МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ

ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ МГУ

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ, ЧАСТЬ 2

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2023

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке показаны приёмы интегрирования, включающие интегрирование рациональных функций, некоторых иррациональных функций и тригонометрических функций.

Неопределенный интеграл. Частные методы интегрирования

1. Интегрирование «квадратных трехчленов в знаменателе»

Рассмотрим интегралы вида $\int \frac{ax+b}{px^2+qx+r}dx$, $p \neq 0$. Такие задачи решаются выделением полного квадрата в знаменателе.

Задача 1. $\int \frac{dx}{x^2+4x+7} \boxed{\equiv}$

$$x^2+4x+7 = x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+7 = (x+2)^2+3$$

$$\boxed{\equiv} \int \frac{dx}{(x+2)^2+3} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{(x+2)}{\sqrt{3}}+C,\ C\in\mathbb{R}\,.$$

Заметим, что в этой задаче по ходу решения можно было бы сделать замену переменной $x+2=t$. Но это требует времени и, кроме того, потом придется делать обратную замену. Привыкайте в несложных ситуациях работать с переменной, которую мы назовем «скобка». В данном случае – это $(x+2)$.

Задача 2. $\int \frac{dx}{x^2+3x+4} \boxed{\equiv}$

$$x^2+3x+4 = x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+4 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

$$\boxed{\equiv} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = \int \frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{7}{4}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Задача 3. $\int \frac{dx}{3x^2-6x+2} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-2x+\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2-\frac{1}{3}} =$

$$= -\frac{1}{3}\int\frac{d(x-1)}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-(x-1)^2} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\ln\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-(x-1)}{\frac{1}{\sqrt{3}}+(x-1)}\right|+C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+(x-1)}{\frac{1}{\sqrt{3}}-(x-1)}\right|+C, C\in\mathbb{R}.$$

Задача 4. $\int\frac{xdx}{x^2-4x+6} = \int\frac{xdx}{(x-2)^2+2} = \int\frac{(x-2+2)d(x-2)}{(x-2)^2+2} = \|x-2=t\| = \int\frac{(t+2)dt}{t^2+2} =$

$$= \int\frac{tdt}{t^2+2}+\int\frac{2dt}{t^2+2} = \frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+2)}{(t^2+2)}+2\int\frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+2)+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+2)+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{2}}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Задача 5. $\int\frac{(2x-1)dx}{x^2+6x+11} \boxed{\equiv}$

заметим, что в ситуации, когда старший коэффициент равен единице, проще выделять полный квадрат и получать новую переменную «скобка»:

$$\boxed{\equiv}\ 2\int\frac{(x-\frac{1}{2})dx}{x^2+6x+11} = 2\int\frac{(x-\frac{1}{2})dx}{(x+3)^2+2} = 2\int\frac{(x+3-3-\frac{1}{2})d(x+3)}{(x+3)^2+2} = \|x+3=t\| =$$

$$= 2\int\frac{tdt}{t^2+2}+2\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+2} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\int\frac{d(t^2+2)}{(t^2+2)}-7\int\frac{dt}{t^2+2} =$$

$= \ln(t^2+2) - 7\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \ln(x^2+6x+11) - \frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{2}} + C,$
$C \in \mathbb{R}.$

Задачи вида $\int \frac{ax+b}{\sqrt{px^2+qx+r}}dx$, $p \neq 0$ также решаются с помощью выделения полного квадрата в подкоренном выражении.

Задача 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+5}} = \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+5}} = \|x+2=t\| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+5}} =$
$= \ln\left|t+\sqrt{t^2+5}\right| + C = \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+9}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{1}{3}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{1}{3}+\sqrt{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\ln 3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln 3 + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\ln\left|x-\frac{1}{3}+\sqrt{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}\right| + \ln 3\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln 3 + C\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+3}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Задача 8. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+4x+7}} = \int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{(x+2)^2+3}} = \int \frac{(x+2-2+3)d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+3}} =$
$= \int \frac{(x+2)d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+3}} + \int \frac{(-2+3)d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+3}} = \|x+2=t\| = \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+3}} - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+3}} =$
$= \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+3)}{\sqrt{t^2+3}} - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+3}} = \sqrt{t^2+3} + \ln\left|t+\sqrt{t^2+3}\right| + C =$
$= \sqrt{x^2+4x+7} + \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+7}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+2x-1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-((x+1)^2-2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}} =$
$= \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{2-(x+1)^2}} = \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{3}{2}x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-\frac{3}{2}x-1\right)}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\left(x-\frac{3}{4}\right)\cdot 4}{5} + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Задача 11. $\int\frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}=\int\frac{(8x-11)dx}{\sqrt{-((x-1)^2-1-5)}}=\int\frac{(8x-11)dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}}=8\int\frac{(x-\frac{11}{8})dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}}=$

$=8\int\frac{(x-1+1-\frac{11}{8})d(x-1)}{\sqrt{6-(x-1)^2}}=8\int\frac{(x-1)d(x-1)}{\sqrt{6-(x-1)^2}}+8\int\frac{(1-\frac{11}{8})d(x-1)}{\sqrt{6-(x-1)^2}}=\|x-1=t\|=$

$=8\int\frac{tdt}{\sqrt{6-t^2}}-3\int\frac{dt}{\sqrt{6-t^2}}=8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int\frac{d(6-t^2)}{\sqrt{6-t^2}}-3\int\frac{dt}{\sqrt{6-t^2}}=$

$=-8\sqrt{6-t^2}-3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}}+C=-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C,\ C\in\mathbb{R}.$

Интегрирование рациональных функций

Будем называть *рациональной функцией* (или рациональной дробью) несократимую дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно.

Если $m<n$, то рациональная дробь называется *правильной*, в противном случае – *неправильной*. Если рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ является неправильной, то делением числителя на знаменатель она может быть представлена в виде суммы

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=S_{n-m}(x)+\frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$

в которой $S_{n-m}(x)-$ многочлен степени $m-n$, $R_k(x)-$ многочлен, степень которого меньше m. Таким образом, неправильная рациональная дробь может всегда быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

В курсе алгебры доказывается, что всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы конечного числа дробей следующих четырех типов (часто называемых *простейшими*):

I. $\frac{A}{x-a},$

II. $\frac{A}{(x-a)^\alpha},(\alpha=2,3,4\ldots),$

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q},$

IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta}, (\beta = 2{,}3{,}4\dots),$

где $A, M, N, a. p, q \in \mathbb{R}$ и $\frac{p^2}{4} - q < 0$, то есть трехчлен $x^2 + px + q$ не раскладывается на линейные множители.

Теорема. ***Интегралы от дробей типа I, II выражаются в виде линейной комбинации логарифмической и рациональной функций. Интегралы от дробей типа III, IV выражаются в виде линейной комбинации рациональной, логарифмической функций и арктангенса. Поэтому интеграл от рациональной функции можно представить в виде линейной комбинации рациональной, логарифмической функций и арктангенса.***

Задача 12. $\int \frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} dx \ \boxed{\equiv}$

$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} \equiv \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2} \equiv \frac{(a+b)x+(2a-3b)}{(x-3)(x+2)}$.

Два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ одновременно равны все их соответствующие коэффициенты:

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ 2a - 3b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 25 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases}$$

$\boxed{\equiv} \int \left(\frac{5}{x-3} + \frac{2}{x+2}\right) dx = 5\int \frac{d(x-3)}{x-3} + 2\int \frac{d(x+2)}{x+2} = 5\ln|x-3| + 2\ln|x+2| + C,$ $C \in \mathbb{R}.$

Задача 13. $\int \frac{xdx}{x^2-4x-5} = \int \frac{xdx}{(x-5)(x+1)} \ \boxed{\equiv}$

$\frac{x}{(x-5)(x+1)} \equiv \frac{a}{x-5} + \frac{b}{x+1} \equiv \frac{(a+b)x+(a-5b)}{(x-5)(x+1)}$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - 5b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{6} \\ b = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$\boxed{\equiv} \ \frac{5}{6}\int \frac{d(x-5)}{x-5} + \frac{1}{6}\int \frac{d(x+1)}{x+1} = \frac{5}{6}\ln|x-5| + \frac{1}{6}\ln|x+1| + C, \ C \in \mathbb{R}.$

Задача 14. $\int \frac{dx}{x^3-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+x+1)} \boxed{\equiv}$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} \equiv \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} \equiv \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\begin{cases} a+b \qquad\;\; = 0 \\ a-b+c = 0 \\ a \qquad\; -c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ a+b = 0 \\ a-c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{\equiv} \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx - \frac{1}{3}\int \frac{-\frac{1}{2}+2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \text{в последних} \\ \text{двух интегралах} \\ \text{введем } x+\frac{1}{2} = t \end{matrix} \right\| = \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t\cdot 2}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Задача 15. $\int \frac{(x^2-3x+2)dx}{x(x^2+2x+1)} = \int \frac{(x^2-3x+2)dx}{x(x+1)^2} \boxed{\equiv}$

$$\frac{(x^2-3x+2)}{x(x+1)^2} \equiv \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} \equiv \frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(x+1)^2}$$

$$\begin{cases} a+b \qquad\;\; = 1 \\ 2a+b+c = -3 \\ a \qquad\qquad\; = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -6 \end{cases}$$

$$\boxed{\equiv}\ 2\int \frac{dx}{x} - \int \frac{d(x+1)}{x+1} - 6\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = 2\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Задача 16. $\int \frac{(x^3+1)dx}{x^3-x^2} = \int \frac{(x^3-x^2+x^2+1)dx}{x^3-x^2} = \int \left(1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}\right)dx \boxed{\equiv}$

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} \equiv \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1} \equiv \frac{(a+c)x^2+(-a+b)x-b}{x^3-x^2}$$

$$\begin{cases} a + \quad\;\; c = 1 \\ -a + b \quad\;\; = 0 \\ \quad -b \quad\;\; = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{=} \int \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}\right) dx = x + \ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Интегрирование выражений $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$

Важным приемом интегрирования является использование таких подстановок $t = \omega(x)$, которые приводят подынтегральное выражение к рациональному виду, в результате чего интеграл вычисляется в виде функции от $t = \omega(x)$. Если при этом сама функция $\omega(x)$, которую надлежит подставить вместо t, выражается через элементарные функции, то интеграл представит собой элементарную функцию от x.

В качестве первого примера рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx,$$

где $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ $-$*рациональная функция*, т.е. отношение многочленов от двух переменных, $m -$ натуральное число, а $\alpha, \beta, \gamma, \delta -$ постоянные.

Многочленом от двух переменных называется конечная сумма одночленов вида $cx^k y^l$, где k, l – неотрицательные целые числа,$c \in \mathbb{R}$.

Положим

$$t = \omega(x) = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\ t^m = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, x = \varphi(t) = \frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}\ .$$

При такой замене интеграл перейдет в

$$\int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)dt\ .$$

Здесь подынтегральное выражение представляет собой рациональную функцию от t, поскольку $R(\varphi(t), t), \varphi'(t) -$ рациональные функции от t.

Вычислив этот интеграл по правилам предыдущего пункта, вернемся к старой переменной, подставив $t = \omega(x)$.

К интегралу рассмотренного вида сводятся и более общие интегралы

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^r, \dots, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^r\right) dx$$

в которых все показатели степеней $r, \dots, s$ — рациональные числа. Для этого требуется привести все эти показатели к общему знаменателю m, чтобы под знаком интеграла получить рациональную функцию от радикала $t = \omega(x) = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$.

Интегрирование тригонометрических функций

Некоторые интегралы вычисляются с помощью применения формул преобразования произведения в сумму синусов и косинусов:

Задача 16. $\int \cos x \sin 3x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin 4x \, dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx =$
$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos 2x + C = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 17. $2\int \sin 2x \sin 5x \, dx = \int \cos 3x \, dx - \int \cos 7x \, dx =$
$= \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{7}\sin 7x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 18. $4\int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx = 2\int (\cos 3x + \cos x)\cos 3x \, dx =$
$= 2\int \cos^2 3x \, dx + 2\int \cos x \cos 3x \, dx =$
$= \int (1 + \cos 6x) dx + \int (\cos 4x + \cos 2x) dx =$
$= x + \frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 19. $2\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)\, dx = \int \cos 2ax \, dx + \int \cos 2b \, dx \ \boxed{=}$

1) если $a \neq 0$, то
   $\boxed{=}\ \frac{1}{2a}\sin 2ax + \cos 2b \cdot x + C,\ C \in \mathbb{R},$
2) если $a = 0$, то
   $\boxed{=}\ x + \cos 2b \cdot x + C = (1 + \cos 2b)x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Рассмотрим интегралы вида $\int \sin^m x \cos^{2n+1} x \, dx$ и $\int \sin^{2m+1} x \cos^n x \, dx$.

Задача 20. $\int \sin^3 x\,dx = \int \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} \underbrace{\sin x\,dx}_{-d\cos x} = -\int (1-\cos^2 x)d\cos x =$
$= -\left(\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right) + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$

Задача 21. $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x\,dx =$
$= \int \sin^2 x \cos^2 x\,d\sin x = \int \sin^2 x\,(1-\sin^2 x)\,d\sin x =$
$= \int (\sin^2 x - \sin^4 x)d\sin x = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$

Задача 22. $\int \underbrace{\sin^3 x}_{(!)} \cos^9 x\,dx = \int \sin^2 x \sin x \cos^9 x\,dx =$
$= -\int \sin^2 x \cos^9 x\,d\cos x = -\int (1-\cos^2 x)\cos^9 x\,d\cos x =$
$= -\int (\cos^9 x - \cos^{11} x)d\cos x = -\frac{\cos^{10} x}{10} + \frac{\cos^{12} x}{12} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$

Задача 23. $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^7 x} = \int \frac{2\sin x \cos x dx}{\cos^7 x} = -2\int \frac{\cos x d\cos x}{\cos^7 x} = -2\int \frac{d\cos x}{\cos^6 x} =$
$= -2\frac{\cos^{-5} x}{-5} + C = \frac{2}{5\cos^5 x} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$

Задача 24. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^4 x \sin x dx}{\cos^3 x} = -\int \frac{\sin^4 x d\cos x}{\cos^3 x} = -\int \frac{(\sin^2 x)^2 d\cos x}{\cos^3 x} =$
$= -\int \frac{(1-\cos^2 x)^2 d\cos x}{\cos^3 x} = -\int \frac{(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)d\cos x}{\cos^3 x} =$
$= \int \left(-\cos^{-3} x + 2\frac{1}{\cos x} - \cos x\right) d\cos x = -\frac{\cos^{-2} x}{-2} + 2\ln|\cos x| - \frac{\cos^2 x}{2} + C =$
$= \frac{1}{2\cos^2 x} + 2\ln|\cos x| - \frac{\cos^2 x}{2} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$

Использование формул понижения степени:

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \ \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, -$

позволяет вычислять интегралы вида $\int \sin^{2n} x \cos^{2m} x\,dx, \quad n, m \geq 0.$

Задача 25. $\int \sin^6 x\,dx = \int (\sin^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx =$
$= \frac{1}{8}\int (1-3\cos 2x)dx + \frac{3}{8}\int \cos^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx =$
$= \frac{1}{8}\int (1-3\cos 2x)dx + \frac{3}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x \cos 2x\,dx =$
$= \frac{1}{8}\left(x - 3\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right) + \frac{3}{16}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int \cos^2 2x\,d\sin 2x =$
$= \frac{5}{16}x - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{16}\int (1-\sin^2 2x)d\sin 2x =$
$= \frac{5}{16}x - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{16}\left(\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3}\right) + C =$
$= \frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{\sin^3 2x}{48} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$

Замечание. Использование разных формул понижения степени будет приводить к записи ответа в разных видах.

Задача 26. $\int \cos^2 x \sin^4 x\, dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \sin^2 x\, dx =$
$= \int \sin^2 x\, (\sin x \cos x)^2 dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 dx =$
$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x) \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) dx =$
$= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 2x - \cos 4x + \cos 2x \cos 4x) dx =$
$= \frac{1}{16} \int \left(1 - \cos 2x - \cos 4x + \frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx =$
$= \frac{1}{16} \int \left(1 - \frac{1}{2}\cos 2x - \cos 4x + \frac{1}{2}\cos 6x\right) dx =$
$= \frac{1}{16} \left(x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\sin 6x\right) + C =$
$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{192}\sin 6x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Основное тригонометрическое тождество и следствия из него

$$\cos^2 x + \sin^2 x \equiv 1 \ \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 \equiv \frac{1}{\cos^2 x}, \ \ \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} + 1 \equiv \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x \equiv \frac{1}{\sin^2 x}, \ \ 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \equiv \frac{1}{\sin^2 x},$$

а также дифференциалы

$$\frac{1}{\cos^2 x} dx = d \operatorname{tg} x, \qquad \frac{1}{\sin^2 x} = -d \operatorname{ctg} x$$

позволяют вычислить следующие интегралы.

Задача 27. $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \frac{1}{\sin^2 x} d \operatorname{ctg} x =$
$= -\int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) d \operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 28. $\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{1}{\cos^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 d \operatorname{tg} x =$
$= \int (\operatorname{tg}^2 x + 1)^2 d \operatorname{tg} x = \int (\operatorname{tg}^4 x + 2 \operatorname{tg}^2 x + 1) d \operatorname{tg} x =$
$= \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 29. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} d \operatorname{ctg} x =$
$= -\int \frac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x} \cdot (1 + \operatorname{ctg}^2 x) d \operatorname{ctg} x = -\int \frac{1+2\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^4 x}{\operatorname{ctg}^2 x} d \operatorname{ctg} x =$
$= -\int (\operatorname{ctg}^{-2} x + 2 + \operatorname{ctg}^2 x) d \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} - 2 \operatorname{ctg} x + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Следующую задачу можно решать аналогично, но можно сначала применить формулу $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$ понижения степени. Эта формула хороша тем, что, понижая степень, не приводит к появлению сумм в знаменателе.

Задача 30. $\int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^4 x} = \int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^4} = \int \frac{16dx}{\sin^4 2x} = 8\int \frac{1}{\sin^2 2x} \cdot \frac{1}{\sin^2 2x} d2x =$

$= -8 \cdot \int (1+\operatorname{ctg}^2 2x) d \operatorname{ctg} 2x = -8 \operatorname{ctg} 2x - \frac{8 \operatorname{ctg}^3 x}{3} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

При интегрировании рациональных функций относительно $\sin x$ и $\cos x$ используются формулы универсальной тригонометрической подстановки. Если при этом положить $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, то получим, что $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ и $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Задача 31. $\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \left\| \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \right\| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3(1+t^2)-5(1-t^2)} =$

$= \int \frac{2dt}{3+3t^2-5-5t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 32. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x} \boxed{\equiv}$

так как дробь под знаком интеграла является «неправильной относительно $\cos x$», сначала сделаем следующее преобразование:

$\boxed{\equiv} \int \frac{(\cos x+1-1)dx}{1+\cos x} = \int \left(1 - \frac{1}{1+\cos x}\right) dx = \left\| \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \right\| = x - \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$

$= x - \int \frac{2dt}{1+t^2+1-t^2} = x - \int dt = x - t + C = x - \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Если не сообразить сделать такое преобразование, то можно столкнуться с «проблемой», которую полезно обсудить:

$\boxed{\equiv} \left\| \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \right\| = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2(1-t^2)dt}{(1+t^2)^2+(1-t^2)(1+t^2)} = \int \frac{2(1-t^2)dt}{1+2t^2+t^4+1-t^4} =$

$= \int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt = -\int \frac{t^2-1}{t^2+1} dt = -\int \frac{t^2+1-1-1}{t^2+1} dt = -\int dt + 2\int \frac{dt}{1+t^2} =$

$= -t + 2\operatorname{arctg} t + C = -\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C =$

$= -\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\left(\frac{x}{2} + \pi n\right) + C = -\operatorname{tg}\frac{x}{2} + x + \underbrace{2\pi n + C}_{=C_1} = -\operatorname{tg}\frac{x}{2} + x + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$

Задача 33. $\int \frac{1+\cos x}{1+\sin x} dx = \left\| \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \right\| = \int \frac{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2+2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$

$= \int \frac{4}{(t+1)^2(1+t^2)} \boxed{\equiv}$

$\frac{4dt}{(t+1)^2(1+t^2)} \equiv \frac{a}{t+1} + \frac{b}{(t+1)^2} + \frac{ct+d}{1+t^2} \equiv \frac{(a+c)t^3+(a+b+2c+d)t^2+(a+c+2d)t+(a+b+d)}{(t+1)^2(1+t^2)}$

$$\begin{cases} a \qquad\quad + c \qquad\;\, = 0 \\ a + b + 2c + d = 0 \\ a \qquad\;\; + c + 2d = 0 \\ a + b \qquad\quad + d = 4 \end{cases}$$

Решив эту систему методом Гаусса или методом Крамера (или, увидев, что вычитание четвертой строки из второй позволяет сразу найти $c = -2$, затем из первой строки найти $a = 2$ и т.д.), получим

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = -2 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\int \left(\frac{2dt}{t+1} + \frac{2dt}{(t+1)^2} - \frac{2t}{1+t^2}\right) dt = 2\int \frac{d(t+1)}{t+1} + 2\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2} - \int \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} =$$

$$= 2\ln|t+1| - \frac{2}{t+1} - \ln|t^2+1| + C =$$

$$= 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right| - \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1} - \ln\left|\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2 + 1\right| + C,\; C \in \mathbb{R}.$$

Замечание. Увидев рациональную относительно $\sin x$ и $\cos x$ функцию, не спешите использовать универсальную тригонометрическую подстановку (она приводит к непростым интегралам относительно рациональных функций, повышая степень выражений), как, например, в следующей задаче:

Задача 34. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 5} = \int \frac{d\sin x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5} = \|\sin x = t\| = \int \frac{dt}{t^2 - 6t + 5} =$

$$= \int \frac{dt}{(t-3)^2 - 4} = \int \frac{d(t-3)}{(t-3)^2 - 2^2} = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-3-2}{t-3+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x - 5}{\sin x - 1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{5-\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{5-\sin x}{1-\sin x}\right) + C,\; C \in \mathbb{R}.$$