МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ

ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ МГУ

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2023

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке приведены примеры вычисления несобственных интегралов первого и второго рода.

Несобственные интегралы

Определение. *Пусть для всех* $b \in [a;+\infty)$ *существует* $F(b)=\int_a^b f(x)dx$. *Если существует* $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)=I$, *то этот предел называется* ***несобственным интегралом*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***от*** $\boldsymbol{a}$ ***до*** $+\infty$ ***(1-го рода)*** *и обозначается* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Теорема. *Если сходятся интегралы* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *и* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, *то сходится интеграл от суммы этих функций и выполняется равенство* $\int_a^{+\infty}(f(x)+g(x))dx=\int_a^{+\infty} f(x)dx+\int_a^{+\infty} g(x)dx$. *Кроме того, для любого числа* c *сходится интеграл* $\int_a^{+\infty} cf(x)dx=c\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Определение. *Пусть для всех* $b \in [a;\omega)$, $\omega\in\mathbb{R}$ *существует* $F(b)=\int_a^b f(x)dx$. *Если существует* $\lim\limits_{b\to\omega-0} F(b)=I$, *то этот предел называется* ***несобственным интегралом*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***от*** $\boldsymbol{a}$ ***до*** $\boldsymbol{\omega}$ ***(2-го рода)*** *и обозначается* $\int_a^{\omega} f(x)dx$.

Теорема. *Если сходятся интегралы* $\int_a^{\omega} f(x)dx$ *и* $\int_a^{\omega} g(x)dx$, *то сходится интеграл от суммы этих функций и выполняется равенство* $\int_a^{\omega}(f(x)+g(x))dx=\int_a^{\omega} f(x)dx+\int_a^{\omega} g(x)dx$. *Кроме того, для любого числа* c *сходится интеграл* $\int_a^{\omega} cf(x)dx=c\int_a^{\omega} f(x)dx$.

Замечание 1. Для обозначения несобственного интеграла второго рода и собственного интеграла используется один и тот же символ $\int_a^{\omega} f(x)dx$. Это не приводит к недоразумениям, поскольку собственный интеграл $\int_a^{\omega} f(x)dx$, по теореме о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом, равен $\lim\limits_{b\to\omega-0} F(b)=I$.

Несобственные интегралы 1-го рода

Задача 1. $\int_0^{+\infty} e^{-4x}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-4x}dx=-\frac{1}{4}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(e^{-4x}\Big|_0^b\right)=$
$=-\frac{1}{4}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\underbrace{e^{-4b}}_{\to 0}-e^0\right)=-\frac{1}{4}(0-1)=\frac{1}{4}$ (интеграл сходится).

Задача 2. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x^2}d(-x^2)=$
$=-\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(e^{-x^2}\Big|_0^b\right)=-\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\underbrace{e^{-b^2}}_{\to 0}-1\right)=\frac{1}{2}$ (интеграл сходится).

Задача 3. 1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{x^2}dx=-\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\Big|_1^b\right)=-\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right)=$
$=1$ (интеграл сходится).

2) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{x}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\ln x\Big|_1^b\right)=\lim\limits_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty$ (интеграл расходится).

3) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt{x}\Big|_1^b\right) = 2\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt{b}-1\right) = \infty$ (интеграл расходится).

Задача 4. 1) $\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{10}^b \frac{1}{x\ln x} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{10}^b \frac{1}{\ln x} d\ln x =$

$= \lim_{b\to+\infty}\left(\ln\ln x\,\Big|_{10}^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\underbrace{\ln\ln b}_{\to+\infty} - \ln\ln 10\right) = \infty$ (интеграл расходится).

2) $\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{10}^b \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{10}^b \frac{1}{(\ln x)^2} d\ln x =$

$= -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\Big|_{10}^b\right) = -\lim_{b\to+\infty}\left(\underbrace{\left(\frac{1}{\ln b}\right)}_{\to 0} - \frac{1}{\ln 10}\right) = \frac{1}{\ln 10}$ (интеграл сходится).

Задача 5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{a}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx =$

$= \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{a} \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{B\to+\infty} \int_{a}^{B} \frac{1}{1+x^2} dx =$

$= \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} x\,\Big|_{-A}^{a} + \lim_{B\to+\infty} \operatorname{arctg} x\,\Big|_{a}^{B} =$

$= \lim_{A\to+\infty}(\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg}(-A)) + \lim_{B\to+\infty}(\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} a) =$

$= \operatorname{arctg} a - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a = \pi.$

Задача 6. Найти V_y, полученный вращением фигуры, ограниченной кривыми $y = e^{-x}$, $x \ge 0$, $x = 0$, $y = 0$.

$V_y = 2\pi \int_0^{+\infty} x\, e^{-x} dx = 2\pi \lim_{b\to+\infty} \int_0^b x\, e^{-x} dx = -2\pi \lim_{b\to+\infty} \int_0^b x\, de^{-x} =$

$= -2\pi \lim_{b\to+\infty}\left(xe^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b e^{-x} dx\right) = -2\pi \lim_{b\to+\infty}\left(\underbrace{be^{-b}}_{\to 0} + e^{-x}\Big|_0^b\right) =$

$= -2\pi \lim_{b\to+\infty}\left(\underbrace{e^{-b}}_{\to 0} - 1\right) = 2\pi.$

Напомним, что $\lim_{b\to+\infty}(be^{-b}) = [\infty\cdot 0] = \lim_{b\to+\infty} \frac{b}{e^b} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{Л}}{=} \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{e^b} = 0.$

Несобственные интегралы 2-го рода

Задача 7. 1) $\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{d(x-a)}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln|x-a|\,\Big|_{a+\varepsilon}^b =$

$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln|b-a| - \ln|a+\varepsilon-a|) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|b-a| - \underbrace{\ln\varepsilon}_{\to\infty}\right) = \infty$ (интеграл расходится).

2) $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{d(x-a)}{(x-a)^2} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{x-a}\Big|_{a+\varepsilon}^b\right) =$

$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{b-a} - \frac{1}{a+\varepsilon-a}\right) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{b-a} - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty$ (интеграл расходится).

3) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x-a}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{\sqrt{x-a}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{d(x-a)}{\sqrt{x-a}} = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{x-a}\Big|_{a+\varepsilon}^b =$

$= 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{b-a} - \sqrt{a+\varepsilon+a}\right) = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{b-a} - \sqrt{\varepsilon}\right) = 2\sqrt{b-a}$ (интеграл сходится).

Задача 8. $\int_1^4 \frac{dx}{x-2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_1^{2-\varepsilon}\frac{dx}{x-2} + \lim\limits_{\delta\to 0}\int_{2+\delta}^4 \frac{dx}{x-2} =$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_1^{2-\varepsilon}\frac{d(x-2)}{x-2} + \lim\limits_{\delta\to 0}\int_{2+\delta}^4\frac{d(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln|x-2|\Big|_1^{2-\varepsilon} + \lim\limits_{\delta\to 0}\ln|x-2|\Big|_{2+\delta}^4 =$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\underbrace{\ln|2-\varepsilon-2|}_{\to\infty} - \ln|1-2|\right) + \lim\limits_{\delta\to 0}\left(\ln|4-2| - \underbrace{\ln|2+\delta-2|}_{\to\infty}\right).$

Оба предела равны ∞, поэтому интеграл расходится. Хотя в подобной ситуации не требуется рассмотрение обоих пределов. Если один предел равен ∞, то интеграл расходится вне зависимости от того, каким является и существует ли второй предел.

Задача 9. $\int_0^1 \ln x\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(x\ln x\,\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 x d\ln x\right) =$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(1\cdot\ln 1 - \varepsilon\ln\varepsilon - \int_\varepsilon^1 x\cdot\frac{1}{x}dx\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\underbrace{\varepsilon\ln\varepsilon}_{\to 0} - 1 + \varepsilon\right) = -1,$

так как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\ln\varepsilon) = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{Л}}{=} \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon = 0.$

Задача10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1-\cos 2x} \boxed{=}$

заметим, что $x\to 0 \Longrightarrow \cos 2x\to 1 \Longrightarrow \frac{1}{1-\cos 2x}\to\infty$, поэтому

$\boxed{=} \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1-\cos 2x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\operatorname{ctg} x\,\Big|_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}}\right) =$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - \underbrace{\operatorname{ctg}\varepsilon}_{\to\infty}\right) = \infty$ (интеграл расходится).

Задача11. $\int_0^1 x\ln x\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x\ln x\,dx = \frac{1}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx^2 =$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(x^2\ln x\,\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 x^2 d\ln x\right) = \frac{1}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(1\cdot\ln 1 - \varepsilon^2\ln\varepsilon - \int_\varepsilon^1 x^2\frac{1}{x}dx\right) =$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(0 - \varepsilon^2\ln\varepsilon - \frac{x^2}{2}\Big|_\varepsilon^1\right) = \frac{1}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(-\varepsilon^2\ln\varepsilon - \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right).$

Очевидно, что вопрос о сходимости этого интеграла сводится к вопросу о существовании конечного предела

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^2\ln\varepsilon) = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{Л}}{=} \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{2}{\varepsilon^3}} = -\frac{1}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2 = 0.$

Следовательно, интеграл сходится.

Задача12. $\int_0^3\frac{2dx}{x^2-1} = \int_0^3\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx.$

Первая дробь на $[0;3]$ содержит точку разрыва второго рода, а вторая дробь – непрерывна. Поэтому вопрос о сходимости исходного интеграла сводится к вопросу о сходимости интеграла $\int_0^3\left(\frac{1}{x-1}\right)dx$, а такой интеграл, как было показано выше, расходится. Значит, исходный интеграл тоже расходится.

Замечание 2. Если несобственный интеграл 2-го рода сходится, а первообразная подынтегральной функции непрерывна в точке разрыва подынтегральной функции, то его можно считать, как обычный определенный интеграл, например,

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2(1-0) = 2$ (сравните с решением задачи 7.3).

Рассмотрим еще один пример на эту тему.

Задача 18. $\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \boxed{=}$

Заметим, что подынтегральная функция в левой полуокрестности точки $x = a$ является неограниченной. Следовательно, рассматриваемый интеграл является несобственным интегралом 2-го рода, и мы должны проделать следующую работу:

$$\boxed{=} \lim_{\delta\to 0}\int_0^{a-\delta}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \left\|\begin{matrix} x=a\sin t \\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right] \\ dx=a\cos t dt\end{matrix}\right\| = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t dt}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t dt}{a\sqrt{1-\sin^2 t}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t dt}{a|\cos t|} \boxed{=}$$

так как $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$, то $\cos t > 0 \Rightarrow |\cos t| = \cos t$

$$\boxed{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t dt}{a\cos t} = a^2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^2 t\, dt = \frac{a^2}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}(1-\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\right) = \frac{a^2}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon-\frac{1}{2}\sin(\pi-2\varepsilon)+0\right) = \frac{\pi a^2}{4}.$$

А теперь попробуем поступить в соответствии с **Замечанием 2**.

$$\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \left\|\begin{matrix} x=a\sin t \\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ dx=a\cos t dt\end{matrix}\right\| = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t dt}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}} == \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t dt}{a\sqrt{1-\sin^2 t}} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t dt}{a|\cos t|} \boxed{=}$$

так как $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos t \geq 0 \Rightarrow |\cos t| = \cos t$

$$\boxed{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t dt}{a\cos t} = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\, dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$