МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ

ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ МГУ

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2023

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и
кафедрой математического анализа механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке показаны приёмы исследования функций многих переменных.

Отображения. Функции нескольких переменных

Определение. Функция $f(\overline{x})$ называется ***дифференцируемой*** в точке $\overline{a}$, если для всех $i = 1, \dots, n$ существуют постоянные числа A_i и функции $\alpha_i = \alpha_i(\Delta\bar{x}),\ \alpha_i(\Delta\bar{x}) \to 0$ при $\bar{x} \to \overline{a},\ \alpha_i(\overline{0}) = 0$, такие, что выполнено равенство $\Delta f(\overline{a}) = A_1\Delta x_1 + \dots + A_n\Delta x_n + \alpha_1(\Delta\bar{x})\Delta x_1 + \dots + \alpha_n(\Delta\bar{x})\Delta x_n$.

Введем в рассмотрение величину
$\Delta_i f(\overline{a}) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)$.

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x_i \to a_i} \frac{\Delta_i f(\overline{a})}{x_i - a_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a})$, то он называется ***частной производной*** функции $f(\overline{x})$ по переменной x_i в точке $\overline{a}$.

Теорема. Если $f(\overline{x})$ дифференцируема в точке $\overline{a}$, то для всех $i, i = 1, \dots, n$ существуют частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a})$.

Теорема. Если $f(\overline{x})$ дифференцируема в точке $\overline{a}$, то $f \in C(\overline{a})$.

Пример 1. Если функция $f(\overline{x})$ имеет частные производные в точке $\overline{a}$, то она не обязательно будет непрерывна в этой точке. Рассмотрим
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } xy = 0, \\ 1, & \text{если } xy \neq 0. \end{cases}$$
Тогда $\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0{,}0)}{\Delta x} = 0$, так как $f(\Delta x, 0) = 0$ $(\Delta x \cdot 0 = 0)$.
Аналогично, $\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0) = 0$, однако $f(x,y)$ даже не непрерывна в точке (0,0), поскольку в любой окрестности этой точки она принимает значения 0 и 1.

Пример 2. Если функция $f(\overline{x})$ непрерывна в точке $\overline{a}$, то она не обязательно будет имеет частные производные в этой точке.
Рассмотрим поведение $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $(0{,}0)$.
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 = f(0{,}0)$, следовательно $f(x,y)$ непрерывна в точке $(0{,}0)$.
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0{,}0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2} - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$, который, как известно, не существует.

Теорема. (Достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных). Пусть частные производные $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$ существуют в окрестности точки $\overline{a}$ и непрерывны в этой точке. Тогда $f(\overline{x})$ дифференцируема в точке $\overline{a}$.

Замечание. Непрерывность частных производных не является необходимым условием дифференцируемости функций. Например, можно доказать, что функция $f(x,y) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) + y^2\sin(1/y), \text{ если } xy \neq 0, \\ x^2\sin(1/x), \text{ если } x \neq 0, \ y = 0, \\ y^2\sin(1/y), \text{ если } x = 0, \ y \neq 0, \\ 0, \text{ если } x = 0 \ y = 0. \end{cases}$

дифференцируема в точке $(0,0)$, но частные производные в этой точке не непрерывны.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} e^{x+y}$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} e^{x+y} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(x+y)} = e^1 = e$. Здесь воспользовались теоремой о непрерывности сложной функции.

Пример 4. Верно ли, что непрерывный образ открытого множества – открытое множество?

Ответ: нет. Например, образ интервала $(0{,}5\pi)$ при отображении $y = \sin x$ является отрезком [-1,1].

Пример 5. Верно ли, что непрерывный образ замкнутого множества – замкнутое множество?

Ответ: нет. Например, при отображении $y = \operatorname{arctg} x$ вся прямая $(-\infty, +\infty)$, которая является замкнутым множеством, отображается на открытый интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Пример 6. Найти линии уровня функции $z = x^2 - y^2$.

Решение. Если $C = 0$, то линия уровня представляет собой пару пересекающихся прямых $y = \pm x$. Если $C < 0$, то линия уровня является гиперболой, заданной уравнением $\frac{y^2}{-C} - \frac{x^2}{-C} = 1$, а если $C < 0$, то линия уровня является гиперболой, заданной уравнением $\frac{x^2}{C} - \frac{y^2}{C} = 1$.

Пример 7. Найти линии уровня функции $z = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$. Решение. Функция определена в области, заданной неравенствами $x \geq 0, \ y \geq 0$. Тогда уравнение $C = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ в этой области равносильно уравнению $xy = C^2$, или $y = \frac{C^2}{x}$, $x > 0$. Это уравнение при $C \neq 0$ задаёт часть гиперболы. Если же $C = 0$, то уравнение $xy = 0$ в области, заданной неравенствами $x \geq 0, y \geq 0$ задаёт совокупность лучей $y = 0, \ x \geq 0$ и $x = 0, y \geq 0$.

Пример 8. Найти частные производные функции $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ в точке (0,0).

Решение. **Это— очень коварная задача!** Приведём пример очень часто встречающегося неверного «решения». «Просто дифференцируя по x и y», находим $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y^2}}$. Подстановка вместо (x,y) чисел (0,0) приводит к бессмысленным выражениям – частные производные не существуют! Ошибка в этом «решении» состоит в следующем. Частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0)$ равна производной по x функции $f(x,0) = \sqrt[3]{x \cdot 0} = 0$, поэтому $\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = 0$. Аналогично, $\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0) = 0$.

Однако функция $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ не дифференцируема в точке (0,0). Действительно, так как частные производные функции $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ в точке (0,0) равны 0, а в остальных точках $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y^2}}$, то ясно, что эти производные не непрерывны в точке (0,0).

Функция не дифференцируема в точке (0,0) , так как её приращение $\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{0\cdot 0}$ не имеет вида $0\cdot x+0\cdot y+\alpha_1(x,y)x+\alpha_2(x,y)y$, где $\alpha_1(x,y),\alpha_2(x,y)\to 0$ при $(x,y)\to(0,0)$. Действительно, полагая $y=x$ и предполагая, что $\sqrt[3]{xy}=0\cdot x+0\cdot y+\alpha_1(x,y)x+\alpha_2(x,y)y$, получаем $\sqrt[3]{x^2}=(\alpha_1(x,x)+\alpha_2(x,x))x$, или $1=(\alpha_1(x,x)+\alpha_2(x,x))\cdot x^{\frac{1}{3}}$ что невозможно, так как при $x\to 0$ правая часть стремится к 0, а левая нет!

Найти частные производные функций

Задача 1. $z=x^3+3x^2y-y^3$

$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=(x^3+3x^2y-y^3)'_x=3x^2+3\cdot 2xy-0=3x^2+6xy$

$\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=(x^3+3x^2y-y^3)'_y=0+3x^2\cdot 1-3y^2=3x^2-3y^2$.

Задача 2. $z=\frac{y}{x}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=\left(\frac{y}{x}\right)'_x=y\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^{-1})=y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(y)=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2}$ (такая запись будет удобнее в последствии).

Задача 3. $z=\ln(x^2+y^2)$

$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=(\ln(x^2+y^2))'_x=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=(\ln(x^2+y^2))'_y=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y\frac{2y}{x^2+y^2}$.

Задача 4. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{x^2}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$.

Задача 5. $z=\frac{xy}{x-y}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=\left(\frac{xy}{x-y}\right)'_x=\frac{(xy)'_x\cdot(x-y)-xy\cdot(x-y)'_x}{(x-y)^2}=\frac{y\cdot(x-y)-xy\cdot(1)}{(x-y)^2}=\frac{-y^2}{(x-y)^2}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=\left(\frac{xy}{x-y}\right)'_y=\frac{(xy)'_y\cdot(x-y)-xy\cdot(x-y)'_y}{(x-y)^2}=\frac{x\cdot(x-y)-xy\cdot(-1)}{(x-y)^2}=\frac{x^2}{(x-y)^2}$

Задача 6. $z=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$. Доказать, что $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\equiv\frac{1}{2}$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=\left(\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\right)'_x=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \left(\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\right)'_y = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$. Подставим в уравнение

$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + y \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) \equiv \frac{1}{2}$.

Задача 7. $z = x\sin\frac{y}{x}$. Доказать, что $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} \equiv z$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \cdot \sin\frac{y}{x} + x \cdot \cos\frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \cos\frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} = \cos\frac{y}{x}$. Подставим в уравнение

$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \left(\sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right) + y \cdot \cos\frac{y}{x} = x\sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x} + y\cos\frac{y}{x} =$

$= x\sin\frac{y}{x} \equiv z$.

Задача 8. $z = x^y$. Доказать, что $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} \equiv 2z$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$. Подставим в уравнение

$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} \cdot y \cdot x^{y-1} + \frac{1}{\ln x} \cdot x^y \cdot \ln x = x^y + x^y = 2x^y = 2z$.

Частные производные второго порядка

Речь идет о $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Теорема. Если частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ существуют в окрестности точки $\overline{a}$ и непрерывны в этой точке, то они равны в этой точке.

Пример. Рассмотрим функцию

$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2-0 \end{cases}$. Докажем, что $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0;0)} \neq \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(0;0)}$.

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0;y)} = \left.f'_x\right|_{(0;y)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) =$

$= \begin{cases} -y, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x;0)} = \left.f'_y\right|_{(x;0)} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\left(x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) =$

$= \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0;0)} = \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|_{(0;0)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-0}{x} = 1.$

$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(0;0)} = \left.\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right|_{(0;0)} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{-y-0}{y} = -1.$

Отсюда видно, что смешанные частные производные в $(0;0)$ не равны.

Задача 1. $z = x^3 + x^2y + y^3$

$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = (x^3 + x^2y + y^3)'_x = 3x^2 + 2xy$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = (x^3 + x^2y + y^3)'_y = x^2 + 3y^2$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2y$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3y^2) = 2x$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy\ ) = 2x.$$

Задача 2. $z = \frac{y}{x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \left(\frac{y}{x}\right)'_x = -\frac{y}{x^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x}$$
$$z''_{xx} = \left(-\frac{y}{x^2}\right)'_x = -y\left(-\frac{1}{x^2}\right)'_x = \frac{2y}{x^3}$$
$$z''_{yy} = \left(\frac{1}{x}\right)'_y = 0$$
$$z''_{xy} = z''_{yx} = \left(\frac{1}{x}\right)'_x = -\frac{1}{x^2}\,.$$

Задача 3. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{x^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}\,.$$
$$z''_{xx} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$z''_{yy} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{-x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$z''_{xy} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Задача 4. $z = \operatorname{arctg}(2x - t)$. Доказать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \frac{2}{1+(2x-t)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{-2\cdot 2\cdot(2x-t)\cdot 2}{(1+(2x-t)^2)^2} = \frac{-8(2x-t)}{(1+(2x-t)^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2}{1+(2x-t)^2}\right) = \frac{-2\cdot 2\cdot(2x-t)\cdot(-1)}{(1+(2x-t)^2)^2} = \frac{4(2x-t)}{(1+(2x-t)^2)^2}\,.$$

Уравнение, очевидно, выполняется.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность S задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ – дифференцируемая функция, и пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, тогда уравнение касательной плоскости к S в точке M_0 имеет вид

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}(y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}(z-z_0)=0,$$

уравнение нормали к поверхности имеет вид

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}}.$$

Замечание. Каноническое уравнение плоскости имеет вид $ax+by+cz+d=0,\ a^2+b^2+c^2\neq 0$, причем вектор $\vec{n}=(a,b,c)\perp$ плоскости. Поэтому мы будем искать уравнение в указанном выше виде, а результат (ответ) выдавать в каноническом виде.

Задача 1. Найти каноническое уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2+2y^2$ в точке $M_0(1;1;3)$.

$$z=x^2+2y^2 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+2y^2-z}_{F(x,y,z)}=0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x \Rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}=2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=4y \Rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}=4$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-1 \Rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}=-1$$

$\Rightarrow$ уравнение касательной плоскости будет иметь вид

$$2(x-1)+4(y-1)-1(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x+4y-z-3=0,$$

уравнение нормали к поверхности будет иметь вид

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{-1}.$$

Задача 2. Найти каноническое уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $xy=z^2$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, принадлежащей поверхности.

$$xy=z^2 \Leftrightarrow \underbrace{xy-z^2}_{F(x,y,z)}=0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y \Rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}=y_0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x \Rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}=x_0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-2z \Rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}=-2z_0$$

$\Rightarrow$ уравнение касательной плоскости будет иметь вид

$$y_0(x-x_0)+x_0(y-y_0)-2z_0(z-z_0)=0 \Leftrightarrow$$

$y_0x+x_0y-2z_0z+\underbrace{(-2x_0y_0+2z_0^2)}_{=0}=0 \Leftrightarrow y_0x+x_0y-2z_0z=0$, так как

$$M_0(x_0,y_0,z_0)\in S \Leftrightarrow F(x_0,y_0,z_0)=0 \Leftrightarrow x_0y_0-z_0^2=0,$$

уравнение нормали к поверхности будет иметь вид

$$\frac{x-x_0}{y_0}=\frac{y-y_0}{x_0}=\frac{z-z_0}{-2z_0}.$$

Задача 3. Найти каноническое уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (однополостный гиперболоид) в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, принадлежащей поверхности.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1}_{F(x,y,z)}=0 \Longrightarrow$

$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{a^2} \Longrightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}=\frac{2x_0}{a^2}$

$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{b^2} \Longrightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}=\frac{2y_0}{b^2}$

$\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{2z}{c^2} \Longrightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}=-\frac{2z_0}{c^2}$

$\Longrightarrow$ уравнение касательной плоскости будет иметь вид

$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)-\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0 \Leftrightarrow$

$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}+\underbrace{\left(-\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)}_{=-1}=0 \Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}-1=0$, так как

$M_0(x_0,y_0,z_0)\in S \Leftrightarrow F(x_0,y_0,z_0)=0 \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1$,

уравнение нормали к поверхности будет иметь вид

$\frac{x-x_0}{\frac{2x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{2y_0}{b^2}}=\frac{z-z_0}{-\frac{2z_0}{c^2}}$.

Дифференциал функции

Определение. Пусть $f(x,y)$ – дифференцируемая функция. Тогда ***дифференциалом*** $f(x,y)$ называется выражение $df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$.

Во всех следующих задачах найти дифференциал функции.

Задача 1. $z=x^2y$

$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=2xydx+x^2dy$.

Задача 2. $z=\frac{xy}{x-y}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y(x-y)-xy\cdot 1}{(x-y)^2}=\frac{-y^2}{(x-y)^2}$, $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x(x-y)-xy\cdot(-1)}{(x-y)^2}=\frac{x^2}{(x-y)^2} \Longrightarrow$

$dz=\frac{-y^2}{(x-y)^2}dx+\frac{x^2}{(x-y)^2}dy$.

Задача 3. $z=e^{\frac{s}{t}}$

$\frac{\partial z}{\partial s}=e^{\frac{s}{t}}\cdot\frac{1}{t}$, $\quad \frac{\partial z}{\partial t}=e^{\frac{s}{t}}\cdot s\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)=-\frac{s}{t^2}e^{\frac{s}{t}} \quad \Longrightarrow\ dz=\frac{1}{t}e^{\frac{s}{t}}ds-\frac{s}{t^2}e^{\frac{s}{t}}dt$.

Задача 4. $z=\sqrt{x^2+y^2} \ \Longrightarrow dz=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$.

Задача 5. Найти приближенное значение $\sqrt[4]{2.2^3\cdot 1.9}$.

Приращение функции в точке $M_0(x_0,y_0)$

$f(x,y)-f(x_0,y_0)=$

$=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot(x-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot(y-y_0)+{}^\circ\!\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$.

Поэтому

$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0} \cdot (y - y_0).$

Поэтому, чтобы решить предложенную задачу, мы должны определиться с функцией, которую мы будем рассматривать и значениями аргументов: $f(x,y),\ x,\ y,\ x_0,\ y_0$.

В данном случае рассмотрим $f(x,y) = \sqrt[4]{x^3 y}$ и положим $x = 2.2$, $y = 1.9$, $x_0 = 2,\ y_0 = 2$. Тогда $f(x_0,y_0) = \sqrt[4]{2^3 \cdot 2} = 2,\ \ x - x_0 = 2.2 - 2 = 0.2$, $y - y_0 = 1.9 - 2 = -0.1$. Частные производные функции $f(x,y) = \sqrt[4]{x^3 y}$ будут равны

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left((x^3 y)^{\frac{1}{4}}\right)'_x = y^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{y}{x}} \ \Longrightarrow\ \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left((x^3 y)^{\frac{1}{4}}\right)'_y = x^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{4} \cdot y^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt[4]{\left(\frac{y}{x}\right)^3 \frac{y}{x}} \ \Longrightarrow\ \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0} = \frac{1}{4}.$$ Поэтому

$$\sqrt[4]{2.2^3 \cdot 1.9} \approx 2 + \frac{3}{4} \cdot 0.2 + \frac{1}{4} \cdot (-0.1) = 2 + 0.15 - 0{,}025 = 2.125.$$

Производные сложных функций

Если $z = f(x,y),\ x = x(t),\ y = y(t)$, тогда

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Задача 1. $z = u^v,\ u = u(x),\ v = v(x)$. Найти $\frac{dz}{dx}$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v \cdot u^{v-1},\ \ \frac{\partial z}{\partial v} = u^v \cdot \ln u \ \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = v \cdot u^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \cdot \ln u \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Задача 2. $z = xe^y$, где $y = y(x)$. Найти $\frac{dz}{dx}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^y$$

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = e^y \cdot 1 + xe^y \cdot \frac{dy}{dx} = e^y + xe^y \frac{dy}{dx}.$$

Обратите **внимание** на то, что в этой задаче и $\frac{\partial z}{\partial x}$, и $\frac{dz}{dx}$ имеют смысл, но они не равны.

Задача 3. $z = \frac{y}{x},\ x = e^t,\ y = 1 - e^{2t}$. Найти $\frac{dz}{dt}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2},\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x},\ \ \frac{dx}{dt} = e^t,\ \frac{dy}{dt} = -2e^{2t} \ \Longrightarrow$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{y}{x^2} \cdot e^t + \frac{1}{x} \cdot (-2e^{2t}) = -\frac{1-e^{2t}}{e^t} \cdot e^t + \frac{1}{e^t} \cdot (-2e^{2t}) = -e^{-t} + e^t - 2e^t =$$

$$= -e^{-t} - e^t = \frac{dz}{dt}(t).$$

Если $z = f(x,y),\ x = x(u,v),\ y = y(u,v)$, тогда

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Задача 4. $u = u(x,y),\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Докажите, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sin\varphi$$

$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot (-r\sin\varphi) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot r\cos\varphi$. Рассмотрим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right)^2 + \left(-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \cos^2\varphi + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi\sin\varphi + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \sin^2\varphi +$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \sin^2\varphi - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\cos\varphi + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \cos^2\varphi = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Задача 5. $z = \frac{x^2}{y}$, $x = u - 2v$, $y = 2u + v$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -2, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1 \implies$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2x}{y} \cdot 1 + \left(-\frac{x^2}{y^2}\right) \cdot 2 = 2\frac{u-v}{2u+v} - 2\frac{(u-2v)^2}{(2u+v)^2} =$$

$$= 2\frac{(u-v)(2u+v)-(u-2v)^2}{(2u+v)^2} = 2\frac{2u^2+uv-2uv-v^2-u^2+4uv-4v^2}{(2u+v)^2} = 2\frac{u^2+3uv-5v^2}{(2u+v)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2x}{y} \cdot (-2) + \left(-\frac{x^2}{y^2}\right) \cdot 1 = -4\frac{u-v}{2u+v} - \frac{(u-2v)^2}{(2u+v)^2} =$$

$$= -\frac{4(u-v)(2u+v)+(u-2v)^2}{(2u+v)^2} = -\frac{8u^2+4uv-8uv-4v^2+u^2-4uv+4v^2}{(2u+v)^2} = -\frac{9u^2-8uv}{(2u+v)^2}.$$

Производная по направлению. Градиент

Рассмотрим точки P, лежащие на прямой, проходящей через P_0 в указанном направлении $\bar{l}$. Производной функции $f(x,y,z)$ в точке P_0 по направлению $\bar{l}$ называется предел (если существует конечный)

$$\frac{\partial u}{\partial l}(P_0) = \lim_{PP_0 \to 0} \frac{f(P)-f(P_0)}{|PP_0|}.$$

Для функции $u = u(x,y,z)$ и направления $\bar{l}$, которое задается единичным вектором $\bar{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$\frac{\partial u}{\partial l}(P_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(P_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(P_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(P_0)\cos\gamma =$$

$$= (\mathrm{grad}\, u(P_0), \bar{e}) = (\bar{\nabla} u(P_0), \bar{e}),$$

где $\bar{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, $\mathrm{grad}\, u = \bar{\nabla} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$.

Теорема 7. *Пусть $f_1(\bar{x})$ и $f_2(\bar{x})$ имеют все частные производные 1-го порядка. Тогда*

1. $\bar{\nabla}\big(f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x})\big) = \bar{\nabla} f_1(\bar{x}) + \bar{\nabla} f_2(\bar{x})$;

2. $\bar{\nabla} c f(\bar{x}) = c\bar{\nabla} f(\bar{x})$;

3. $\bar{\nabla}\big(f_1(\bar{x}) \cdot f_2(\bar{x})\big) = f_1(\bar{x})\bar{\nabla} f_2(\bar{x}) + f_2(\bar{x})\bar{\nabla} f_1(\bar{x})$;

4. Если $f_2(\bar{x}) \neq 0$, то $\bar{\nabla}\frac{f_1(\bar{x})}{f_2(\bar{x})} = \frac{f_2(\bar{x})\bar{\nabla} f_1(\bar{x}) - f_1(\bar{x})\bar{\nabla} f_2(\bar{x})}{\big(f_2(\bar{x})\big)^2}$;

5. Если $F(u)$ – функция одной переменной, имеющая производную, то $\bar{\nabla} F\big(f(\bar{x})\big) = F'\big(f(\bar{x})\big)\bar{\nabla} f(\bar{x})$.

Задача 1. Найти производную функции $z = \frac{5}{2}x^2 - 5xy + 3y^2 + 5y$ в точке $A(1;2)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол 30°.

$\bar{e} = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\operatorname{grad} z = (5x - 5y, -5x + 6y + 5)$
$\operatorname{grad} z(A) = (5 - 10, -5 + 12 + 5) = (-5,12)$
$\frac{\partial z}{\partial l}(A) = (\operatorname{grad} z(A), \bar{e}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(-5) + \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 - \frac{5\sqrt{3}}{2}$.
Задача 2. Найти производную функции $z = \ln(e^x + e^y)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол 45°.
$\bar{e} = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$\operatorname{grad} z = \left(\frac{e^x}{e^x + e^y}, \frac{e^y}{e^x + e^y}\right)$
$\frac{\partial z}{\partial l} = (\operatorname{grad} z, \bar{e}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e^y}{e^x + e^y} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Задача 3. Найти $\operatorname{grad} u$ и производную функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в любой точке и в точке $A(1;1;1)$ направлении $\bar{e} = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{3}\right)$.
$\bar{e} = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\operatorname{grad} u = (2x, 2y, 2z)$
$\operatorname{grad} u\,(A) = (2,2,2)$
$\frac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u, \bar{e}) = 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2y \cdot \frac{1}{2} + 2z \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2}x + y + z$
$\frac{\partial u}{\partial l}(A) = (\operatorname{grad} u\,(A), \bar{e}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \sqrt{2} + 2.$
Задача 4. Найти производную функции $u = xyz$ в любой точке и в точке $A(1;2;1)$ направлении $\bar{l}$, составляющем равные острые углы с осями координат.

Единичный вектор, задающий это направление, будет иметь вид:
$\bar{e} = (\cos\alpha, \cos\alpha, \cos\alpha)$. Так как $|\bar{e}| = 1$, то $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\Leftrightarrow 3\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \bar{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$\operatorname{grad} u = (yz, xz, xy)$
$\operatorname{grad} u(A) = (2,1,2)$
$\frac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u, \bar{e}) = \frac{1}{\sqrt{3}}yz + \frac{1}{\sqrt{3}}xz + \frac{1}{\sqrt{3}}xy$
$\frac{\partial u}{\partial l}(A) = (\operatorname{grad} u(A), \bar{e}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 5 = \frac{5}{\sqrt{3}}$.
Задача 5. Найти $\operatorname{grad} u$ и $|\operatorname{grad} u|$ функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
$\operatorname{grad} u = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x, y, z)$
$|\operatorname{grad} u| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$

Задача 6. Найти производную функции $u = \frac{z}{c} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ в точке $A(a;b;c)$ направлении радиус-вектора этой точки.
$\bar{r}(A) = (a, b, c) \Rightarrow \bar{e} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a, b, c$
$\operatorname{grad} u = \left(\frac{-2x}{a^2}, \frac{-2y}{b^2}, \frac{1}{c}\right)$

$\operatorname{grad} u(A) = \left(\frac{-2}{a}, \frac{-2}{b}, \frac{1}{c}\right)$

$\frac{\partial u}{\partial l}(A) = (\operatorname{grad} u(A), \bar{e}) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\left(-\frac{2a}{a} - \frac{2b}{b} + \frac{c}{c}\right) = -\frac{3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$

Производные неявно заданных функций

Если $F(x,y)$ – дифференцируемая функция в некоторой области D и $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$, тогда уравнение $F(x,y) = 0$ однозначно определяет функцию $y(x)$, также дифференцируемую, и ее производную можно найти так:

$\frac{dy}{dx}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}.$

Задача 1. Найти производную неявно заданной функции $y(x)$, если $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0.$

$\underbrace{x^2 + y^2 - 4x + 6y}_{F(x,y)} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 4, \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 6 \Longrightarrow$

$\frac{dy}{dx}(x,y) = -\frac{2x-4}{2y+6} = \frac{2-x}{y+3}.$

Задача 2. Найти производную неявно заданной функции $y(x)$, если $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (астроида).

$\underbrace{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}}_{F(x,y)} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}, \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} \Longrightarrow$

$\frac{dy}{dx}(x,y) = -\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$

Задача 3. Найти производную неявно заданной функции $y(x)$, если $xe^{2y} - ye^{2x} = 0.$

$\underbrace{xe^{2y} - ye^{2x}}_{F(x,y)} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = e^{2y} - 2ye^{2x}, \frac{\partial F}{\partial y} = 2xe^{2y} - e^{2x} \Longrightarrow$

$\frac{dy}{dx}(x,y) = -\frac{e^{2y}-2ye^{2x}}{2xe^{2y}-e^{2x}}.$

Если рассматривается $F(x,y,z)$, то уравнение $F(x,y,z) = 0$ при условии, что $F(x,y,z)$ – дифференцируема и $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y) \neq 0$ в некоторой области, определяет функцию $z(x,y)$, причем,

$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}.$

Задача 4. Найти частные производные неявно заданной функции $z(x,y)$, если $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0.$

$\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 - 6x}_{F(x,y,z)} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 6, \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \frac{\partial F}{\partial z} = 2z \Longrightarrow$

$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{2x-6}{2z} = \frac{3-x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}.$

Задача 5. $2\sin(x+2y+3z) = x+2y+3z$. Показать, что $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

$$\underbrace{2\sin(x+2y+3z) - x - 2y - 3z}_{F(x,y)} = 0 \implies$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\cos(x+2y+3z) - 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4\cos(x+2y+3z) - 2$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -6\cos(x+2y+3z) + 3 \implies$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2\cos(x+2y+3z)-1}{-6\cos(x+2y+3z)+3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4\cos(x+2y+3z)-2}{-6\cos(x+2y+3z)+3} = \frac{2}{3}$$

$$\implies \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Локальные экстремумы функции двух переменных $z = f(x, y)$

Определение. Пусть $f(\overline{x})$определена в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что $\overline{x}_0$ – *точка минимума* (строгого), если для всех $\overline{x}$ из некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(\bar{x}_0)$ выполнено неравенство $f(\overline{x}) > f(\overline{x}_0)$. Точка $\overline{x}_0$ – *точка максимума*, если для всех $\overline{x}$ из некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(\bar{x}_0)$ выполнено неравенство $f(\overline{x}) < f(\overline{x}_0)$. Точки минимума и максимума обычно называются *точками экстремума*.

Теорема. *Если $\overline{x}_0$ – точка экстремума и существуют $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0)$, то* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0) = 0$.

Замечание. В точке экстремума частные производные могут и не существовать (см. примеры выше).

Замечание. Если все частные производные в точке экстремума $\overline{x}_0$ существуют, то все они равны 0 и $\overline{\nabla} f(\overline{x}_0) = \overline{0}$, а также $df(\overline{x}_0) \equiv 0$, как функция от $dx_1, \dots, dx_n$.

Замечание. В точке экстремума дифференцируемой функции $z(x, y)$ касательная плоскость параллельна плоскости OXY.

Теорема. *Если функция $f(\overline{x})$ имеет частные производные до 2-го порядка включительно, непрерывные в стационарной точке $\overline{x}_0$, а второй дифференциал функции $d^2 f(\bar{x}_0)$ представляет собой знакоопределённую квадратичную форму от переменных $dx_1, \dots, dx_n$, то точка $\overline{x}_0$ является точкой экстремума функции $f(\overline{x})$. При этом, если эта квадратичная форма положительно определена, то в точке $\overline{x}_0$ — минимум, а если она отрицательно определена, то — максимум. Если форма неопределенная (то есть меняет знак), то экстремума нет.*

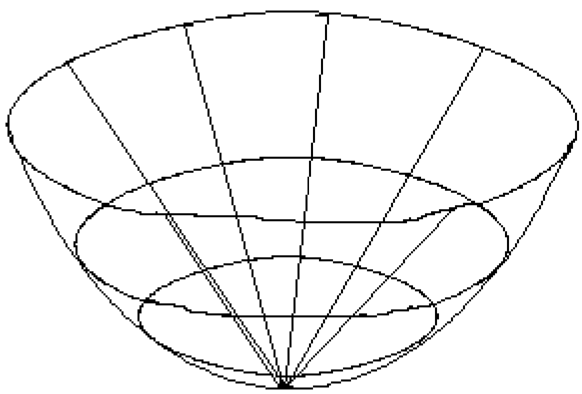
Для выяснения вопроса определенности формы можно использовать критерий Сильвестра из курса линейной алгебры. Для этого следует рассмотреть определитель (гессиан) $\begin{vmatrix} f_{11} \cdots f_{1n} \\ \vdots \\ f_{1n} \cdots f_{nn} \end{vmatrix}$,

где f_{ij} обозначают производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}_0)$ и его главные миноры, то есть числа f_{11}, $\begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \\ f_{12} f_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} f_{11} f_{12} f_{13} \\ f_{12} f_{22} f_{23} \\ f_{13} f_{23} f_{13} \end{vmatrix}$, …, $\begin{vmatrix} f_{11} \cdots f_{1n} \\ \vdots \\ f_{1n} \cdots f_{nn} \end{vmatrix}$.

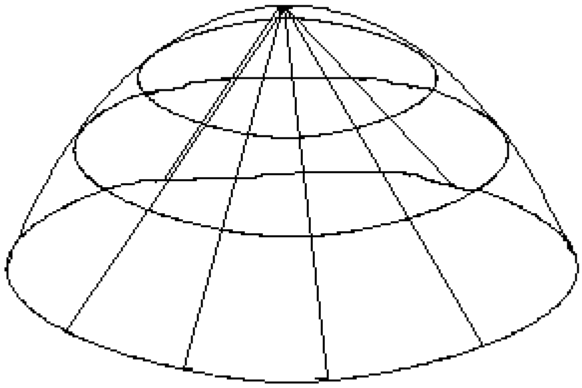
Если все эти миноры положительные, то $\overline{x}_0$ − точка минимума. Если знаки этих миноров чередуются, начиная со знака «−», то $\overline{x}_0$ − точка максимума.

В задачниках часто встречается следующее правило исследования функции двух переменных. В критической точке, при условии непрерывности смешанных производных, вычисляются величины $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и рассматривается Δ= $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Если $A > 0$, $AC - B^2 > 0$, то в критической точке – минимум, если $A < 0, AC - B^2 > 0$, то – максимум. Это сразу следует из сформулированного выше правила исследования знаков главных миноров матрицы второго дифференциала.

В двумерном случае имеем геометрическую иллюстрацию. В окрестности точки экстремума график функции $z = z(x, y)$ имеет вид «почти» эллиптического параболоида: в случае точки минимума выпуклого вниз,

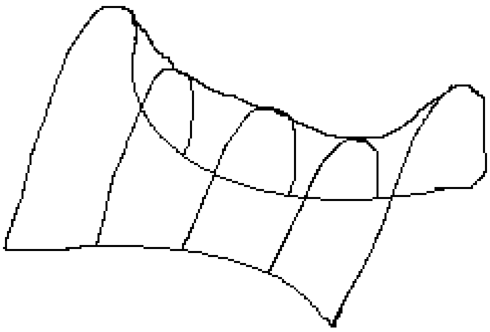


в случае точки максимума выпуклого вверх.



.

Если же график функции $z = z(x, y)$ имеет вид «почти» гиперболического параболоида (седло), то экстремума нет.



Пример 1. Найти $d^2\left(e^{x^2+y^2}\right)$.

Решение. $\dfrac{\partial e^{x^2+y^2}}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}$, $\quad \dfrac{\partial e^{x^2+y^2}}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}$,

$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} e^{x^2+y^2} = (4x^2+2)e^{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} e^{x^2+y^2} = (4y^2+2)e^{x^2+y^2}$,

$\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} e^{x^2+y^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} e^{x^2+y^2} = 4xye^{x^2+y^2}$.

Следовательно,

$$d^2\left(e^{x^2+y^2}\right) = (4x^2+2)e^{x^2+y^2}dx^2 + 8xye^{x^2+y^2}dxdy + (4y^2+2)e^{x^2+y^2}dy^2.$$

Пример 2. Выписать формулу для третьего дифференциала функции $f(x, y)$.

Решение. Используем формулу для дифференциала при $n = 2$ и $k = 3$. Получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$$

Пример 3. Найти экстремумы функции $u = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + z^2$.

Решение. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2x + 4y - 4$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2z$. Приравнивая частные производные к нулю, получаем стационарную точку: $x = y = 2, z = 0$. Далее, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$, следовательно, матрица второго дифференциала равна $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Её главные миноры равны, соответственно, 2, 4, 8. В точке (2,2,0) функция имеет минимум. Замечание. В этой задаче можно было сразу заметить, что $u = (x-y)^2 + (y-2)^2 + z^2 - 4$ и получить ответ.

Далее рассмотрим задачи для функций двух переменных.

Задача 1. Исследовать на экстремумы функцию
$z(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$

Необходимое условие.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 9 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ -x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -9 \\ x - 2y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3 \\ x - 2y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$M(-4,1)$ – критическая точка.

Достаточное условие.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M) = 2 = A > 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M) = 2 = C$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M) = -1 = B$$

$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \Rightarrow$ локальный экстремум есть.

Так как $A = 2 > 0$, то $M(-4,1)$ – точка локального минимума.

Задача 2. Исследовать на экстремумы функцию
$z(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy + 1.$

Необходимое условие.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 24y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y^2 \\ 16y^4 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y^2 \\ y(8y^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 4y^2 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4y^2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$M_1(0,0)$, $M_2\left(1, \frac{1}{2}\right)$ – критические точки.

Достаточное условие.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 48y$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6$

Для точки $M_1(0,0)$ получаем, что

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_1) = 0 = A_1$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_1) = 0 = C_1$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_1) = -6 = B_1$

$\Rightarrow \Delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0 \Rightarrow$ локального экстремума нет.

Для точки $M_2\left(1, \frac{1}{2}\right)$ получаем, что

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_2) = 6 = A_2 > 0$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_2) = 24 = C_2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_2) = -6 = B_2$

$\Rightarrow \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{vmatrix} = 6 \cdot 36 - 36 > 0 \Rightarrow$ локальный экстремум есть. А так как $A_2 = 6 > 0$, то $M_2\left(1, \frac{1}{2}\right)$ – точка локального минимума.

Задача 3. Исследовать на экстремумы функцию

$z(x, y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

Необходимое условие.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}(x + y^2) + e^{\frac{x}{2}} \cdot 1 = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2} + \frac{y^2}{2} + 1\right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{\frac{x}{2}} \cdot 2y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2} + \frac{y^2}{2} + 1\right) = 0 \\ e^{\frac{x}{2}} \cdot 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$M(-2,0)$ – критическая точка.

Достаточное условие.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2} + \frac{y^2}{2} + 1\right) + e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{4} + \frac{y^2}{4} + 1\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M) = \frac{1}{2} e^{-1} = A > 0$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M) = 2e^{-1} = C$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M) = 0 = B$

$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{vmatrix} = e^{-2} > 0 \Rightarrow$ локальный экстремум есть.

Так как $A = \frac{1}{2} e^{-1} > 0$, то $M(-2,0)$ – точка локального минимума.

Задача 4. Исследовать на экстремумы функцию

$z(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y),\ \ 0<x,y<\frac{\pi}{2}.$

Необходимое условие.

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\cos x+\cos(x+y)\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\cos y+\cos(x+y)\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}\cos x+\cos(x+y)=0\\ \cos y+\cos(x+y)=0\\ 0<x,y<\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=\cos y\\ \cos y+\cos(x+y)=0\\ 0<x,y<\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}\\ \cos y+\cos(y+2\pi n+y)=0\\ 0<x,y<\frac{\pi}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=-y+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}\\ \cos y+\cos(-y+2\pi n+y)=0\\ 0<x,y<\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}\\ \cos y+\cos 2y=0\\ 0<x,y<\frac{\pi}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=-y+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}\\ \cos y+\cos(2\pi n)=0\\ 0<x,y<\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}\\ \cos y+2\cos^2 y-1=0\\ 0<x,y<\frac{\pi}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=-y+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}\\ \cos y=-1\\ 0<x,y<\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

Заметим, что во второй системе $\cos y=-1\Leftrightarrow x=\pi+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$, и ни при каком $n\in\mathbb{Z}$ такой x не будет удовлетворять условию $0<x<\frac{\pi}{2}$. Поэтому у второй системы корней нет. Первая система будет равносильна совокупности двух систем

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}\\ \cos y=-1\\ 0<x,y<\frac{\pi}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=y+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}\\ \cos y=\frac{1}{2}\\ 0<x,y<\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

Те же соображения позволяют получить, что и у этой совокупности первая система корней иметь не будет. А у второй системы получаем решение

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}\\ y=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}\\ 0<x,y<\frac{\pi}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=y+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}\\ y=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}\\ 0<x,y<\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

Решив четыре задачи «на отбор корней тригонометрического уравнения на промежутке» находим в обоих случаях сначала $y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, а затем $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}\\ y=\frac{\pi}{3}\end{cases}\Longrightarrow M\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$$ – критическая точка.

Заметим, что при условии $0<x,y<\frac{\pi}{2}$ система решается легко, но если бы промежутки для x и y были больше, то пришлось бы «честно» решать

уравнение и задачу на «отбор корней тригонометрического уравнения, лежащих на данном промежутке», поэтому мы и предложили такое решение.
Достаточное условие.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x - \sin(x+y) \implies \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M) = -\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3} = A < 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin y - \sin(x+y) \implies \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M) = -\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3} = C$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = B$$

$\implies \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 3 - \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow$ локальный экстремум есть.

Так как $A = -\sqrt{3} < 0$, то $M\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ – точка локального максимума.

Интегрирование полных дифференциалов

Выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является ***полным дифференциалом функции*** $u(x,y) \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du.$$

Выражение $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ является ***полным дифференциалом функции*** $u(x,y,z) \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$. Тогда

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = du.$$

Во всех следующих задачах проверьте, что выражение является полным дифференциалом некоторой функции. Найдем эту функцию.

Задача 1. $(2x+y)dx + (x-2y-3)dy$.

Так как выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, то выполняется

$$\underbrace{(2x+y)}_{P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}}dx + \underbrace{(x-2y-3)}_{Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}}dy = du \Rightarrow$$

$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}dx = \int P(x,y)dx = \int (2x+y)dx = x^2 + xy + \varphi(y)$, но

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow x + \varphi'(y) = x - 2y - 3 \Rightarrow \varphi'(y) = -2y - 3 \Rightarrow$$

$$\varphi(y) = \int(-2y-3)dy = -y^2 - 3y + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow u(x,y) = x^2 + xy - y^2 - 3y + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Задача 2. $x\sin 2y\,dx + x^2\cos 2y\,dy$.

Так как выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, то выполняется

$$\underbrace{x\sin 2y}_{P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}}\,dx + \underbrace{x^2\cos 2y}_{Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}}\,dy = du \Rightarrow$$

$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}dx = \int P(x,y)dx = \int x\sin 2y\,dx = \frac{x^2}{2}\sin 2y + \varphi(y)$, но

$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow x^2\cos 2y + \varphi'(y) = x^2\cos 2y \ \Rightarrow\ \varphi'(y) = 0 \ \Rightarrow$
$\varphi(y) = C,\ C \in \mathbb{R}.$
$\Rightarrow u(x,y) = \frac{x^2}{2}\sin 2y + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 3. $(x + \ln y)dx + \left(\frac{x}{y} + \sin y\right)dy.$

Так как выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, то выполняется

$$\underbrace{(x + \ln y)}_{P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}}dx + \underbrace{\left(\frac{x}{y} + \sin y\right)}_{Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}}dy = du \Rightarrow$$

$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}dx = \int P(x,y)dx = \int (x + \ln y)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\ln y\right) + \varphi(y)$, но
$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow \frac{x}{y} + \varphi'(y) = \frac{x}{y} + \sin y \ \Rightarrow\ \varphi'(y) = \sin y \ \Rightarrow$
$\varphi(y) = -\cos y + C,\ C \in \mathbb{R}.$
$\Rightarrow u(x,y) = \frac{x^2}{2} + x\ln y - \cos y + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 4. $\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$

Так как выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, то выполняется

$$\underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}}\ dx + \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}}\ dy = du \Rightarrow$$

$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}dx = \int P(x,y)dx = \int \frac{-y}{x^2+y^2}dx = -y \cdot \frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \varphi(y) =$
$= -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \varphi(y)$, но
$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{-x}{y^2} + \varphi'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} \ \Rightarrow\ \varphi'(y) = 0 \ \Rightarrow$
$\varphi(y) = C,\ C \in \mathbb{R}.$
$\Rightarrow u(x,y) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 5. $(yz - 2x)dx + (xz + y)dy + (xy - z)dz.$

Так как выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y,z)$, то выполняется

$$\underbrace{(yz - 2x)}_{P(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial x}}dx + \underbrace{(xz + y)}_{Q(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial y}}dy + \underbrace{(xy - z)}_{R(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial z}}dz = du \Rightarrow$$

$u(x,y,z) = \int \frac{\partial u}{\partial x}dx = \int P(x,y,z)dx = \int (yz - 2x)dx = xyz - x^2 + \varphi(y,z)$, но
$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y,z) \Rightarrow xz + \varphi'_y(y,z) = xz + y \ \Rightarrow\ \varphi'_y(y,z) = y \ \Rightarrow$
$\varphi(y,z) = \frac{y^2}{2} + \phi(z) \ \Rightarrow\ \ u(x,y,z) = xyz - x^2 + \frac{y^2}{2} + \phi(z)$, но
$\frac{\partial u}{\partial z} = R(x,y,z) \Rightarrow xy + \phi'(z) = xy - z \Rightarrow \phi'(z) = -z \Rightarrow$
$\phi(z) = -\frac{z^2}{2} + C \Rightarrow$

$u(x,y,z) = yz - x^2 + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 6. $\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x^2}\right)dx + \frac{1}{y}dy - \left(\frac{x}{z^2} + \frac{1}{1+z^2}\right)dz.$

Так как выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y,z)$, то выполняется

$$\underbrace{\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x^2}\right)}_{P(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial x}} \cdot dx + \underbrace{\left(\frac{1}{y}\right)}_{Q(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial y}} \cdot dy + \underbrace{\left(-\frac{x}{z^2} - \frac{1}{1+z^2}\right)}_{R(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial z}} dz = du \Rightarrow$$

$u(x,y,z) = \int \frac{\partial u}{\partial x}dx = \int P(x,y,z)dx = \int \underbrace{\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x^2}\right)} dx = \frac{x}{z} + \frac{1}{x} + \varphi(y,z)$, но

$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y,z) \Rightarrow \varphi'_y(y,z) = \frac{1}{y} \Rightarrow \varphi(y,z) = \ln|y| + \phi(z) \Rightarrow$

$u(x,y,z) = \frac{x}{z} + \frac{1}{x} + \ln|y| + \phi(z)$, но

$\frac{\partial u}{\partial z} = R(x,y,z) \Rightarrow -\frac{x}{z^2} + \phi'(z) = -\frac{x}{z^2} - \frac{1}{1+z^2} \Rightarrow \phi'(z) = -\frac{1}{1+z^2} \Rightarrow$

$\phi(z) = -\operatorname{arctg} z + C \Rightarrow$

$u(x,y,z) = \frac{x}{z} + \frac{1}{x} + \ln|y| - \operatorname{arctg} z + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Условные экстремумы

Задача 1. Найти экстремум функции $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при условии $x + y = 2$.

В этом случае $z(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ и $\varphi(x,y) = x + y - 2$. Составим функцию Лагранжа

$L(x,y,\lambda) = z(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda(x + y - 2).$

Необходимое условие.

$$\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} + \lambda \qquad\qquad \Longrightarrow \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x,y) = x + y - 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{x^2} + \lambda = 0 \\ -\frac{1}{y^2} + \lambda = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2,\ x,y \neq 0 \\ \lambda x^2 = 1 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = y \\ \lambda x^2 = 1 \\ 2x = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -y \\ \lambda x^2 = 1 \\ -2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases} \vee\ (x,y,\lambda) \in \emptyset.$$

Получаем одну критическую точку $M_1(1,1)$ при $\lambda_1 = 1$.

Из условия $\varphi(x,y) = 0 \Longrightarrow d\varphi(x,y) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0$

в этом случае получаем $dx + dy = 0$.

Достаточное условие.

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(M_1) = \frac{2}{x^3}(M_1) = 2$

$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(M_1) = \frac{2}{y^3}(M_1) = 2$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0 \;\; \Longrightarrow \;\; \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(M_1) = 0$

Поэтому

$d^2 z(M_1) = 2(dx)^2 + 2(dy)^2 > 0 \;\; \forall\, dx, dy\colon \; (dx)^2 + (dy)^2 \neq 0.$

Следовательно, $M_1(1,1)$ – точка минимума.

$z_{min} = 1 + 1 = 2.$

Заметим, что условие 2 в этой задаче не потребовалось.

Задача 2. Исследовать на экстремумы функцию $z = xy$ при условии $x^2 + y^2 = 2.$

В этом случае $z(x,y) = xy$ и $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 2.$ Составим функцию Лагранжа

$L(x,y,\lambda) = z(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2).$

Необходимое условие.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda x$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda y \qquad\qquad \Longrightarrow$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 2$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2\lambda x \\ x = -2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2, \; x, y \neq 0 \\ y = -2\lambda x \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = y^2, \; x, y \neq 0 \\ y = -2\lambda x \\ 2x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Получаем четыре критических точки $M_1(1,1)$ при $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $M_2(1,-1)$ при $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $M_3(-1,-1)$ при $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$, $M_4(-1,1)$ при $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.

Их условия $\varphi(x,y) = 0 \Longrightarrow d\varphi(x,y) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0$

в этом случае получаем $xdx + \mathrm{y}dy = 0 \Leftrightarrow \mathrm{y}dy = -xdx.$

Достаточное условие.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1$$

Поэтому в случае $M_1(1,1)$ при $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ получаем

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(M_1) = -1$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(M_1) = -1$$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(M_1) = 1, \quad (xdx + ydy)(M_1) = 0 \Rightarrow dy = -dx.$
$d^2L(M_1) = -(dx)^2 + 2dxdy - (dy)^2 = -(dx)^2 + 2dx(-dx) - (dy)^2 < 0$
$\forall\, dx, dy$: $(dx)^2 + (dy)^2 \neq 0.$
Следовательно, $M_1(1,1)$ – точка условного максимума.
В случае $M_2(1,-1)$ при $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ получаем
$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(M_2) = 1$
$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(M_2) = 1$
$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(M_2) = 1, \quad (xdx + ydy)(M_2) = 0 \Rightarrow dy = dx.$
$d^2L(M_2) = (dx)^2 + 2dxdy + (dy)^2 = (dx)^2 + 2dx(dx) + (dy)^2 > 0$
$\forall\, dx, dy$: $(dx)^2 + (dy)^2 \neq 0.$
Следовательно, $M_2(1,-1)$ – точка условного минимума.
В случае $M_3(-1,-1)$ при $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ получаем
$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(M_1) = -1$
$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(M_3) = -1$
$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(M_3) = 1, \quad (xdx + ydy)(M_1) = 0 \Rightarrow dy = -dx.$
$d^2L(M_3) = -(dx)^2 + 2dxdy - (dy)^2 = -(dx)^2 + 2dx(-dx) - (dy)^2 < 0$
$\forall\, dx, dy$: $(dx)^2 + (dy)^2 \neq 0.$
Следовательно, $M_3(-1,-1)$ – точка условного максимума.
В случае $M_4(-1,1)$ при $\lambda_4 = \frac{1}{2}$ получаем
$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(M_4) = 1$
$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(M_4) = 1$
$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(M_4) = 1, \quad (xdx + ydy)(M_4) = 0 \Rightarrow dy = dx.$
$d^2L(M_4) = (dx)^2 + 2dxdy + (dy)^2 = (dx)^2 + 2dx(dx) + (dy)^2 > 0$
$\forall\, dx, dy$: $(dx)^2 + (dy)^2 \neq 0.$
Следовательно, $M_4(-1,1)$ – точка условного минимума.
Задача 3. Исследовать на экстремумы функцию $u = 2x - y + 9z^2$ при условиях $2x - 3z = -1$ и $y + 6xz = -1$.
В этом случае $u(x,y,z) = 2x - y + 9z^2$, $\varphi(x,y,z) = 2x - 3z + 1$ и $\phi(x,y,z) = y + 6xz + 1$. Составим функцию Лагранжа
$L(x,y,z,\lambda,\mu) = u(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) + \mu\phi(x,y,z) =$
$= 2x - y + 9z^2 + \lambda(2x - 3z + 1) + \mu(y + 6xz + 1).$
Необходимое условие.
$\frac{\partial L}{\partial x} = 2 + 2\lambda + 6\mu z$
$\frac{\partial L}{\partial y} = -1 + \mu$

$\frac{\partial L}{\partial z} = 18z - 3\lambda + 6\mu x \qquad \Rightarrow$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x,y) = 2x - 3z + 1$

$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \phi(x,y,z) = y + 6xz + 1.$

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda + 6\mu z = 0 \\ -1 + \mu = 0 \\ 18z - 3\lambda + 6\mu x = 0 \\ 2x - 3z + 1 = 0 \\ y + 6xz + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ 1 + \lambda + 3z = 0 \\ 6z - \lambda + 2x = 0 \\ 2x - 3z + 1 = 0 \\ y + 6xz + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda + 3z = -1 \\ 2x - \lambda + 6z = 0 \\ 2x - \quad 3z = -1 \\ y = -1 - 6xz \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda + 3z = -1 \\ 2x + 9z = -1 \\ 2x - \ 3z = -1 \\ y = -1 - 6xz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \\ z = 0 \\ \lambda = -1 \\ y = -1. \end{cases}$$

Получаем одну критическую точку $M(-\frac{1}{2}, -1,0)$ при $\lambda = -1$ и $\mu = 1$.

Из условий

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = 0 \\ \phi(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\varphi(x,y) = 0 \\ d\phi(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2dx - 3dz = 0 \\ 6zdx + dy + 6xdz = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (2dx - 3dz)(M) = 0 \\ (6zdx + dy + 6xdz)(M) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2dx - 3dz = 0 \\ dy - 3dz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{3}{2}dz \\ dy = 3dz\,. \end{cases}$$

Достаточное условие. При $\lambda = -1$ и $\mu = 1$ получим, что

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(M) = 0$

$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(M) = 0$

$\frac{\partial^2 L}{z^2}(M) = 18$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(M) = 0$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(M) = 6\mu = 6$

$\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(M) = 0.$ И тогда

$d^2L(M) = 2 \cdot 6dxdz + 18(dz)^2 = 12 \cdot \frac{3}{2}dz \cdot dz + 18(dz)^2 = 36(dz)^2 > 0$, так как если $dz = 0$, то из пункта 2 следует, что тогда и $dx = 0$, $dy = 0$, а мы рассматриваем второй дифференциал при условии $(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \neq 0$.

Следовательно, $M(-\frac{1}{2}, -1,0)$ – точка условного минимума.