция, то

$$\boxed{=} 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2(-\sin\varphi)^2} dt = 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\varphi)} dt =$$
$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2})} dt = 4a\int_0^{\pi} \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| dt = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2} dt =$$
$$= 4a \cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a(1-0) = 8a.$$

III. Объемы тел вращения

Объем тела вращения, полученного вращением вокруг оси Ox или оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = y(x) \geq 0$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, $0 \leq a < b$ вычисляется по формуле

$V_x = \pi\int_a^b y^2(x)dx$ и $V_y = 2\pi\int_a^b xy(x)dx$.

Замечание. Если функция $y = y(x)$ не удовлетворяет условию $y(x) \geq 0$, следует рассматривать функцию $|y(x)|$.

Замечание. Во всех следующих задачах, конечно, нужно нарисовать «картинки».

Задача 9. Найти V_x и V_y, полученные вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $xy = 6$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

$$V_x = \pi\int_1^4 \left(\frac{6}{x}\right)^2 dx = \pi \cdot 36\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^4 = 36\pi\left(-\frac{1}{4} + 1\right) = 27\pi.$$

$$V_y = 2\pi\int_1^4 x \cdot \frac{6}{x} dx = 2\pi \cdot 3 \cdot 6 = 36\pi.$$

Задача 10. Найти V_x, полученный вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = x^3, x \geq 0$, $x = 0$, $y = 8$.
Кривые $y = x^3$ и $= 8$ пересекаются при $x = 2$.

$V_x = \pi \int_0^2 8^2 dx - \pi \int_0^2 (x^3)^2 dx = \pi \int_0^2 (8^2 - (x^3)^2) dx = \pi \int_0^2 (64 - x^6) dx =$
$= \pi \cdot 64 \cdot 2 - \pi \cdot \frac{x^7}{7}\Big|_0^2 = 128\pi - \frac{128\pi}{7} = \frac{768\pi}{7}.$

Задача 11. Найти V_y, полученный вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = \frac{2}{1+x^2}, x = 0,\ x = 1,\ y = 0.$

$V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot \frac{2}{1+x^2} dx = 2\pi \int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = 2\pi \ln(1+x^2)\Big|_0^1 = 2\pi(\ln 2 - \ln 1) =$
$= 2\pi \ln 2.$

Задача 12. Найти V_x, полученный вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = \sqrt{x}e^x, x = 0,\ x = \ln 2,\ y = 0.$

$V_x = \pi \int_0^{\ln 2} \left(\sqrt{x}e^x\right)^2 dx = \pi \int_0^{\ln 2} xe^{2x} dx = \pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} x de^{2x} =$
$= \frac{\pi}{2} xe^{2x}\Big|_0^{\ln 2} - \frac{\pi}{2} \int_0^{\ln 2} e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \ln 2 \cdot e^{2\ln 2} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x}\Big|_0^{\ln 2} =$
$= \frac{\pi}{2} \cdot \ln 2 \cdot 4 - \frac{\pi}{4}\left(e^{2\ln 2} - 1\right) = 2\pi \ln 2 - \frac{\pi}{4} \cdot 3 = 2\pi \ln 2 - \frac{3\pi}{4}.$

Задача 13. Найти V_x и V_y, полученные вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = 2\sin x, 0 \le x \le \pi,\ y = 0.$

$$V_x = \pi \int_0^{\pi} (2\sin x)^2 dx = \pi \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(1 - \underbrace{\cos 2x}_{T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi}\right) dx = 2\pi \cdot \pi - 0 = 2\pi^2.$$

$V_y = 2\pi \int_0^{\pi} x \cdot 2\sin x\, dx = -4\pi \int_0^{\pi} xd\cos x = -4\pi x \cos x\Big|_0^{\pi} + 4\pi \int_0^{\pi} \cos x\, dx =$
$= -4\pi(\pi \cdot (-1) - 0) + 4\pi \sin x\Big|_0^{\pi} = 4\pi^2.$

Задача 14. Найти V_x, полученный вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

$V_x = \pi \int_{-a}^{a} (y(x))^2 dx = \pi \int_{-a}^{a} \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2\right) dx = 2\pi \int_0^{a} \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2\right) dx =$
$= 2\pi \cdot b^2 \cdot a - 2\pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = 2\pi ab^2 - 2\pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} = 2\pi ab^2 - \frac{2\pi ab^2}{3} =$
$= \frac{4}{3}\pi ab^2.$

Задача 15. Найти V_x, полученный вращением циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \Rightarrow x'(t) = a(1 - \cos t) \\ y = a(1 - \cos t) \\ t \in [0; 2\pi] \end{cases}$$

$V_x = \pi \int_a^b (y(x))^2 dx = \pi \int_\alpha^\beta y^2\big(x(t)\big) dx(t) = \pi \int_\alpha^\beta y^2\big(x(t)\big) x'(t) dt.$

$V_x = \pi \int_0^{2\pi} \big(a(1 - \cos t)\big)^2 \cdot a(1 - \cos t) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt =$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - \underbrace{3\cos t}_{T_0 = 2\pi} + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right) dt =$$

$$= \pi a^3 \cdot 2\pi - 0 + \pi a^3 \cdot \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + \underbrace{\cos 2t}_{T_0 = \pi}\right) dt - \pi a^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cos t\, dt =$$

$= 2\pi^2 a^3 + \pi a^3 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi + 0 - \pi a^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, d\sin t =$

$$= 2\pi^2 a^3 + 3\pi^2 a^3 - \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)\, d \sin t =$$
$$= 5\pi^2 a^3 - \pi a^3 \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$