МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ МГУ

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

А.И. КОЗКО, Л.М. ЛУЖИНА.,А.А. ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2023

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов. В этом пособии содержится материал, относящийся к курсу математического анализа, читаемому студентам второго курса химического факультета МГУ.

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.
ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ.
ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ С ПОМОЩЬЮ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть компакт M является криволинейной трапецией

$$M = \begin{cases} (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), y_1(x), y_2(x) \in C([a,b]) \end{cases}$$

И пусть функция $f(x,y)$ – непрерывна на компакте M.

Тогда $\iint_M f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$.

В следующих задачах вычислить повторные интегралы.

Задача 1. $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2+y)dx = \int_0^2 dy \left(\left(\frac{x^3}{3}+2yx\right)\Big|_{x=0}^{x=1}\right) =$

$= \int_0^2 dy\left(\left(\frac{1}{3}+2y\right)-0\right) = \left(\frac{y}{3}+y^2\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{2}{3}+4\right)-0 = 4\frac{2}{3}$.

Задача 2. $\int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^5 (x+2y)dx = \int_{-3}^3 dy \left(\left(\frac{x^2}{2}+2yx\right)\Big|_{x=y^2-4}^{x=5}\right) =$

$= \int_{-3}^3 dy\left(\left(\frac{25}{2}+10y\right)-\left(\frac{(y^2-4)^2}{2}+2y(y^2-4)\right)\right) =$

$= \int_{-3}^3 dy\left(\left(\frac{25}{2}+10y\right)-\frac{(y^2-4)^2}{2}-2y(y^2-4)\right) =$

$= \int_{-3}^3 dy\left(\frac{25}{2}+10y-\frac{y^4}{2}+4y^2-8-2y^3+8y\right) =$

$= \int_{-3}^3 dy\left(\underbrace{\frac{25}{2}-\frac{y^4}{2}+4y^2-8}_{\text{четные}}+\underbrace{10y-2y^3+8y}_{\text{нечетные}}\right) =$

$= 2\int_0^3 dy\left(\frac{25}{2}-\frac{y^4}{2}+4y^2-8\right) = \int_0^3 dy(9-y^4+8y^2) = \left(9y-\frac{y^5}{5}+\frac{8y^3}{3}\right)\Big|_0^3 =$

$= 27-\frac{243}{5}+72-0 = 99-48\frac{1}{5} = 50\frac{2}{5}$.

Задача 3. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^a rdr = \int_0^{2\pi} d\varphi\left(\left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_{r=a\sin\varphi}^{r=a}\right) =$

$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi(a^2-a^2\sin^2\varphi) = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi(1-\sin^2\varphi) = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi =$

$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+\underbrace{\cos 2\varphi}_{T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi}\right)d\varphi = \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{a^2}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi a^2}{2}$.

Замечание. Напомним, что у функций $\sin px$ и $\cos px$ наименьший период равен $T_0 = \frac{2\pi}{p}$, поэтому при интегрировании этих функций по отрезку, длина которого равна $T = \frac{2\pi}{p} \cdot m, m \in \mathbb{N}$, получается в результате 0. Проверьте это и запомните… или всякий раз считайте интеграл…

При вычислении кратных интегралов очень важным является умение нарисовать нужную «картинку» и правильно расставить пределы интегрирования в повторных интегралах.

В следующих задачах нужно записать уравнения линий, ограничивающих компакты, и изобразить эти компакты.

Задача 4. Рассмотрим $\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x,y)dy$. В этом интеграле пределы интегрирования понимаются так:
когда x: от $x = 1$ до $x = 3$

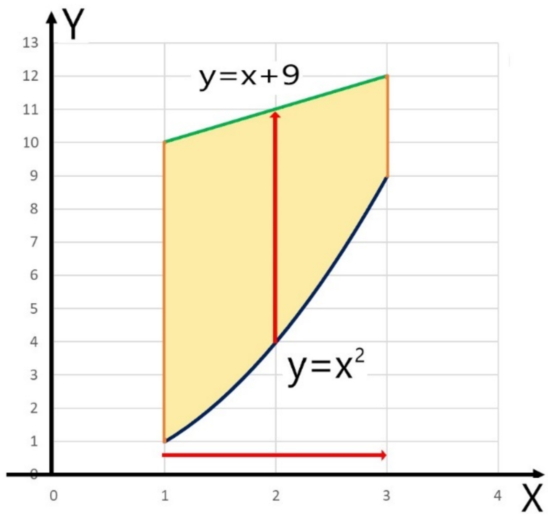

Рис. к задаче 4.

То есть, при каждом x от 1 до 3, значение переменной y меняется от значения y на линии $y = x^2$ до значения y на линии $y = x + 9$.

Такую «картинку» со стрелками советуем на первых порах рисовать всегда.

Задача 5. Рассмотрим $\int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx$. В этом интеграле пределы интегрирования понимаются так:
когда y: от $y = -6$ до $y = 2$

x: от $x = \frac{y^2}{4} - 1$ до $x = 2 - y$.

Найдем точки пересечения кривых $x = \frac{y^2}{4} - 1$ и $x = 2 - y$, для чего решим систему

$$\begin{cases} x = \frac{y^2}{4} - 1 \\ x = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - y = \frac{y^2}{4} - 1 \\ x = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 4y - 12 = 0 \\ x = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -6 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Получаем «картинку»:

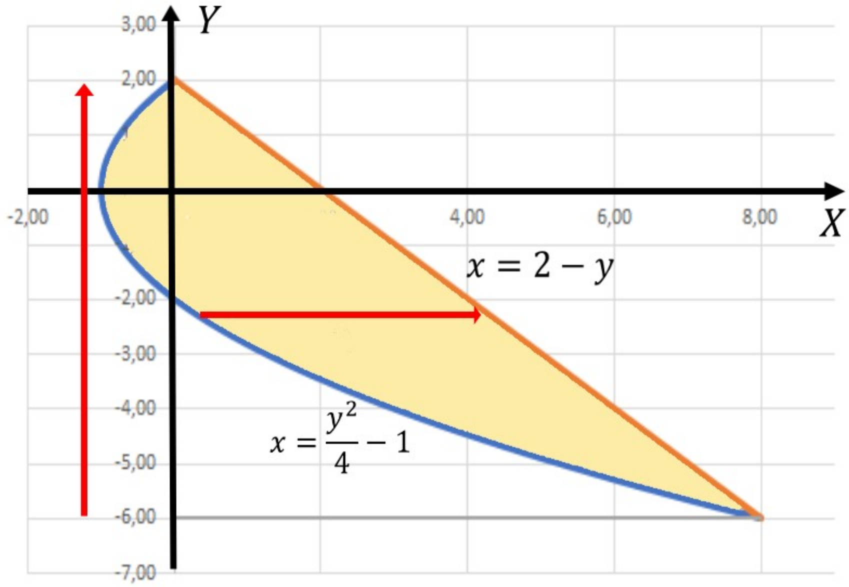

Рис. к задаче 5.

Замечание. Пусть компакт M является криволинейной трапецией

$$M = \begin{Bmatrix} (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x), y_1(x), y_2(x) \in C([a, b]) \end{Bmatrix}$$

и одновременно

$$M = \begin{Bmatrix} (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad c \leq y \leq d \\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y), x_1(y), x_2(y) \in C[c, d] \end{Bmatrix}$$

И пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на компакте M.

Тогда (теорема Фубини)

$$\iint_M f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx.$$

В следующих задачах надо поменять порядок интегрирования. Для нас это важно в первую очередь для того, чтобы в последствии разумнее выбирать порядок интегрирования, так как от этого будет зависеть сложность решения задачи.

Задача 6. $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)dx = \int_?^? dx \int_?^? f(x, y)dy$, то есть задача заключается в том, чтобы определить пределы интегрирования при смене порядка интегрирования.

Было: y: от $y = 0$ до $y = 1$

x: от $x = y$ до $x = \sqrt{y}$.

Получаем «картинку»:

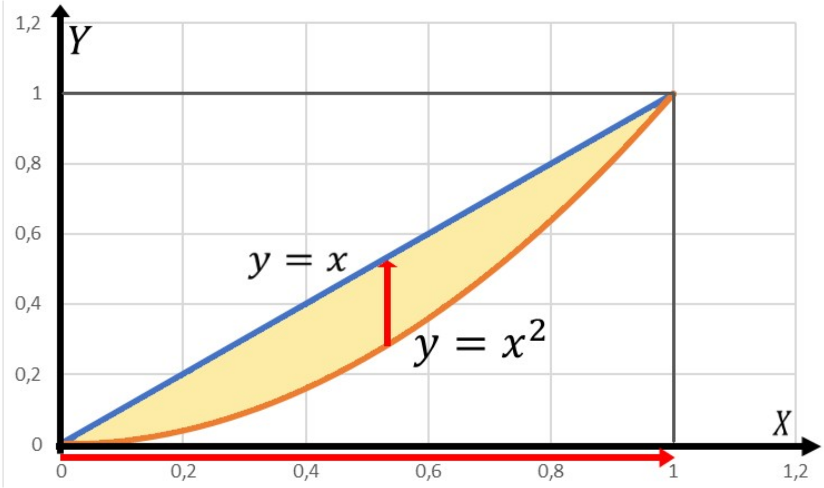

Рис. к задаче 6.

Но при $y \in [0; 1]$

$x = y \Leftrightarrow y = x$ и $x = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = x^2$, то есть получаем, что на нашем компакте стало:

x: от $x = 0$ до $x = 1$

y: от $y = x^2$ до $y = x$

и мы получаем, что

$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$.

Задача 7. $\int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_?^? dy \int_?^? f(x,y)dx$, и опять задача заключается в том, чтобы определить пределы интегрирования при смене порядка интегрирования.

Было: x: от $x = -1$ до $x = 1$

y: от $y = 0$ до $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Вопрос: какая кривая является графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$? Вспомните, как решались уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (школьный материал)

$$y = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 1 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

То есть графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ является верхняя полуокружность окружности $x^2 + y^2 = 1$. Вообще, давайте осознаем, что кривая $x^2 + y^2 = 1$ не является ни графиком функции $y = f(x)$, ни графиком функции $x = g(y)$. Но отдельные части окружности можно задать как графики функций:

Условия x: от $x = -1$ до $x = 1$

y: от $y = 0$ до $y = \sqrt{1 - x^2}$

задают «верхний полукруг»

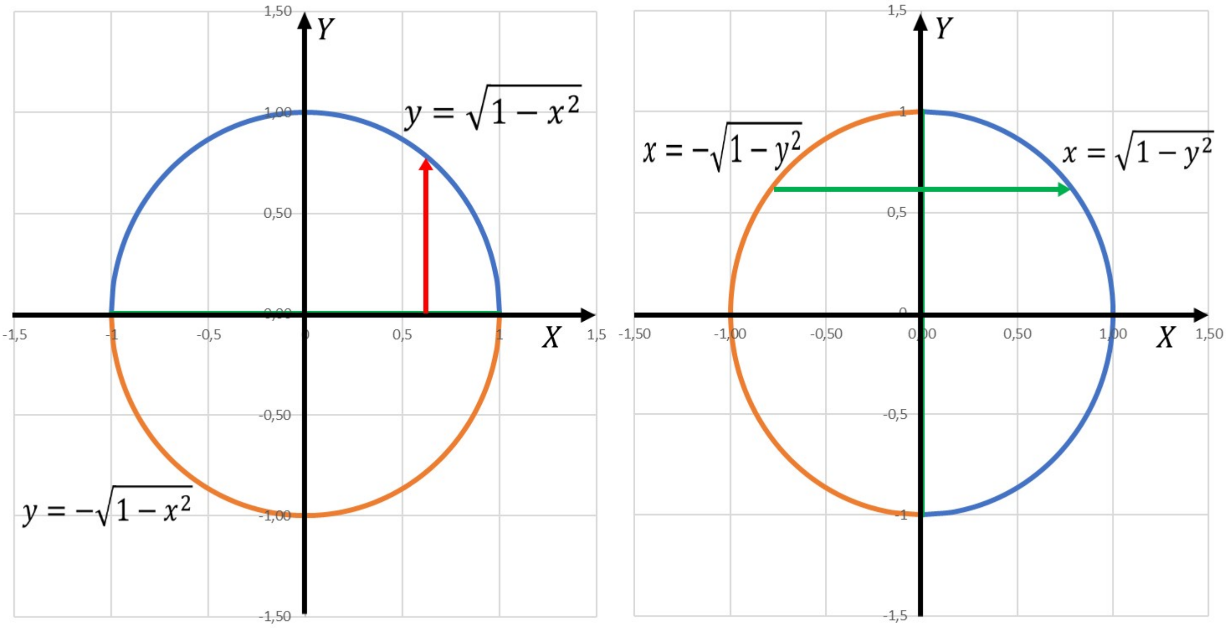

Рис. к задаче 7.

Но на этом полукруге y: от $y = 0$ до $y = 1$

x: от $x = -\sqrt{1-y^2}$ до $x = \sqrt{1-y^2}$, поэтому

$\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

Задача 8. $\int_{-2}^{2} dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy = \int_{?}^{?} dy \int_{?}^{?} f(x,y)dx$, и опять задача заключается в том, чтобы определить пределы интегрирования при смене порядка интегрирования.

Было: x: от $x = -2$ до $x = 2$

y: от $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}$ до $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}$.

Вопрос: какая кривая является графиком функции $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}$?

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = \frac{1}{2}(4-x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1. \end{cases}$$

То есть графиком функции $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}$ является верхняя часть эллипса $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1$. Вообще, давайте осознаем, что верхняя, нижняя, левая и правая части эллипса задаются следующим образом:

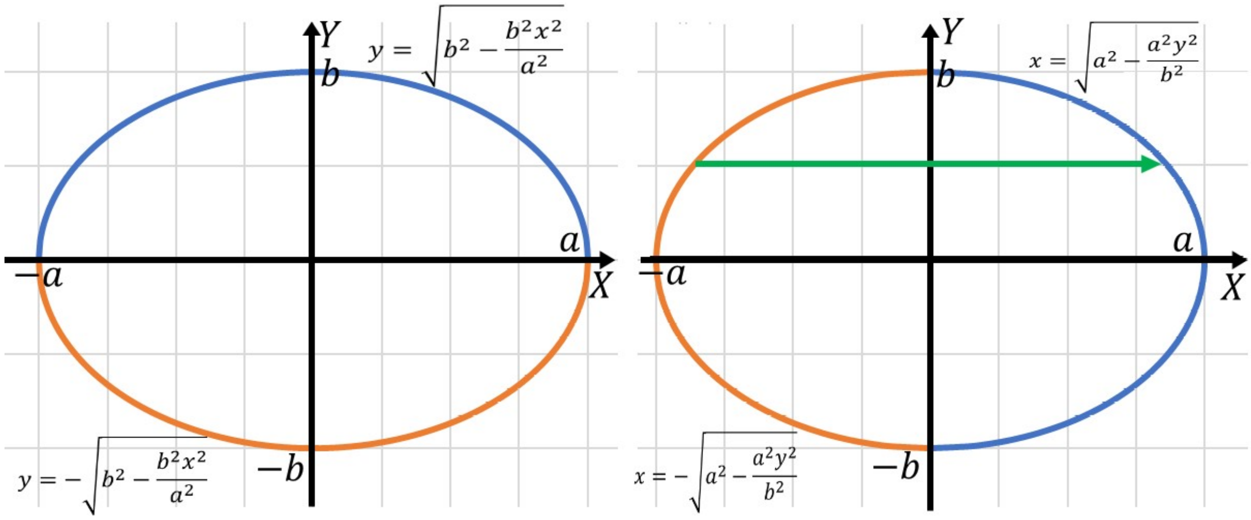

Рис. к задаче 8.

В нашем случае получаем, что

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x,y)dx.$$

Задача 9. $\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy = \int_?^? dy \int_?^? f(x,y)dx$, и опять задача заключается в том, чтобы определить пределы интегрирования при смене порядка интегрирования.

Было: x: от $x=1$ до $x=2$

y: от $y=x$ до $y=2x$.

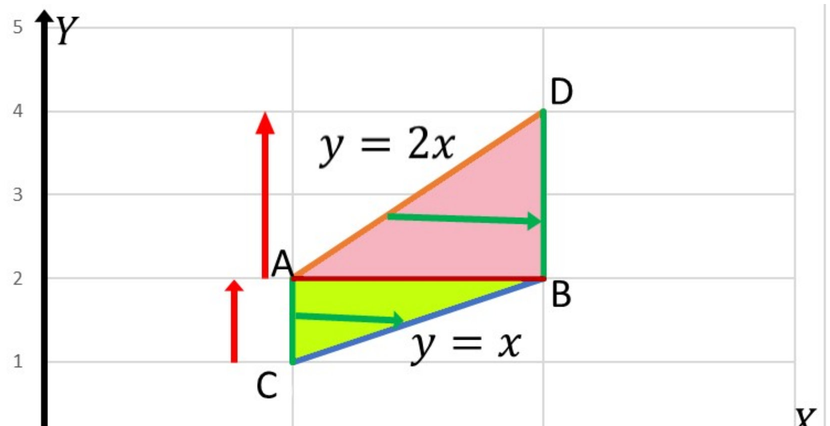

Рис. к задаче 9.

Заметим, что если мы поменяем порядок интегрирования, то компакт уже не будет криволинейной трапецией, но будет объединением двух криволинейных трапеций: треугольника ABC и треугольника ABD.

В треугольнике ABC: y: от $y=1$ до $y=2$

x: от $x = 1$ до $x = y$.

В треугольнике ABD: y: от $y = 2$ до $y = 4$

x: от $x = \frac{y}{2}$ до $x = 2$.

Таким образом мы получаем, что при выборе этого порядка интегрирования придется считать сумму двух интегралов:

$\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy = \int_1^2 dy \int_1^y f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y)dx.$

В следующих задачах вычислить интегралы по компактам, ограниченным кривыми.

Задача 10. Вычислить $\iint_M x^3y^2dxdy$, если компакт M ограничен окружностью $x^2 + y^2 = R^2$.

Рассмотрим сначала такой порядок интегрирования:

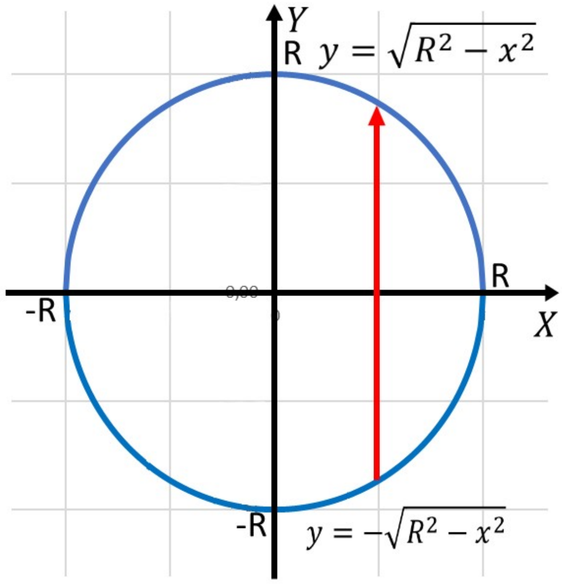

Рис. к задаче 10.

$\iint_M x^3y^2dxdy = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} x^3y^2dy = \int_{-R}^R x^3dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2dy =$

$= \frac{1}{3}\int_{-R}^R x^3(y^3)|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{2}{3}\int_{-R}^R x^3\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^3 = 0,$

потому что интеграл берется по симметричному промежутку от нечетной функции (что не просто заметить!).

А теперь рассмотрим другой порядок интегрирования

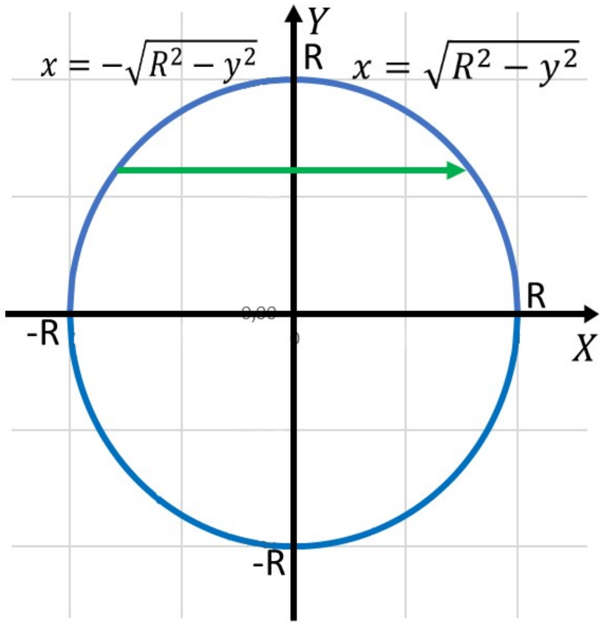

Рис. к задаче 10.

$$\iint_M x^3y^2dxdy = \int_{-R}^{R} dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} x^3y^2dx = \int_{-R}^{R} y^2dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} x^3dx.$$

Легко видеть, что во внутреннем интеграле при каждом y промежуток интегрирования является симметричным, а подынтегральная функция x^3 – нечетная. Поэтому внутренний интеграл равен нулю, а значит и весь интеграл равен нулю.

Эта задача показывает, что выбор порядка интегрирования важен.

Задача 11. Вычислить $\iint_M (x^2 + y)dxdy$, если компакт M ограничен кривыми $y = x^2$ и $x = y^2$.

Легко найти (решив систему), что кривые $y = x^2$ и $x = y^2$ пересекаются в точках с координатами (0,0) и (1,1), и соответствующая «картинка» имеет вид:

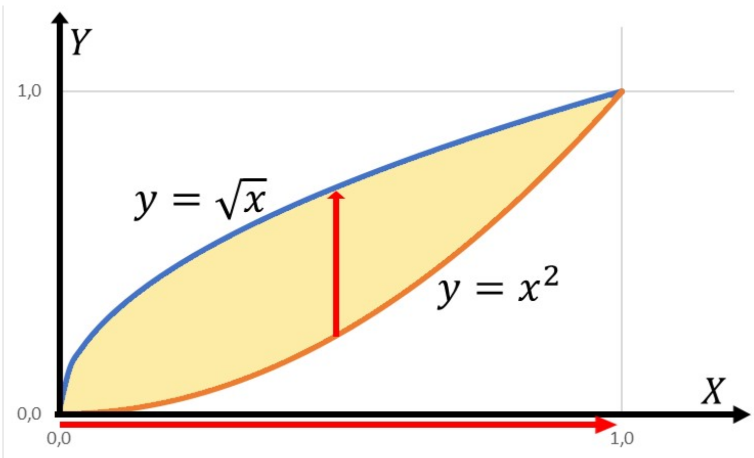

Рис. к задаче 11.

При $x \in [0,1]$ кривая $x = y^2$ может быть задана как график функции $y = \sqrt{x}$. Поэтому получаем

$$\iint_M (x^2 + y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y)dy = \int_0^1 dx \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} =$$

$$= \int_0^1 dx \left(x^{\frac{5}{2}} + \frac{x}{2} - x^4 - \frac{x^4}{2} \right) = \left(\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{10} x^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{33}{140}.$$

Задача 12. Вычислить $\iint_M \frac{x^2}{y^2} dxdy$, если компакт M ограничен кривыми $x = 2,\ y = x,\ xy = 1,\ x \geq 0$.

Легко найти (решив систему), что кривые $y = x$ и $xy = 1$ при $x \geq 0$ пересекаются в точке $(1,1)$, и соответствующая «картинка» имеет вид:

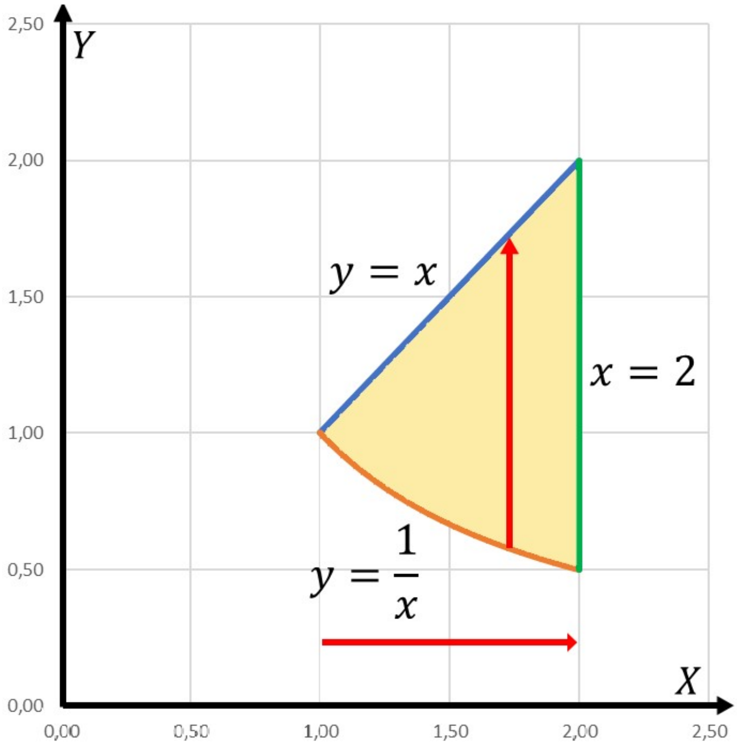

Рис. к задаче 12.

Поэтому

$$\iint_M \frac{x^2}{y^2} dxdy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} y^{-2} dy = \int_1^2 x^2 dx \left(\frac{y^{-1}}{-1} \right) \Big|_{\frac{1}{x}}^{x} =$$

$$= -\int_1^2 x^2 \left(\frac{1}{x} - x \right) dx = \int_1^2 (x^3 - x)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{4}.$$

Задача 13. Вычислить $\iint_M \cos(x + y)\, dxdy$, если компакт M ограничен кривыми $x = 0, y = x,\ y = \pi$.

Соответствующая «картинка» имеет вид:

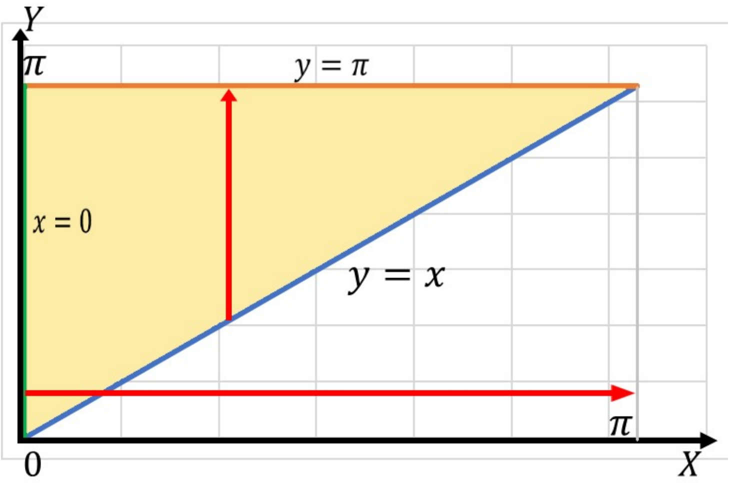

Рис. к задаче 13.

Поэтому

$\iint_M \cos(x+y)\,dxdy = \int_0^\pi dx \int_x^\pi \cos(x+y)\,dy =$

$= \int_0^\pi dx \int_x^\pi \cos(x+y)\,d(y+x) = \int_0^\pi dx(\sin(x+y))\big|_{y=x}^{y=\pi} =$

$= \int_0^\pi dx(\sin(x+\pi) - \sin 2x) = \int_0^\pi dx(-\sin x - \sin 2x) =$

$= -\int_0^\pi \sin x\,dx - \int_0^\pi \underbrace{\sin 2x}_{T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi}\,dx = 2 - 0 = 2.$

Замечание. При изучении неопределенных интегралов мы получили очень важное соотношение: $dx = \frac{1}{a}d(ax+b), a \neq 0$. Но при интегрировании по x для нас y является постоянной величиной! Поэтому в этом случае $dx = \frac{1}{a}d(ax+\varphi(y))$, в частности, $dx = d(x+y)$.

Задача 14. Вычислить $\iint_M \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, если компакт M – четверть круга $x^2+y^2 \leq 1$, лежащая в 1-м квадранте.

Соответствующая «картинка» имеет вид:

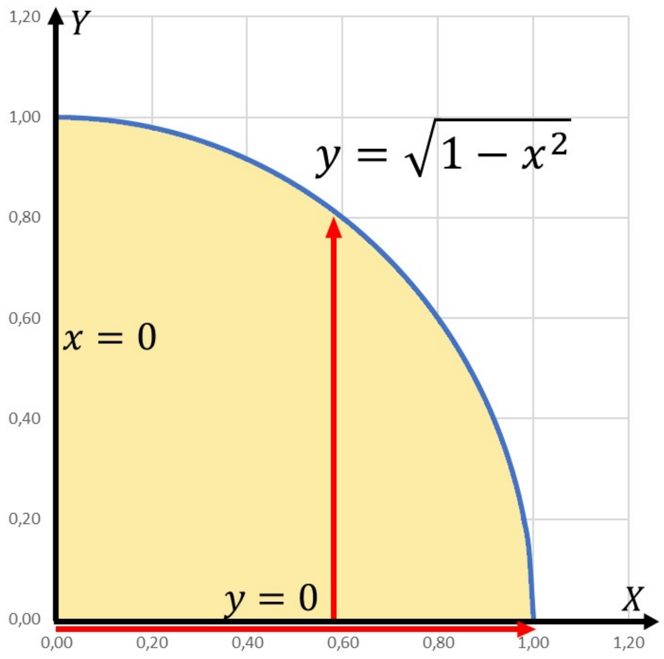

Рис. к задаче 14.

Поэтому

$$\iint_M \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy.$$

В дальнейшем мы пройдем замену переменной в двойном интеграле, и чтобы оценить «красоту игры», давайте попробуем сначала решить эту задачу без замены переменной. По формуле Ньютона – Лейбница

$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b$, где $F(x)$ – произвольная первообразная.

Найдем первообразную функции $\sqrt{1-x^2-y^2}$, для чего посчитает интеграл

$$\int \sqrt{1-x^2-y^2}dy = \|1-x^2 = a^2\| = \int \sqrt{a^2-y^2}dy =$$

$$= \sqrt{a^2-y^2} \cdot y - \int yd\sqrt{a^2-y^2} = y\sqrt{a^2-y^2} - \int y\frac{-2y}{2\sqrt{a^2-y^2}}dy =$$

$$= y\sqrt{a^2-y^2} - \int \frac{-y^2}{\sqrt{a^2-y^2}}dy = y\sqrt{a^2-y^2} - \int \frac{-a^2+a^2-y^2}{\sqrt{a^2-y^2}}dy =$$

$$= y\sqrt{a^2-y^2} + a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}dy - \int \sqrt{a^2-y^2}dy =$$

$$= y\sqrt{a^2-y^2} + a^2 \arcsin\frac{y}{a} - \int \sqrt{a^2-y^2}dy.$$

И мы получили уравнение относительно интеграла. Поэтому

$$\int \sqrt{a^2-y^2}dy = \frac{1}{2}\left(y\sqrt{a^2-y^2} + a^2 \arcsin\frac{y}{a}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

или в наших переменных

$$\int \sqrt{1-x^2-y^2}dy = \frac{1}{2}\left(y\sqrt{1-x^2-y^2} + (1-x^2)\arcsin\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Но тогда

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \left(y\sqrt{1-x^2-y^2} + (1-x^2)\arcsin\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}} =$$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx(0 + (1 - x^2)\arcsin 1 - 0 - (1 - x^2)\arcsin 0) =$
$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\left((1 - x^2)\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{6}.$

Замена переменной в двойном интеграле

При вычислении интегралов часто бывает удобно сделать замену переменных

$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \end{cases}$

где $x(u,v)$, $y(u,v)$, $\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)$, $\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)$, $\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$, $\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$ – непрерывны в некоторой области $\sigma \subset \mathbb{R}^2$. Впоследствии мы будем часто писать просто $\frac{\partial x}{\partial u}$ вместо $\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)$ и т.п. и, кроме того, говорить при выполнении вышеупомянутых условий, что x и y – непрерывно дифференцируемые в σ функции.
Пусть при этом формулы $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ задают взаимно-однозначное отображение квадрируемых областей: $M \leftrightarrow \sigma, (x,y) \in M, (u,v) \in \sigma.$
Кроме того, потребуем, чтобы всюду на области σ не равнялся нулю якобиан отображения

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Теорема. *При сформулированных выше условиях для непрерывной на M функции $f(x,y)$ выполняется равенство*
$\iint_M f(x,y)dxdy = \iint_\sigma f\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J|dudv.$
Замечание. Утверждение теоремы сохранится, если условие взаимной однозначности отображения $x = x(u,v), y = y(u,v)$ нарушится на множестве нулевой площади.

Переход в полярные координаты

Пусть требуется вычислить $\iint_M f(x,y)dxdy$ по области M, которая задаётся в полярных координатах условиями

$\begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta \\ r \le r(\varphi). \end{cases}$

Сделаем замену переменных

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$

При этой замене нарушается взаимная однозначность отображения. Точке (0,0) соответствует целый отрезок $[\alpha, \beta]$ на оси φ. Однако и точка, и отрезок имеют нулевую площадь, и теорема, с учётом замечания, справедлива. Осталось вычислить якобиан преобразования.

$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi\,, \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi\,, \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\,, \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi.$

$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$

$\Longrightarrow |J| = r$

Следовательно,

$\iint_M f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi\,, r\sin\varphi)rdr.$

Полярные координаты бывают очень полезны при вычислениях интегралов.

Пример 1. Найти площадь компакта M, ограниченного кривой $(a_1x + b_1y)^2 + (a_2x + b_2y)^2 = 1$, где $\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Заметим, что в этом случае даже сложно сразу сообразить, какую кривую задает это уравнение.

Сделаем замену переменной

$\begin{cases} a_1x + b_1y = u \\ a_2x + b_2y = v. \end{cases}$

Нам потребуется выразить переменные x и y через u и v. Для этого надо решить исходную систему относительно x и y. Решим ее методом Крамера.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = \delta \neq 0$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} u & b_1 \\ v & b_2 \end{vmatrix} = b_2u - b_1v$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & u \\ a_2 & v \end{vmatrix} = -a_2u + a_1v.$

Поэтому

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{\delta}(b_2u - b_1v\,)$

$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{\delta}(-a_2u + a_1v).$

И тогда Якобиан будет равен

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{b_2}{\delta} & -\frac{a_2}{\delta} \\ -\frac{b_1}{\delta} & \frac{a_1}{\delta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{\delta}(a_1b_2 - a_2b_1) = \frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\delta = \frac{1}{\delta}$$

$\Longrightarrow |J| = \frac{1}{|\delta|}\,.$

Заметим, что в новых координатах (u,v) уравнение имеет вид $u^2 + v^1 = 1$ и задает окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Площадь круга M_1, ограниченного этой окружностью равна $\pi R^2 = \pi$. По теореме о среднем получаем

$S(M) = \iint_{M(x,y)} dxdy = \iint_{M_1(u,v)} |J(u,v)| dudv = |J(u_0, v_0)| \iint_{M_1(u,v)} dudv =$
$= \frac{1}{|\delta|} \cdot S(M_1) = \frac{1}{|\delta|} \cdot \pi = \frac{\pi}{|\delta|}.$

Пример 2. Найти площадь компакта M, ограниченного эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Введем новые координаты

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = u \\ \frac{y}{b} = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = au \\ y = bv \end{cases}.$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab \neq 0.$$

В новых координатах (u, v) уравнение имеет вид $u^2 + v^1 = 1$ и задает окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Площадь круга M_1, ограниченного этой окружностью равна $\pi R^2 = \pi$. По теореме о среднем получаем

$S(M) = \iint_{M(x,y)} dxdy = \iint_{M_1(u,v)} |J(u,v)| dudv = |J(u_0, v_0)| \iint_{M_1(u,v)} dudv =$
$= ab \cdot \pi = \pi ab.$

Задача 15. $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dy$ $\boxed{=}$
Заметим, что этот интеграл не берется в элементарных функциях.
Пределы интегрирования задают часть круга радиуса a, лежащую в 1-м квадранте. Получаем «картинку»

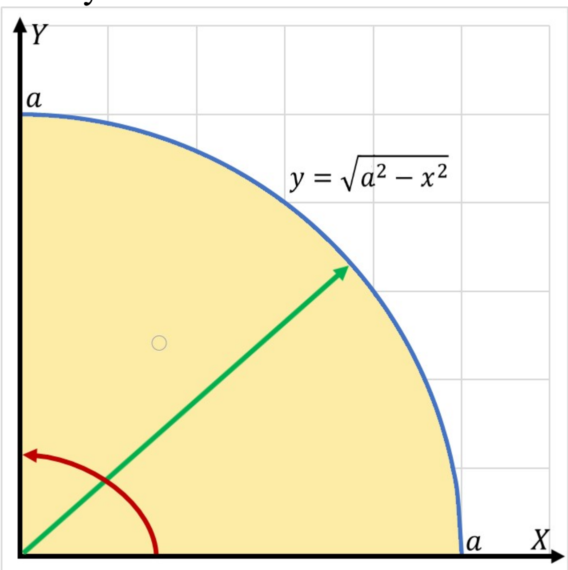

Рис. к задаче 15.

Из «картинки» видно, что у точек этого компакта φ меняется $\varphi\colon 0 \to \frac{\pi}{2}$, и на каждом луче $\varphi = \varphi_0$ у точек компакта r меняется $r\colon 0 \to a$.
Поэтому получаем

$$\boxed{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \underbrace{r}_{|J|} dr\, e^{r^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a e^{r^2} dr^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\left(e^{a^2} - e^0\right) = \frac{\pi}{4}\left(e^{a^2} - 1\right).$$

Задача 16. $\iint_M \sqrt{x^2 + y^2 - 9}\, dxdy$, где M – кольцо между окружностями $x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 = 25$.

Нарисуем «картинку».

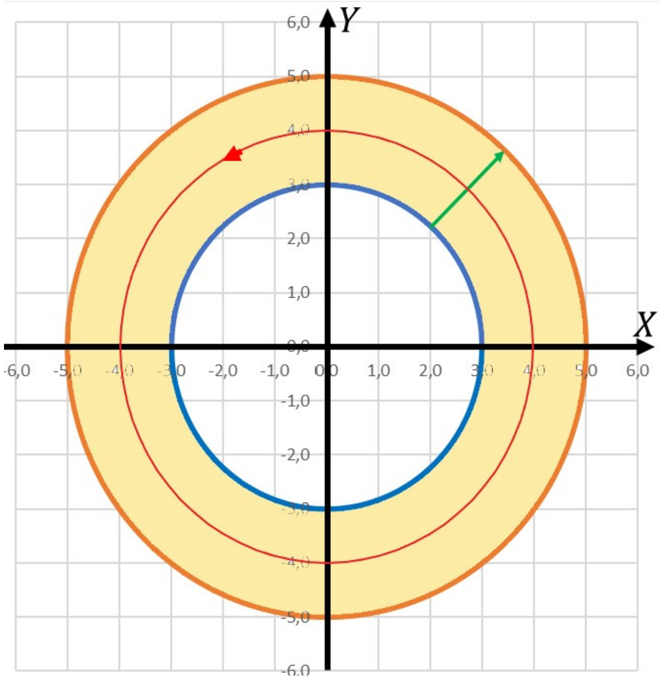

Рис. к задаче 16

Это множество называется «кольцом». Точки кольца есть на всех лучах $\varphi: 0 \to 2\pi$, и на каждом луче $\varphi = \varphi_0$ у точек кольца r меняется $r: 3 \to 5$. Поэтому

$$\iint_M \sqrt{x^2 + y^2 - 9}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_3^5 \sqrt{r^2 - 9}\, r dr =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi \int_3^5 \sqrt{r^2 - 9}\, d(r^2 - 9) = \pi \cdot \frac{2}{3}\left((r^2 - 9)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_3^5 = \frac{2\pi}{3}(64 - 0) = \frac{128\pi}{3}.$$

Очень внимательно отнеситесь к следующей задаче.

Задача 17. $\iint_M (x^2 + y^2)\, dxdy$, где M ограничен линией $x^2 + y^2 = ax, a > 0$.

1) Чтобы нарисовать «картинку», в уравнении $x^2 + y^2 = ax$ выделим полные квадраты $x^2 + y^2 = ax \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ – уравнение окружности радиуса $\frac{a}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

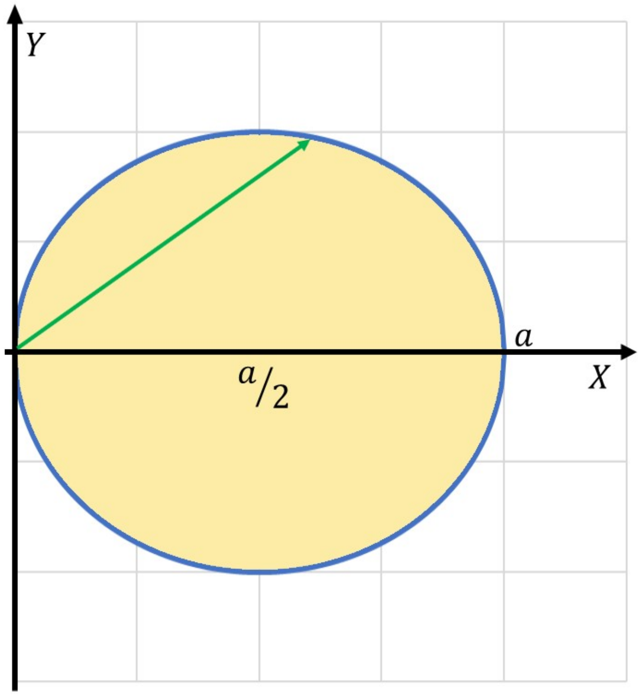

Рис. к задаче 17

2) Как определить пределы интегрирования при переходе в полярные координаты? В простых случаях они определяются легко по «картинке». В более сложных ситуациях приходится решать ***задачу «в три действия»:***
   1. В уравнение кривой вместо x и y подставляем их выражения в виде $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Получаем уравнение $g(r,\varphi) = 0$.
   2. Решаем уравнение $g(r,\varphi) = 0$ как уравнение относительно переменной r, получаем корни $r_1(\varphi), r_2(\varphi), \dots r_k(\varphi)$. Среди этих корней выбираем пределы интегрирования по r: $r_1^*(\varphi)$ и $r_2^*(\varphi)$.
   3. Решив систему неравенств $\begin{cases} r_1^*(\varphi) \geq 0 \\ r_2^*(\varphi) \geq 0 \end{cases}$, находим пределы интегрирования по φ.

В нашей задаче:
1. $x^2 + y^2 = ax \to r^2 = ar\cos\varphi$
2. $r^2 = ar\cos\varphi \Leftrightarrow r_1(\varphi) = 0, r_2(\varphi) = a\cos\varphi$
3. $\begin{cases} r_1(\varphi) \geq 0 \\ r_2(\varphi) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \geq 0 \\ a\cos\varphi \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Поэтому получаем, что

$$\iint_M (x^2+y^2)\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^2 r dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^3 dr =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(r^4\Big|_0^{a\cos\varphi}\right) = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^4\cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = \frac{a^4}{16}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{16}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \underbrace{2\cos 2\varphi}_{T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\cos 4\varphi}_{T_0=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}}\right)d\varphi = \frac{a^4}{16}\cdot\frac{3}{2}\cdot\pi = \frac{3\pi a^4}{32}.$$

Задача 18. Найти площадь компакта M, ограниченного кривыми $x^2 = ay$, $x^2 = by, 0 < a < b$ $y^2 = px$, $y^2 = qx$, $0 < p < q$.

Нарисуем «картинку» к задаче.

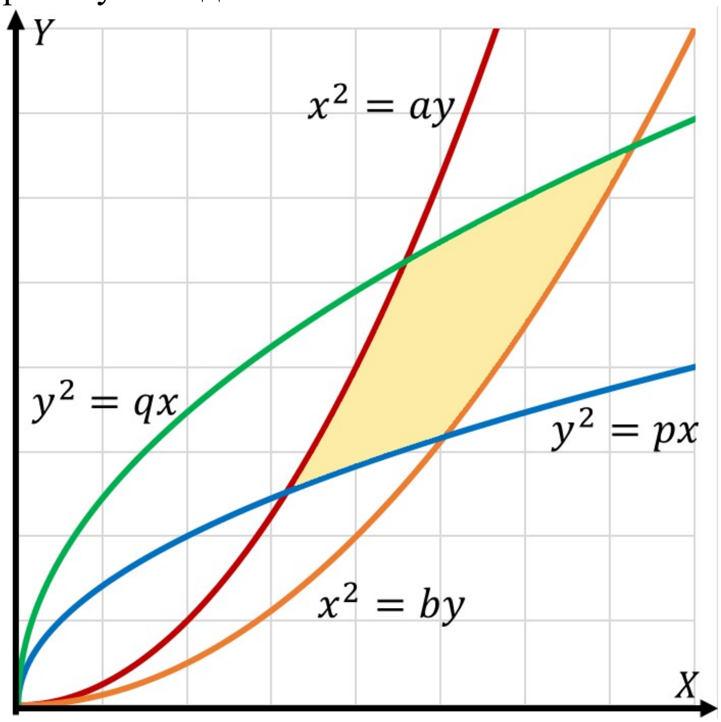

Рис. к задаче 18

Введем новые переменные $\begin{cases} \frac{x^2}{y} = u \\ \frac{y^2}{x} = v. \end{cases}$

Из условия следует, что $u \in [a, b]$, $v \in [p, q]$, $(u, v) \in M_1$.

Выразим x и y через u и v:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} = u \\ \frac{y^2}{x} = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{u} \\ \frac{x^4}{u^2 \cdot x} = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{u} \\ x^3 = u^2 \cdot v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} \\ y = u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

Тогда

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$\Longrightarrow S(M) = \iint_M dxdy = \iint_{M_1} |J(u, v)| dudv = \int_a^b du \int_p^q \frac{1}{3} dv = \frac{1}{3}(b - a)(q - p).$$

Правда, здорово?!

Задача 19. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 4ax + 4a^2$ и $x + y = 2a,\ a > 0.$

Найдем точки пересечения кривых и нарисуем «картинку».

$$\begin{cases} y^2 = 4ax + 4a^2 \\ x + y = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - y \\ y^2 = 4a(2a - y) + 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - y \\ y^2 + 4ay - 12a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8a \\ y = -6a \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 2a. \end{cases}$$

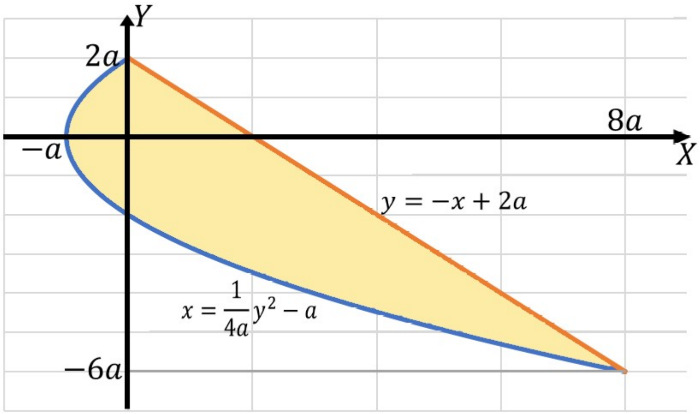

Рис. к задаче 19

Уравнения кривых, которые ограничивают компакт, можно записать в виде:

$x + y = 2a \Leftrightarrow x = 2a - y$

$y^2 = 4ax + 4a^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4a}y^2 - a.$

Из «картинки» видно, что у точек компакта координата y меняется от $-6a$ до $2a$ и при каждом y координата x меняется от $x = \frac{1}{4a}y^2 - a$ до $x = 2a - y$. Поэтому получаем

$$S(M) = \iint_M dxdy = \int_{-6a}^{2a} dy \int_{\frac{1}{4a}y^2 - a}^{2a-y} dx = \int_{-6a}^{2a} \left(2a - y - \frac{1}{4a}y^2 + a\right) =$$

$$= \int_{-6a}^{2a} \left(3a - y - \frac{1}{4a}y^2\right) = \left(-\frac{y^3}{12a} - \frac{y^2}{2} + 3ay\right)\Big|_{-6a}^{2a} =$$

$$= -\frac{1}{12a}(8a^3 + 216a^3) - \frac{1}{2}(4a^2 - 36a^2) + 3a(2a + 6a) =$$

$$= -\frac{56}{3}a^2 + 16a^2 + 24a^2 = \frac{64a^2}{3}.$$

Задача 20. Найти площадь фигуры, ограниченной в декартовой системе координат Oxy кривыми $r = a(1 - \cos\varphi)$ (кардиоида) и $r = a$ (окружность радиуса a с центром в начале координат) вне кардиоиды.

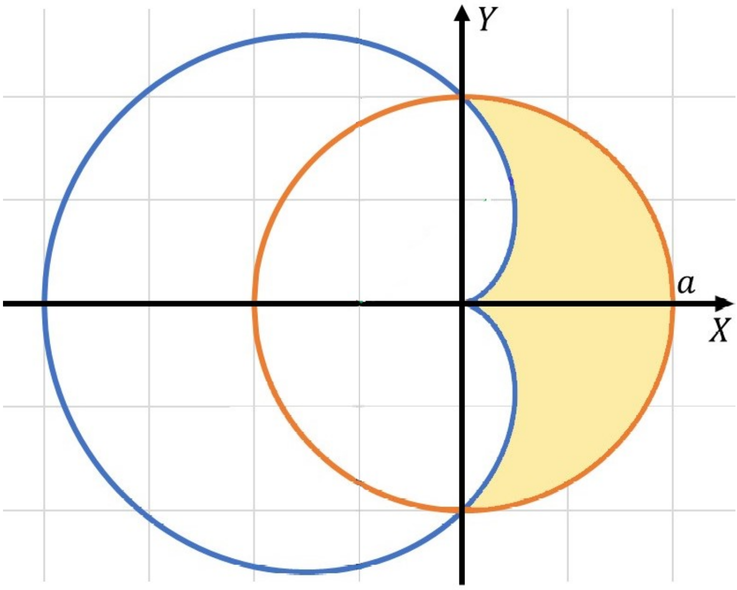

Рис. к задаче 20

Из «картинки» видно, что точки компакта M находятся на лучах $\varphi = \varphi_0$, $\varphi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, и на каждом таком луче r меняется от $r = a(1-\cos\varphi)$ до $r = a$. Поэтому получаем

$$S(M) = \iint_M dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a(1-\cos\varphi)}^{a} rdr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{r^2}{2}\bigg|_{a(1-\cos\varphi)}^{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi (a^2 - a^2(1-\cos\varphi)^2) = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\varphi - \cos^2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos\varphi - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\cos 2\varphi}_{T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi}\right) d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(2\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot\pi\right) = \frac{a^2}{4}(8-\pi).$$

Площадь поверхности

Пусть поверхность S однозначно проецируется на компакт σ в плоскости Oxy, то есть может быть задана функцией двух переменных $z = z(x,y)$. И пусть $z(x,y)$, z'_x, z'_y – непрерывны на σ. Тогда площадь поверхности S можно найти так:

$$S = \iint_\sigma \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2} dxdy.$$

Замечание. Нас не должно смущать то, что площадь поверхности и сама поверхность обозначены одинаково (так проще).

Замечание. Если уравнение $g(x,y) = 0$ в плоскости Oxy задает кривую L (не важно, ограниченную или нет, замкнутую или нет…), то в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ уравнение $g(x,y) = 0$ задает цилиндр, «построенный» на этой кривой. Например, на плоскости Oxy уравнение $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ задает окружность радиуса R с центром в начале координат, а в $\mathbb{R}^3$ это же уравнение $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ задает прямой круговой цилиндр.

Задача 21. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $2z = x^2$, отсеченной плоскостями $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$.

Заметим, что все поверхности $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$ являются «плоскими цилиндрами», образующая которых параллельна оси Oz. Пересечение этих цилиндров также является цилиндром. На плоскости Oxy кривые ограничивают только один компакт – треугольник OAB (см. рис.)

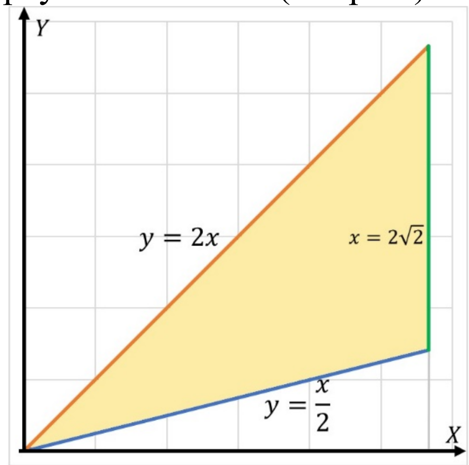

Рис. к задаче 21

Цилиндр $2z = x^2$ построен на кривой $2z = x^2$, лежащей в плоскости Oxz, его образующая параллельна оси Oy. То есть в $\mathbb{R}^3$ уравнение $2z = x^2$ задает «бесконечное параболическое корыто, вытянутое вдоль оси Oy». Из этого «корыта» цилиндром, построенным на треугольнике OAB (сверху – вниз) вырезается лепесток, площадь которого нам и надо найти.

$$z = \frac{x^2}{2} \Longrightarrow z'_x = x,\ z'_y = 0 \Longrightarrow$$

$$S = \iint_\sigma \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}dxdy = \iint_\sigma \sqrt{1 + x^2 + 0}dxdy =$$

$$= \int_0^{2\sqrt{2}} dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} \sqrt{1 + x^2}dy = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2}dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} dy =$$

$$= \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2}dx \left(2x - \frac{x}{2}\right) = \frac{3}{2}\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2}xdx =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2}d(1 + x^2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(3^3 - 1) = \frac{27-1}{2} = 13.$$

Задача 22. Вычислить площадь части поверхности конуса $z^2 = 2xy$, отсеченной плоскостями $x = a$, $y = a$, $x, y \geq 0$, $a > 0$.

Заметим, что все поверхности $x = a$, $y = a$ являются «плоскими цилиндрами», образующая которых параллельна оси Oz. Пересечение этих цилиндров также является цилиндром. На плоскости Oxy прямые $x = a$, $y = a$ и условия $x, y \geq 0$, $a > 0$ только один компакт – квадрат (см. рис.)

То, что уравнение $z^2 = 2xy$ задает конус, можно понять, например, сделав замену координат (поворот + растяжение) $\begin{cases} x = x' - y' \\ y = x' + y' \end{cases}$.

Итак, $z^2 = 2xy$ – конус, осью симметрии которого является прямая $y = x$ в плоскости Oxy, а прямые $x = 0$ и $y = 0$ – образующими конуса.

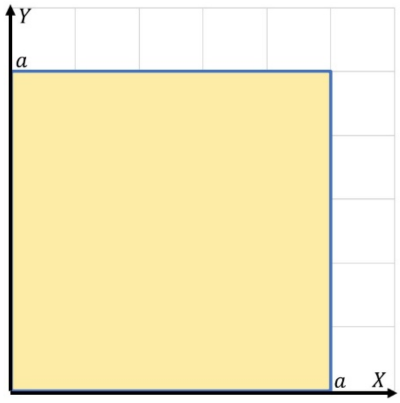

Рис. к задаче 22

Есть 2 кусочка конуса, которые проецируются на σ (лежащие выше и ниже плоскости Oxy, при этом

$z_{\text{верх}} = \sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{y}$, $\;z_{\text{ниж}} = -\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{y} \Longrightarrow S_{\text{общ}} = 2S_{\text{верх}}$.

$$\Longrightarrow S_{\text{общ}} = 2\iint_\sigma \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\,dxdy =$$

$$= 2\iint_\sigma \sqrt{1 + \left(\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\sqrt{x}\right)^2}\,dxdy =$$

$$= 2\iint_\sigma \sqrt{1 + \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y}}\,dxdy = 2\int_0^a dx\int_0^a \sqrt{\frac{2xy + x^2 + y^2}{2xy}}\,dy =$$

$$= 2\int_0^a dx\int_0^a \sqrt{\frac{(x+y)^2}{2xy}}\,dy \underbrace{=}_{x,y\ge 0\Rightarrow |x+y| = x+y} 2\int_0^a dx\int_0^a \frac{x+y}{\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{y}}\,dy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^a dx\int_0^a \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)dy = \sqrt{2}\int_0^a dx\left(2\sqrt{x}\sqrt{y} + \frac{2}{3}\frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^a dx\left(2\sqrt{a}\sqrt{y} + \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{2}\left(2\sqrt{a}\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{4a\sqrt{a}}{3}\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{4a^2}{3} + \frac{4a^2}{3}\right) = \frac{8\sqrt{2}a^2}{3}.$$

Замечание. Интеграл

$$\int_0^a dx\int_0^a \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)dy = \int_0^a dx\int_0^a \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)dy + \int_0^a dx\int_0^a \left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)dy,$$

а это с точностью до обозначений два одинаковых интеграла.

Задача 23. Вычислить площадь части поверхности конуса $y^2 + z^2 = x^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

Уравнение $y^2+z^2=x^2$ задает конус, у которого осью симметрии является ось Ox. Найдем пересечение конуса с плоскостью Oxy:

$$\begin{cases} y^2+z^2=x^2 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=x^2 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \vee y=-x \\ z=0\,. \end{cases}$$

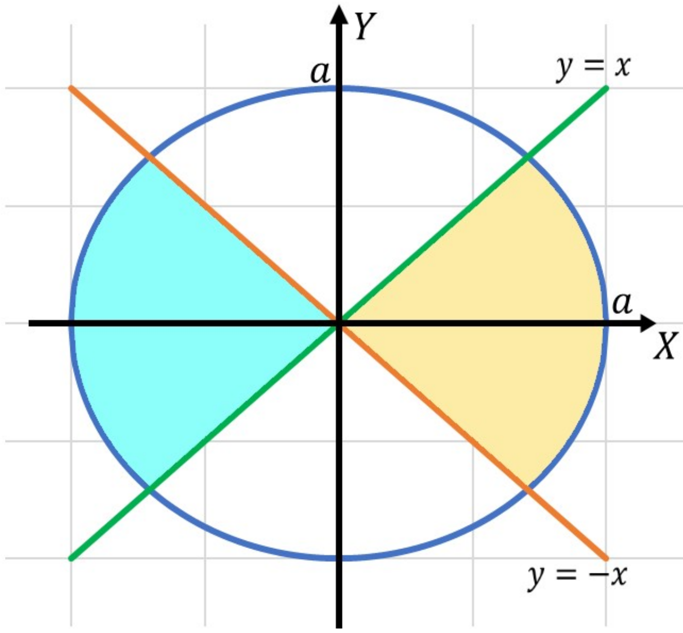

Рис. к задаче 23

Заметим, что будет 8 равных лепестков, площадь каждого равна интегралу по σ_0:

$z^2=x^2-y^2 \Longrightarrow z_{\text{верх}}=z=\sqrt{x^2-y^2}, \quad z_{\text{ниж}}=-\sqrt{x^2-y^2}.$

$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}, \quad z'_y=\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}} \Longrightarrow$

$$S=8\iint_{\sigma_0}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{y^2}{x^2-y^2}}\,dxdy=8\iint_{\sigma_0}\sqrt{\frac{x^2-y^2+x^2+y^2}{x^2-y^2}}\,dxdy=$$

$$=8\iint_{\sigma_0}\sqrt{\frac{2x^2}{x^2-y^2}}\,dxdy=8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^a\sqrt{\frac{r^2\cos^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}}\,rdr=$$

$$=8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^a\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}}\,rdr=8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{|\cos\varphi|d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}\int_0^a rdr=$$

$$=8\sqrt{2}\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}=4\sqrt{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\sin\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}=4\sqrt{2}a^2\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\sin\varphi}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\sin^2\varphi}}=$$

$$=4a^2\arcsin\frac{\sin\varphi\cdot\sqrt{2}}{1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=4a^2\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}-0\right)=4a^2\arcsin 1=4a^2\cdot\frac{\pi}{2}=$$
$$=2\pi a^2.$$

Вычисление объемов с помощью двойных интегралов

Пусть M – цилиндроид, ограниченный цилиндром $\varphi(x,y)=0$, высекающим на плоскости Oxy компакт σ, ограниченный кривой $\varphi(x,y)=0$, и поверхностями $z=z_{\text{в}}(x,y)$ (сверху) и $z=z_{\text{н}}(x,y)$ (снизу), тогда объем этого цилиндроида будет равен

$V=\iint_{\sigma}(z_{\text{в}}(x,y)-z_{\text{н}}(x,y))dxdy.$

Задача 24. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x+z=4$, $z=0$.

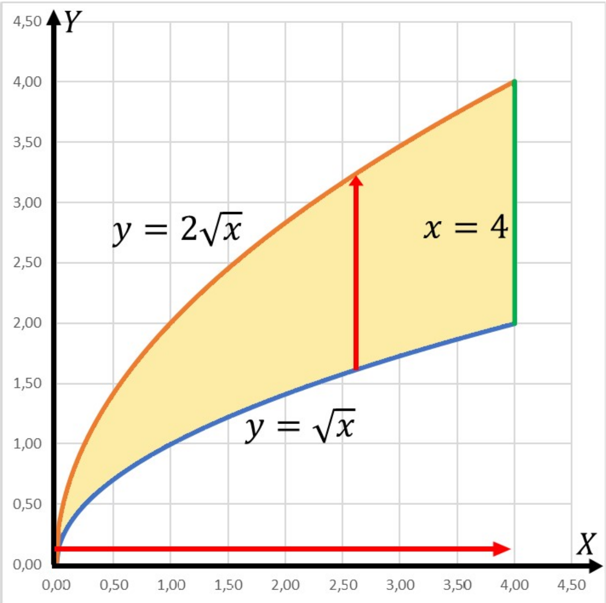

Рис. к задаче 24

Уравнения $y=\sqrt{x}$ и $y=2\sqrt{x}$ задают цилиндры в $\mathbb{R}^3$, построенные на «половинках парабол». Пересечение плоскости $x+z=4$ с плоскостью $z=0$ можно найти, решив систему $\begin{cases}x+z=4\\ z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ z=0\end{cases}$, то есть плоскость $x+z=4$ пересекает плоскость $z=0$ по прямой $x=4$. В этом случае $z_{\text{в}}(x,y)=4-x$, $z_{\text{н}}(x,y)=0$, поэтому

$V=\iint_{\sigma}(z_{\text{в}}(x,y)-z_{\text{н}}(x,y))dxdy=\int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\big((4-x)-0\big)dy=$

$=\int_0^4(4-x)\big(2\sqrt{x}-\sqrt{x}\big)dx=\int_0^4\left(4x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\left(4\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^4=$

$=\frac{8}{3}\cdot 8-\frac{2}{5}\cdot 32=64\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{128}{15}.$

Задача 25. Найти объем компакта, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$, $x+y=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, лежащего в 1 октанте.

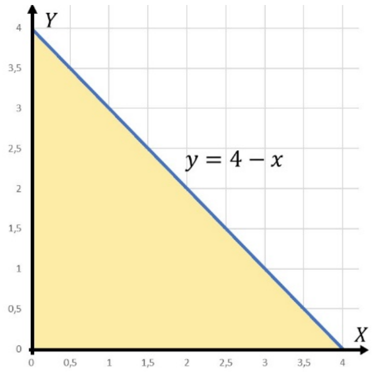

Рис. к задаче 25

Уравнение $z = x^2 + y^2$ задает эллиптический параболоид (или «чашу»). Параболоид $z = x^2 + y^2$ и плоскость $z = 0$ высекают часть пространства от плоскости до параболоида, то есть $z_в(x, y) = x^2 + y^2$, $z_н(x, y) = 0$. Плоскости $x = 0$, $y = 0$ «разрезают» ее на 4 части (нам нужна та, которая в 1 октанте). Плоскость $x + y = 4$ (являющаяся «плоским цилиндром», построенным на прямой $x + y = 4$) отсекает компакт, объем которого

$$V = \iint_\sigma (z_в(x, y) - z_н(x, y))dxdy = \int_0^4 dx \int_0^{4-x} \left((x^2 + y^2) - 0\right)dy =$$

$$= \int_0^4 dx \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{4-x} = \frac{1}{3}\int_0^4 (3x^2(4 - x) + (4 - x)^3)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^4 (12x^2 - 3x^3 + 64 - 48x + 12x^2 - x^3)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^4 (64 - 48x + 24x^2 - 4x^3)dx = \frac{4}{3}\int_0^4 (16 - 12x + 6x^2 - x^3)dx =$$

$$= \frac{4}{3}\left(16x - 6x^2 + 2x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^4 = \frac{4}{3}(64 - 96 + 128 - 64) = \frac{4}{3} \cdot 32 = \frac{128}{3}.$$

Задача 26. Найти объем части шара, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, вне цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

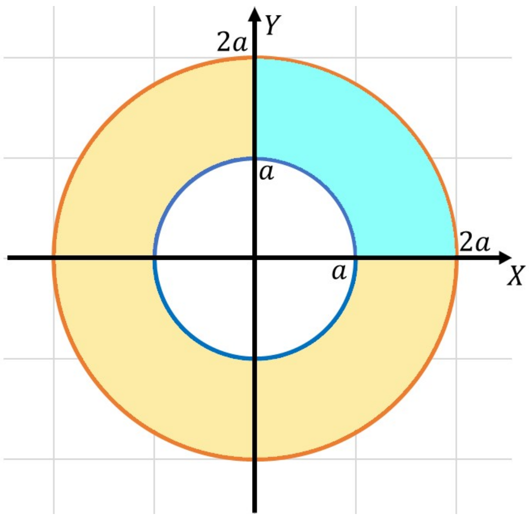

Рис. к задаче 26

Задачу можно сформулировать так: «из яблока вырезали сердцевину; какой объем яблока остался?»

Проекция оставшейся части шара на плоскость Oxy представляется собой множество точек σ, ограниченных двумя окружностями $x^2 + y^2 = 4a^2$ и $x^2 + y^2 = a^2$ (кольцо). Весь объем состоит из восьми равных по объему кусочков:

$$V = 8\iint_{\sigma_0}(z_{\text{в}}(x,y) - z_{\text{н}}(x,y))dxdy = 8\iint_{\sigma_0}\left(\left(\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\right) - 0\right)dxdy =$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_a^{2a}\sqrt{4a^2 - r^2}rdr = 8\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int_a^{2a}\sqrt{4a^2 - r^2}d(4a^2 - r^2) =$$

$$= -2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot(4a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^{2a} = -\frac{4\pi}{3}\left(0 - (3a^2)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{4\pi}{3}3\sqrt{3}a^3 = 4\pi\sqrt{3}a^3.$$