МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ

ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ МГУ

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ, ЧАСТЬ 1

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2023

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке показаны приёмы интегрирования подведением под знак дифференциала, интегрирования по частям и получения уравнения относительно интеграла.

Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования

Определение. $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$ на некотором промежутке, если $F(x)$ непрерывна на этом промежутке, дифференцируема в каждой внутренней точке промежутка, причем, $F'(x) = f(x)$.

Определение. Совокупность (множество) всех первообразных функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$, то есть

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – произвольная действительная постоянная ($C \in \mathbb{R}$), а $F(x)$ – некоторая первообразная.

Свойства неопределенного интеграла

1) $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2) $\int f'(x)dx = f(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$
3) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \quad a \neq 0$
4) $\int(f(x) \pm \varphi(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx.$

Таблица интегралов

Использовав формулы для производных элементарных функций, получим следующую таблицу:

1) $\int 0 \cdot dx = C,\ C \in \mathbb{R}$
2) $\int 1 \cdot dx = x + C,\ C \in \mathbb{R}$
3) $\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \mu \neq -1,\ C \in \mathbb{R}$

   в частности, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C,\ C \in \mathbb{R}$
4) $\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x + C_1, & \text{если } x > 0,\ C_1 \in \mathbb{R} \\ \ln(-x) + C_2, & \text{если } x < 0,\ C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Эти формулы часто соединяют в одну: $\ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$. При этом следует иметь в виду, что множество, на котором определена функция $f(x) = \frac{1}{x}$, состоит из двух промежутков, задаваемых неравенствами $x > 0$ и $x < 0$, соответственно. На каждом из этих промежутков постоянную можно выбирать независимо, что и отражено в формуле 4. Так что формулу $\ln|x| + C$ не следует понимать так, что к функции $\ln|x|$ прибавляется одна и та же постоянная C как при $x > 0$, так и при $x < 0$. Еще раз повторим – точный смысл дан равенством 4.

Это же замечание можно сделать для формулы (3) при $\mu < 0$ и таком, что x^μ определена как при $x > 0$, так и при $x < 0$.

5) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,\ C \in \mathbb{R}$

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C,\ C \in \mathbb{R}$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C,\quad C \in \mathbb{R}$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C,\ C \in \mathbb{R}$

7) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, в частности, $\int e^x dx = e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$

8) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C,\ C \in \mathbb{R}$

9) $\int \cos x\, dx = \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}$

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,\ C \in \mathbb{R}$

точнее говоря, так как функция определена на бесконечном множестве промежутков $\pi n < x < \pi(n+1), n \in Z$, для каждого n следует выбирать свою постоянную C_n (так же, как это было сделано в пункте 4).

11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,\ C \in \mathbb{R}$

разумеется, замечание, аналогичное сделанному в пункте 10, справедливо и здесь.

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{a+x^2}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}$

13) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}$

Рассмотрим несколько простых примеров (табличные интегралы и интегралы, которые легко сводятся к табличным).

Задача 1. $\int (x^2 - 2x)\, dx = \int x^2 dx - 2\int x dx = \frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^3}{3} - x^2 + C,$

.

Замечание. Сделаем здесь практически очевидное, но важное примечание. Мы разбили этот интеграл на два интеграла и, вроде бы, нужно было бы приписать произвольную постоянную к каждой из двух первообразных. Однако множество значений, принимаемых разностью (или суммой) произвольных постоянных совпадает со всем множеством действительных чисел, т.е. со множеством значений произвольной постоянной $C \in \mathbb{R}$. Это и отражают написанные здесь и далее формулы. Запишем это замечание в виде формулы

$$\int (f(x) \pm \varphi(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx =$$

$$= F(x) + C_1 \pm (\Phi(x) + C_2) = F(x) \pm \Phi(x) + (C_1 \pm C_2) = F(x) \pm \Phi(x) + C,$$

$C_1, C_2, C \in \mathbb{R}$, так как сумма или разность произвольных постоянных является произвольной постоянной.

Задача 2. $\int (x^6 + 3\sin x)\, dx = \frac{x^7}{7} + 3(-\cos x) + C = \frac{x^7}{7} - 3\cos x + C, C \in \mathbb{R}$.

Задача 3. $\int \left(e^x + 5\cos x + \frac{1}{x}\right) dx = e^x + 5\sin x + \ln|x| + C,\ \ C \in \mathbb{R}$.

Замечание. Здесь и далее в подобных примерах мы рассматриваем подынтегральную функцию на нескольких промежутках, в данном примере — на двух промежутках, $x < 0$ и $x > 0$. На каждом из них мы получаем сумму трёх произвольных постоянных, т.е. снова произвольную постоянную. Поэтому в данном примере $C \in \mathbb{R}$ обозначает C_1, если $x > 0$ и C_2, если $x < 0$. Это замечание относится и ко всем остальным задачам.

Задача 4. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x} + 3^x\right) dx = \int \left(x^{-2} + x^{\frac{1}{2}} + 3^x\right) dx =$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + \frac{3^x}{\ln 3} + C = -\frac{1}{x} + \frac{2}{3} \cdot x\sqrt{x} + \frac{3^x}{\ln 3} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Замечание. Полезно включить в табличные интегралы (запомнить!)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Замечание. Обратите внимание, что среди свойств интеграла нет преобразования интеграла от произведения и частного двух функций. Поэтому часто бывает полезно перейти от произведения или частного функций к сумме (если, конечно, это возможно).

Задача 5. $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - x + \sqrt{x} + x - \sqrt{x} + 1\right) dx =$

$$= \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 1\right) dx = \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} + x + C = \frac{2}{5} \cdot x^2\sqrt{x} + x + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Задача 6. $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx = \int \left(x^{-\frac{5}{2}} - e^x + \frac{1}{x}\right) dx = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{3}{2}} - e^x + \ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Задача 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

$\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

$\int \frac{dx}{7+x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{7})^2 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 7. $\int 3\cos^2\frac{x}{2}\,dx = 3\int \frac{1+\cos x}{2}\,dx = \frac{3}{2}(x + \sin x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 8. $\int 5\operatorname{ctg}^2 x\,dx = 5\int \frac{(\cos x)^2}{(\sin x)^2}\,dx = 5\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = 5\int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx =$

$= -5\operatorname{ctg} x - 5x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 9. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\,dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx =$

$= -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\,dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx =$

$= -\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Общие методы интегрирования

1. Подведение под знак дифференциала

Дифференциал функции $df(x) = f'(x)dx$. Но тогда от правой части равенства можно перейти к левой, то есть $f'(x)dx = df(x)$. Основная идея подведения под знак дифференциала заключается в осуществлении следующих преобразований (которые надо сообразить сделать!):

$$\int \Phi(x)dx = \int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx = \int f\big(\varphi(x)\big)d\varphi(x) = F\big(\varphi(x)\big) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что при $a \neq 0$

$$d(ax+b) = (ax+b)'dx = a dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{dx = \frac{1}{a}\ d(ax+b)}$$

Задача 1. $\int \sin 3x\,dx = \int \sin 3x\left(\frac{1}{3}d(3x)\right) = \frac{1}{3}\int \sin(3x)\,d(3x) =$
$= -\frac{1}{3}\cos 3x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 2. $\int \cos(2x+1)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(2x+1)\,d(2x+1) = \frac{1}{2}\sin(2x+1) + C,$
$C \in \mathbb{R}.$

Задача 3. $\int e^{-5x+3}dx = -\frac{1}{5}\int e^{-5x+3}d(-5x+3) = e^{-5x+3} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 4. $\int(2x+1)^5dx = \frac{1}{2}\int(2x+1)^5d(2x+1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^6}{6} + C =$
$= \frac{(2x+1)^6}{12} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 5. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x+2}}dx = \frac{1}{4}\int\frac{d(4x+2)}{\sqrt{4x+2}} = \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{4x+2} + C = \frac{1}{2}\sqrt{4x+2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 6. $\int\frac{dx}{\sin^2(3x-4)} = \frac{1}{3}\int\frac{d(3x-4)}{\sin^2(3x-4)} = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(3x-4) + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 7. $\int\frac{dx}{2-8x} = -\frac{1}{8}\int\frac{d(2x-8)}{2-8x} = -\frac{1}{8}\ln|2-8x| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Заметим, что можно получить обобщение предыдущей формулы:

$$df(x) = f'(x)dx,\ \ d(af(x)+b) = af'(x)dx \Rightarrow \boxed{df(x) = \frac{1}{a}d(af(x)+b)}.$$

Кроме того, легко получить, что

$d\sin x = \cos x\, dx \Rightarrow \boxed{\cos x\, dx = d\sin x}$

$d\cos x = -\sin x\, dx \Rightarrow \boxed{\sin x\, dx = -d\cos x}$

$dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}dx \Rightarrow \boxed{x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha}dx^\alpha},\ \ \alpha \neq 0$

$d\ln x = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x}dx = d\ln x}$ и другие формулы.

Задача 8. $\int\operatorname{ctg} x\, dx = \int\frac{\cos x}{\sin x}dx = \int\frac{\cos x dx}{\sin x} = \int\frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 9. $\int\frac{\cos x dx}{2\sin x+1} = \int\frac{d\sin x}{2\sin x+1} = \frac{1}{2}\int\frac{d\,(2\sin x+1)}{2\sin x+1} = \frac{1}{2}\ln|2\sin x+1| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 10. $\int\frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = \int\cos^{-3}x\sin x\, dx = -\int\cos^{-3}x\, d\cos x =$
$= -\left(-\frac{1}{2}\right)\cos^{-2}x + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 11. $\int\sin^4 3x\cos 3x\, dx \boxed{=}$

заметим, что $d\sin 3x = (\sin 3x)'dx = \cos 3x\cdot 3dx \Rightarrow \cos 3x\, dx = \frac{1}{3}d\sin 3x,$ поэтому

$\boxed{=} \frac{1}{3}\int\sin^4 3x d\sin 3x = \frac{1}{3}\frac{\sin^5 3x}{5} + C = \frac{\sin^5 3x}{15} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 12. $\int e^{-5x^3+2}x^2dx = \frac{1}{3}\int e^{-5x^3+2}dx^3 =$
$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)\int e^{-5x^3+2}d(-5x^3+2) = -\frac{1}{15}e^{-5x^3+2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 13. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \boxed{=}$

заметим, что $d\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\sqrt{x}}$, поэтому

$\boxed{=}\ 2\int e^{\sqrt{x}}d\sqrt{x} = 2e^{\sqrt{x}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 14. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1+2x^3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx^3}{\sqrt[3]{1+2x^3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{d(1+2x^3)}{\sqrt[3]{1+2x^3}} =$

$= \frac{1}{6}\int (1+2x^3)^{-\frac{1}{3}}d(1+2x^3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}(1+2x^3)^{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{4}(1+2x^3)^{\frac{2}{3}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 15. $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}dx = \int \ln x\, d\ln x = \frac{1}{2}\ln^2 x + C,\ C \in \mathbb{R},$

так как $d\ln x = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x}dx = d\ln x}$.

Задача 16. $\int \frac{e^x dx}{3-4e^x} = \int \frac{de^x}{3-4e^x} = -\frac{1}{4}\int \frac{d(3-4e^x)}{3-4e^x} = -\frac{1}{4}\ln|3-4e^x| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 17. $\int \frac{e^{5x+2}dx}{1-3e^{5x+2}} = \frac{1}{5}\int \frac{de^{5x+2}}{1-3e^{5x+2}} = \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\int \frac{d\left(1-3e^{5x+2}\right)}{1-3e^{5x+2}} =$

$= -\frac{1}{15}\ln|1-3e^{5x+2}| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 18. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2} = \int e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}dx = -\int e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x} = -e^{\frac{1}{x}} + C,\ C \in \mathbb{R},$

так как $d\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}dx \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x^2}dx = -d\frac{1}{x}}$.

Задача 19. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = \int \sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx = \int \sin(\ln x)\, d\ln x =$

$= -\cos\ln x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 20. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx = \int \sqrt{\arcsin x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \sqrt{\arcsin x}\, d\arcsin x =$

$= \int (\arcsin x)^{\frac{1}{2}}d\arcsin x = \frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 21. $\int \frac{5+3\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}dx = \int (5+3\,\mathrm{arctg}\,x)\cdot\frac{1}{1+x^2}dx =$

$= \int (5+3\,\mathrm{arctg}\,x)d(\mathrm{arctg}\,x) = \frac{1}{3}\int (5+3\,\mathrm{arctg}\,x)d(5+3\,\mathrm{arctg}\,x) =$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(5+3\,\mathrm{arctg}\,x)^2 + C = \frac{1}{6}(5+3\,\mathrm{arctg}\,x)^2 + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Важное замечание. Подведение под знак дифференциала является одним из важнейших навыков в интегрировании. Чтобы овладеть им, нужно самостоятельно решить много задач.

Пусть $P_n(x)$ – многочлен степени n, а $Q_m(x)$ – многочлен степени m. Введем следующие определения.

Определение. Дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется ***правильной,*** если степень числителя меньше степени знаменателя.

Определение. Дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется ***неправильной,*** если степень числителя не меньше (то есть больше либо равна) степени знаменателя.

Замечание. Неправильную дробь можно записать в виде «многочлен + правильная дробь» (выделив целую часть с помощью, например, «деления столбиком»).

Задача 22. $\int \frac{2x+3}{x-1}dx = 2\int \frac{x+\frac{3}{2}}{x-1}dx = 2\int \frac{(x-1)+\left(1+\frac{3}{2}\right)}{x-1}dx = 2\int \left(1+\frac{\frac{5}{2}}{x-1}\right)dx =$
$= 2\int dx + 2\cdot\frac{5}{2}\int \frac{1}{x-1}dx = 2x + 5\int \frac{1}{x-1}d(x-1) = 2x + \ln|x-1| + C,\ C\in\mathbb{R}.$

Задача 23. $\int \frac{x^2-2x}{x+1}dx \boxed{=}$

поделив «столбиком» x^2-2x на $x+1$, получаем

$\boxed{=} \int \left(x-3+\frac{3}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 3\ln|x+1| + C,\ C\in\mathbb{R}.$

Задача 24. $\int \frac{3x+1}{2+5x^2}dx = 3\int \frac{xdx}{2+5x^2} + \int \frac{dx}{2+5x^2} = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int \frac{d(2+5x^2)}{2+5x^2} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\frac{2}{5}+x^2} =$
$= \frac{3}{10}\int \frac{d(2+5x^2)}{2+5x^2} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2+x^2} = \frac{3}{10}\ln|2+5x^2| + \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{2}} + C =$
$= \frac{3}{10}\ln(2+5x^2) + \frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{2}} + C,\ C\in\mathbb{R}.$

Задача 25. $\int \frac{dx}{2^x+3} = \int \frac{2^x dx}{2^x(2^x+3)} \boxed{=}$

Заметим, что $d2^x = 2^x\ln 2\, dx \ \Rightarrow \boxed{2^x dx = \frac{d2^x}{\ln 2}}$, поэтому

$\boxed{=} \frac{1}{\ln 2}\int \frac{d2^x}{2^x(2^x+3)}$.

Обратите внимание на то, что до сих пор мы не делали замену переменной в неопределенных интегралах, сводя их к интегралам от какого-то простого выражения, зависящего от переменной x. Но когда выражения становятся сложнее, замена переменной становится оправданной. Обозначим $2^x = t$, тогда интеграл перепишется в виде

$\boxed{=} \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{t(t+3)} = \frac{1}{3\ln 2}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+3}\right)dt = \frac{1}{3\ln 2}(\ln|t| - \ln|t+3|) + C =$
$= \frac{1}{3\ln 2}\ln\left|\frac{t}{t+3}\right| + C = \frac{1}{3\ln 2}\ln\frac{2^x}{2^x+3} + C,\ C\in\mathbb{R}.$

2. Интегрирование по частям

$$\int F(x)dx = \int u(x)v'(x)dx = \boxed{\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)} =$$
$$= u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Задача 25. $\int \underbrace{\ln x}_{u}\, d\underbrace{x}_{v} = \ln x \cdot x - \int x d\ln x = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx =$
$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 26. $\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u}\, d\underbrace{x}_{v} = \operatorname{arctg} x \cdot x - \int x d\operatorname{arctg} x = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$
$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 27. $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin x}_{v'}\, dx = -\int \underbrace{x}_{u}\, d\underbrace{\cos x}_{v} = -x\cos x + \int \cos x\, dx =$
$= -x\cos x + \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 27. Иногда интегрирование по частям приходится проводить несколько раз:

$\int \underbrace{(3x^2+x)}_{u}\underbrace{\cos x}_{v'}\, dx = \int (3x^2+x)d\sin x =$
$= (3x^2+x)\sin x - \int \sin x\, d(3x^2+x) =$
$= (3x^2+x)\sin x - \int \sin x\,(6x+1)dx =$
$= (3x^2+x)\sin x - \int \underbrace{(6x+1)}_{u}\underbrace{\sin x}_{v'}\, dx =$

$= (3x^2+x)\sin x + \int (6x+1)d\cos x =$
$= (3x^2+x)\sin x + (6x+1)\cos x - \int \cos x\, d(6x+1) =$
$= (3x^2+x)\sin x + (6x+1)\cos x - 6\int \cos x\, dx =$
$= (3x^2+x)\sin x + (6x+1)\cos x - 6\sin x + C =$
$= (3x^2+x-6)\sin x + (6x+1)\cos x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 28. $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{2x+5}}_{v'}\, dx = \frac{1}{2}\int x de^{2x+5} = \frac{1}{2}xe^{2x+5} - \frac{1}{2}\int e^{2x+5}dx =$
$= \frac{1}{2}xe^{2x+5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x+5} + C = \frac{1}{2}xe^{2x+5} - \frac{1}{4}e^{2x+5} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 29. $\int \underbrace{x}_{v'}\underbrace{\ln(x-1)}_{u}\, dx = \frac{1}{2}\int \ln(x-1)\, dx^2 =$

$= \frac{1}{2}\ln(x-1)\cdot x^2 - \frac{1}{2}\int x^2 d\ln(x-1) = \frac{x^2}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{x-1} =$
$= \frac{x^2}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2-1+1)dx}{x-1} = \frac{x^2}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx =$

$= \frac{x^2}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|\right) + C =$
$= \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1) - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 30. $\int \underbrace{x}_{v'} \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u}\, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{arctg} x\, dx^2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x \cdot x^2 - \frac{1}{2}\int x^2 d\operatorname{arctg} x =$
$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1-1)dx}{1+x^2} =$
$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) + C =$
$= \frac{1}{2}(x^2\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x - x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 31. $\int \ln^2 x\, dx = \ln^2 x \cdot x - \int x d\ln^2 x = x\ln^2 x - \int x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx =$
$= x\ln^2 x - 2\int \ln x\, dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2\int x d\ln x =$
$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2\int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 32. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x} = \int x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int x d\operatorname{ctg} x = -x\operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg} x\, dx =$
$= -x\operatorname{ctg} x + \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = -x\operatorname{ctg} x + \int \frac{d\sin x}{\sin x} = -x\operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 33. $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx =$
$= x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int x d\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) =$
$= x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int x \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) dx =$
$= x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int x \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} dx = x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} =$
$= x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 34. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx = \int \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = 2\int \arcsin x\, d\sqrt{x+1} =$
$= 2\arcsin x \cdot \sqrt{x+1} - 2\int \sqrt{x+1} d\arcsin x =$
$= 2\arcsin x \cdot \sqrt{x+1} - 2\int \sqrt{x+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \boxed{=}$

Так как областью определения функции $\arcsin x$ является отрезок $[-1; 1]$, то будет справедлив переход

$\boxed{=}\ 2\sqrt{x+1}\arcsin x - 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = 2\sqrt{x+1}\arcsin x + 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x}} d(1-x) =$
$= 2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Уравнения относительно интеграла

Задача 35. $\boxed{\int e^x \sin x\,dx} = \int \sin x\,de^x = e^x \sin x - \int e^x d\sin x =$
$= e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int \cos x\,de^x =$
$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d\cos x = \boxed{e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx}$

Уравнение, содержащее выражения «в рамочках», позволяет вычислить искомый интеграл:

$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx$
$2\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x + C,\ C \in \mathbb{R}.$
$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Заметим, что каждый из интегралов $\int e^x \sin x\,dx$ в уравнении относительно этого интеграла содержит свою (!) произвольную постоянную: C_1 и C_2 соответственно. Но $C_1 \pm C_2 = C,\ C \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{\int f(x)dx}_{F(x)+C_1} = \varphi(x) - \underbrace{\int f(x)dx}_{F(x)+C_2}.$$

Задача 36. $\boxed{\int \cos(\ln x)\,dx} = \cos(\ln x)\cdot x - \int x d\cos(\ln x) =$
$= x\cos(\ln x) + \int x \sin(\ln x)\cdot \frac{1}{x}dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx$
$= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int x d\sin(\ln x) =$
$= \boxed{x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx}.$

Уравнение, содержащее выражения «в рамочках», позволяет вычислить искомый интеграл:

$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$
$2\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$
$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}(x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)) + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Рассмотрим 3 интеграла:

1) $\int \sqrt{x^2 - a^2}dx$
2) $\int \sqrt{x^2 + a^2}dx$
3) $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx.$

Эти интегралы можно вычислять по-разному (с помощью различных подстановок), а можно – одинаково (с помощью получения уравнения относительно интеграла). Рассмотрим, например, первый из них.

Задача 37. $\boxed{\int \sqrt{x^2-a^2}dx} = x\sqrt{x^2-a^2} - \int x d\sqrt{x^2-a^2} =$

$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int x \frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}} dx = x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} dx =$

$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = x\sqrt{x^2-a^2} - \boxed{\int \sqrt{x^2-a^2}dx} - \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}} dx =$

$= x\sqrt{x^2-a^2} - \boxed{\int \sqrt{x^2-a^2}dx} - a^2 \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$

$\Rightarrow \boxed{\int \sqrt{x^2-a^2}dx} = x\sqrt{x^2-a^2} - \boxed{\int \sqrt{x^2-a^2}dx} - a^2 \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$

$2\int \sqrt{x^2-a^2}dx = x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Замена переменной. Подстановка

Задача 38. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} \boxed{=}$

Сделаем замену переменной: $\sqrt{x+1} = t$. Тогда $x+1 = t^2,\ dx = 2tdt$ и

$\boxed{=} \int \frac{(t^2-1)}{t} \cdot 2tdt = 2\int (t^2-1)dt = \frac{2}{3}t^3 - 2t + C =$

$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 2\sqrt{x+1} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 39. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx \boxed{=}$

Сделаем замену переменной: $\sqrt[6]{x+1} = t$. Тогда $x+1 = t^6,\ dx = 6t^5dt$ и

$\boxed{=} \int \frac{(t^6-1)+t^2}{t^3} \cdot 6t^5dt = 6\int (t^6-1+t^2)t^2dt = 6\int (t^8-t^2+t^4)dt =$

$= 6\left(\frac{t^9}{9} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right) + C = \frac{2}{3}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^9 + \frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^5 - 2\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3 + C =$

$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + \frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^5 - 2\sqrt{x+1} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 40. $\int \frac{dx}{e^x+1} \boxed{=}$

Сделаем подстановку: $x = -\ln t$. Тогда $dx = -\frac{1}{t}dt,\ e^x = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}$ и

$\boxed{=} \int \frac{-\frac{1}{t}dt}{\frac{1}{t}+1} = -\int \frac{dt}{1+t} = -\int \frac{d(1+t)}{1+t} = -\ln|1+t| = -\ln(1+e^{-x}) + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 41. Рассмотрим третью из предложенных задач с корнями под знаком интеграла: $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$. Будем считать $a > 0$. Сделаем тригонометрическую подстановку $x = a\sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $dx = a\cos t\,dt,\ t = \arcsin\frac{x}{a}$ и

$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\, a\cos t\,dt = a^2\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt =$

$= a^2\int \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt = a^2\int |\cos t|\cos t\,dt \boxed{=}$

так как $\cos t \geq 0$ при $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$\boxed{=}\ a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C =$$
$$= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \sin 2\arcsin \frac{x}{a} + C =$$
$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \cdot 2 \sin \arcsin \frac{x}{a} \cos \arcsin \frac{x}{a} + C =$$
$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Задача 42. Найти $\int x(1-x)^n dx,\ \ n > 0,\ \ x \leq 1.$

Положим $t = 1 - x$, тогда $x = 1 - t$ и $dx = -dt$. Получим, что

$$\int x(1-x)^n dx = -\int (1-t)\, t^n dt = -\frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{t^{n+2}}{n+2} + C =$$
$$= -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{(1-x)^{n+2}}{n+2} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$