МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ МГУ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ,

ЧАСТЬ 3

А.И.КОЗКО.Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ,

2023

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов. В этом пособии содержится материал, относящийся к курсу математического анализа, читаемому студентам второго курса химического факультета МГУ.

1. Уравнения вида $y^{(n)}(x) = f(x)$

Задача 1. Решить задачу Коши:

$y''' = \frac{6}{x^3}$

$y(1) = 2,\ y'(1) = 1,\ y''(1) = 1.$

В подобных задачах лучше не искать общее решение, зависящее от трех постоянных, а находить значения постоянных по мере понижения порядка уравнения.

$$y''' = \frac{6}{x^3} \Longrightarrow y'' = \int \frac{6}{x^3} dx = -\frac{3}{x^2} + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R},$$

но по условию $y''(1) = 1$, поэтому получаем, что

$$1 = -\frac{3}{1^2} + C_1 \Longrightarrow C_1 = 4 \Longrightarrow y'' = -\frac{3}{x^2} + 4.$$

Далее,

$$y' = \int \left(-\frac{3}{x^2} + 4\right) dx = \frac{3}{x} + 4x + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R},$$

но по условию $y'(1) = 1$, поэтому получаем, что

$$1 = \frac{3}{1} + 4 + C_2 \Longrightarrow C_2 = -6 \Longrightarrow y' = \frac{3}{x} + 4x - 6.$$

И далее,

$$y = \int \left(\frac{3}{x} + 4x - 6\right) dx = 3\ln|x| + 2x^2 - 6x + C_3,\ C_3 \in \mathbb{R},$$

но по условию $y(1) = 2$, поэтому окончательно получаем, что

$$2 = 3\ln|1| + 2 - 6 + C_3 \Longrightarrow C_3 = 6 \Longrightarrow y = 3\ln|x| + 2x^2 - 6x + 6.$$

Ответ: $y(x) = 3\ln|x| + 2x^2 - 6x + 6.$

Замечание. Как это было принято ранее, в дальнейшем мы будем обозначать произвольные постоянные одним символом, давая его описание в каждой строчке.

Задача 2. Решить задачу Коши:

$y'' = 4\cos 2x$

$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

Понизим порядок уравнения

$y'' = 4\cos 2x \Longrightarrow y' = 4\int \cos 2x\, dx = 2\sin 2x + C,\ C \in \mathbb{R}$,

но по условию $y'(0) = 0$, поэтому получаем, что

$0 = 2\sin 0 + C \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow y' = 2\sin 2x$.

Далее, проинтегрируем это уравнение

$y = 2\int \sin 2x\, dx = -\cos 2x + C,\ C \in \mathbb{R}$,

но по условию $y(0) = 0$, поэтому получаем, что

$0 = -\cos 0 + C \Longrightarrow C = 1 \Longrightarrow y = -\cos 2x + 1$.

Ответ: $y(x) = -\cos 2x + 1$.

Задача 3. Решить уравнение $y'' = \frac{1}{1+x^2}$.

Понизим порядок уравнения

$y'' = \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow y' = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$.

Далее,

$$y = \int (\operatorname{arctg} x + C_1) dx = x \operatorname{arctg} x - \int x d \operatorname{arctg} x + C_1 x =$$
$$= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx + C_1 x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + C_1 x =$$
$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1 x + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y(x) = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1 x + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Решить задачу Коши:

$y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2},\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Понизим порядок уравнения

$y'' = \frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow y' = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,\ C \in \mathbb{R}$,

но по условию $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, поэтому получаем, что

$1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + C \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow y' = \operatorname{tg} x$.

Далее,

$y = \int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C,\ C \in \mathbb{R}$, но по условию $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\ln 2}{2}$, поэтому получаем, что

$\frac{\ln 2}{2}=-\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|+C \Longrightarrow \frac{\ln 2}{2}=-\ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|+C \Longrightarrow \frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 2}{2}+C \Longrightarrow C=0 \Longrightarrow$
$y=-\ln|\cos x|$.

Ответ: $y(x)=-\ln|\cos x|$.

2. Уравнения вида $F(x,y',y'')=0$

Заметим, что это уравнение не содержит y. Сделаем замену $y'=p(x) \Longrightarrow y''=p'(x)$, получим уравнение $F(x,p(x),p'(x))=0$ – уравнение 1-го порядка. Решим его, найдем $p(x)$. Зная $p(x)$, найдем $y(x)$.

Задача 1. Решить уравнение $x^3y''+x^2y'=1$.

1) Сделаем замену $y'=p(x) \Longrightarrow y''=p'(x)$, получим уравнение

$x^3p'+x^2p=1$ – линейное уравнение 1-го порядка.

2) Рассмотрим однородное уравнение $xp'+p=0 \Longrightarrow \frac{dp}{dx}=-\frac{p}{x}$

$\frac{dp}{p}=-\frac{dx}{x}$ – (потеряно решение $p(x)\equiv 0$).

Проинтегрируем это уравнение, пропотенцируем, получим

$p(x)=\frac{C}{x}$, $C\in\mathbb{R}$.

3) Сделаем вариацию постоянной. Будем искать решение уравнения

$x^3p'+x^2p=1$ в виде $p(x)=\frac{C(x)}{x}$.

Так как в этом случае $p'(x)=\frac{C'x-C}{x^2}$, то после подстановки в уравнение $x^3p'+x^2p=1$ получим, что

$x^3\cdot\frac{C'x-C}{x^2}+x^2\cdot\frac{C}{x}\equiv 1$

$C'x^2\equiv 1 \Longrightarrow dC=\frac{1}{x^2}dx$

Проинтегрируем уравнение, получим

$C(x)=-\frac{1}{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Поэтому $p(x)=\frac{C(x)}{x}=-\frac{1}{x^2}+\frac{C}{x}$, $C\in\mathbb{R}$.

4) Сделаем обратную замену. Так как

$y' = p(x) \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x}\,, C_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) \int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x}\right) dx =$
$= \frac{1}{x} + C_1 \ln|x| + C_2,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = \frac{1}{x} + C_1 \ln|x| + C_2,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 2. Решить уравнение $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

1) Сделаем замену $y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'(x)$, получим уравнение $p' + p \operatorname{tg} x = \sin 2x$ – линейное уравнение 1-го порядка.

2) Рассмотрим однородное уравнение $p' + p \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{p \sin x}{\cos x}$

$\frac{dp}{p} = -\frac{\sin x dx}{\cos x}$ – (потеряно решение $p(x) \equiv 0$).

Проинтегрируем это уравнение, пропотенцируем, получим

$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{\sin x dx}{\cos x} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{d \cos x}{\cos x} \Rightarrow$

$\ln|p| = \ln|\cos x| + C, C \in \mathbb{R}$

$p(x) = C \cos x\,,\ C \in \mathbb{R}.$

3) Сделаем вариацию постоянной. Будем искать решение уравнения $p' + p \operatorname{tg} x = \sin 2x$ в виде $p(x) = C(x) \cos x$.

Так как в этом случае $p'(x) = C' \cos x - C \sin x$, то после подстановки в уравнение $p' + p \operatorname{tg} x = \sin 2x$ получим, что

$C' \cos x - C \sin x + C \cos x \cdot \operatorname{tg} x \equiv \sin 2x$

$C' \cos x \equiv \sin 2x \Rightarrow dC = 2 \sin x\, dx$

Проинтегрируем уравнение, получим

$C(x) = -2 \cos x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Поэтому $p(x) = C(x) \cos x = (-2 \cos x + C) \cos x = -2 \cos^2 x + C \cos x\,,$ $C \in \mathbb{R}$.

4) Сделаем обратную замену. Так как

$y' = p(x) \Rightarrow y' = -2 \cos^2 x + C_1 \cos x\,, C_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$y(x) = \int(-2 \cos^2 x + C_1 \cos x) dx = \int(-1 - \cos 2x + C_1 \cos x)\, dx =$
$= -x - \frac{1}{2} \sin 2x + C_1 \sin x + C_2,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = -x - \frac{1}{2} \sin 2x + C_1 \sin x + C_2,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 3. Решить уравнение $y''x\ln x = y'$.

1) Сделаем замену $y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'(x)$, получим уравнение $p'x\ln x = p$ – уравнение с разделяющимися переменными.

2) Решим это уравнение.

$p'x\ln x = p \Rightarrow \frac{dp}{dx}x\ln x = p$

$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x\ln x}$ – (потеряно решение $p(x) \equiv 0$).

Проинтегрируем это уравнение, пропотенцируем, получим

$\int\frac{dp}{p} = \int\frac{dx}{x\ln x} \Rightarrow \int\frac{dp}{p} = \int\frac{d\ln x}{\ln x} \Rightarrow$

$\ln|p| = \ln|\ln x| + C, C \in \mathbb{R}$

$p(x) = C\ln x,\ C \in \mathbb{R}$.

3) Сделаем обратную замену. Так как

$y' = p(x) \Rightarrow y' = C_1\ln x, C_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$y(x) = \int C_1\ln x\,dx = C_1x\ln x - C_1\int xd\ln x = C_1x\ln x - C_1\int x\cdot\frac{1}{x}dx =$
$= C_1x\ln x - C_1x + C_2 = C_1x(\ln x - 1) + C_2,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ответ: $y(x) = C_1x(\ln x - 1) + C_2,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Решить уравнение $xy'' - y' = x^2e^x$.

1) Сделаем замену $y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'(x)$, получим уравнение $xp' - p = x^2e^x$ – линейное уравнение 1-го порядка.

2) Рассмотрим однородное уравнение $xp' - p = 0 \Rightarrow x\frac{dp}{dx} = p$

$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$ – (потеряно решение $p(x) \equiv 0$).

Проинтегрируем это уравнение, пропотенцируем, получим

$\int\frac{dp}{p} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow$

$\ln|p| = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$

$p(x) = Cx,\ C \in \mathbb{R}$.

3) Сделаем вариацию постоянной. Будем искать решение уравнения $xp' - p = x^2e^x$ в виде $p(x) = C(x)x$.

Так как в этом случае $p'(x) = C'x - C$, то после подстановки в уравнение $xp' - p = x^2e^x$ получим, что

$x(C'x - C) - Cx \equiv x^2e^x$

$C'x^2 \equiv x^2e^x \Rightarrow dC = e^x dx$

Проинтегрируем уравнение, получим

$C(x) = e^x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Поэтому $p(x) = C(x)x = (e^x + C)x = xe^x + Cx,\ C \in \mathbb{R}.$

4) Сделаем обратную замену. Так как

$y' = p(x) \Rightarrow y' = xe^x + C_1x, C_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$y(x) = \int(xe^x + C_1x)dx = \int xde^x + C_1 \cdot \frac{1}{2}x^2 = xe^x - \int e^x dx + C_1 \cdot \frac{1}{2}x^2 =$
$= xe^x - e^x + C_1x^2 + C_2,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = xe^x - e^x + C_1x^2 + C_2,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 5. Решить уравнение $y'' + 2x(y')^2 = 0.$

1) Сделаем замену $y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'(x)$, получим уравнение

$p' + 2xp^2 = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

2) Решим это уравнение.

$p' = -2xp^2 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -2xp^2$

$-\frac{dp}{p^2} = 2xdx$ – (потеряно решение $p(x) \equiv 0$).

Проинтегрируем это уравнение, пропотенцируем, получим

$-\int \frac{dp}{p^2} = \int 2xdx \Rightarrow$

$\frac{1}{p} = x^2 + C, C \in \mathbb{R}$

$p(x) = \frac{1}{x^2+C},\ C \in \mathbb{R}.$

3) Сделаем обратную замену.

Рассмотрим 3 случая:

А) $C = 0$, тогда уравнение примет вид

$y' = p(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow$

$y(x) = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C_1, \; C_1 \in \mathbb{R}$.

Б) $C > 0$, тогда уравнение примет вид

$y' = \frac{1}{x^2+C}$, $C > 0$

$y(x) = \int \frac{1}{x^2+C} dx = \frac{1}{\sqrt{C}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{C}} + C_1, \; C > 0, C_1 \in \mathbb{R}$,

что можно переписать в виде ($\sqrt{C} \to C_2$)

$y(x) = \int \frac{1}{x^2+C} dx = \frac{1}{C_2} \operatorname{arctg} \frac{x}{C_2} + C_1, \; C_2 > 0, C_1 \in \mathbb{R}$.

В) $C < 0$, тогда уравнение примет вид

$y' = \frac{1}{x^2+C}$, $C < 0$

$y(x) = \int \frac{1}{x^2+C} dx = \int \frac{1}{x^2-|C|} dx = \frac{1}{2\sqrt{|C|}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{|C|}}{x+\sqrt{|C|}} \right| + C_1 \; = \frac{1}{2\sqrt{-C}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{-C}}{x+\sqrt{-C}} \right| + C_1$,
$C < 0, C_1 \in \mathbb{R}$, что можно переписать в виде

$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{C}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{C}}{x+\sqrt{C}} \right| + C_1, \; C > 0, C_1 \in \mathbb{R}$,

а это, в свою очередь, можно переписать в виде

$y(x) = \frac{1}{2C_2} \ln \left| \frac{x-C_2}{x+C_2} \right| + C_1, \; C_2 > 0, C_1 \in \mathbb{R} \;\; (\sqrt{C} \to C)$

Ответ: $y(x) = -\frac{1}{x} + C_1, y(x) = \frac{1}{C_2} \operatorname{arctg} \frac{x}{C_2} + C_1, \;\; y(x) = \frac{1}{2C_2} \ln \left| \frac{x-C_2}{x+C_2} \right| + C_1$,
$C_2 > 0, C_1 \in \mathbb{R}$.

3. Уравнения вида $\boldsymbol{F(y, y', y'') = 0}$

Заметим, что это уравнение не содержит x. Сделаем замену

$$y' = \frac{dy}{dx} = p(y) = p \;\; \Rightarrow y'' = \frac{dy'(x)}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'_y \cdot p(y) \Rightarrow y''_x = p'_y p$$

и получим уравнение, не содержащее переменную x, – уравнение 1-го порядка. Решим его, найдем $p(y)$. Зная $p(y)$, найдем $y(x)$.

Задача 1. Решить уравнение $yy'' + {y'}^2 = 0$.

Заметим сразу, что $y \equiv C, C \in \mathbb{R}$ является решением этого уравнения и не будем бояться потерять это решение в дальнейшем.

1) Сделаем замену $y' = p(y) \Rightarrow y'' = p'_y p$, получим уравнение ($p'_y = p'$)

$yp'p + p^2 = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$\Longrightarrow y\frac{dp}{dy} = -p$ (потеряно решение $p(y) \equiv 0$)

$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y}$.

Проинтегрируем это уравнение, пропотенцируем, получим

$p(y) = \frac{C}{y}$, $C \in \mathbb{R}$.

2) Сделаем обратную замену. Так как

$y' = p(y) \Longrightarrow y' = \frac{C}{y}$, $C \in \mathbb{R} \Longrightarrow ydy = Cdx$, $C \in \mathbb{R}$

Проинтегрируем это уравнение, получим

$\int ydy = \int Cdx$, $C \in \mathbb{R}$

$\frac{y^2}{2} = Cx + C_2$, $C, C_2 \in \mathbb{R}$

$y^2 = Cx + C_2$, $C, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ответ: $y^2 = Cx + C_2$, $C, C_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 2. Решить уравнение $y'' + 2yy'^3 = 0$.

Заметим сразу, что $y \equiv C, C \in \mathbb{R}$ является решением этого уравнения и не будем бояться потерять это решение в дальнейшем.

1) Сделаем замену $y' = p(y) \Longrightarrow y'' = p'_y p$, получим уравнение

$p'p + 2yp^3 = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$\Longrightarrow \frac{dp}{dy} = -2yp^2$

$-\frac{dp}{p^2} = 2ydy$ – (потеряно решение $p(y) \equiv 0$).

Проинтегрируем это уравнение, получим

$\frac{1}{p} = y^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

2) Сделаем обратную замену.

Заметим, что $p = \frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} \Longrightarrow y^2 + C = \frac{dx}{dy}$, $C \in \mathbb{R} \Longrightarrow$

$(y^2 + C)dy = dx$.

Проинтегрируем это уравнение, получим

$\int (y^2 + C)dy = \int dx$, $C \in \mathbb{R}$

$\frac{y^3}{3} + Cy = x + C_2,\ \ C, C_2 \in \mathbb{R}$

$y^3 + Cy = 3x + C_2,\ \ C, C_2 \in \mathbb{R}$

$x = \frac{y^3}{3} + C_1 y + C_2,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $x = \frac{y^3}{3} + C_1 y + C_2,\ \ y \equiv C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 3. Решить уравнение $y'' \operatorname{tg} y = 2{y'}^2$.

Заметим сразу, что $y \equiv C, C \in \mathbb{R}$ является решением этого уравнения и не будем бояться потерять это решение в дальнейшем.

1) Сделаем замену $y' = p(y) \Longrightarrow y'' = p'_y p$, получим уравнение

$p' p \operatorname{tg} y = 2p^2$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$\Longrightarrow \frac{dp}{dy} = 2p \operatorname{ctg} y$

$\frac{dp}{p} = 2\frac{\cos y dy}{\sin y}$ – (потеряно решение $p(y) \equiv 0$).

Проинтегрируем это уравнение, пропотенцируем и получим

$\int \frac{dp}{p} = 2\int \frac{\cos y dy}{\sin y}$

$\int \frac{dp}{p} = 2\int \frac{d \sin y}{\sin y}$

$\ln|p| = 2\ln|\sin y| + C,\ C \in \mathbb{R}$

$p(y) = C_1 \sin^2 y\,, C_1 \in \mathbb{R}.$

2) Сделаем обратную замену.

$y'(x) = C_1 \sin^2 y\,, C_1 \in \mathbb{R}$

$\int \frac{dy}{\sin^2 y} = C_1 \int dx$

$-\operatorname{ctg} y = C_1 x + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$\operatorname{ctg} y = C_1 x + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Ответ: $\operatorname{ctg} y = C_1 x + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 4. Решить уравнение $2yy'' = 1 + {y'}^2$.

1) Сделаем замену $y' = p(y) \Longrightarrow y'' = p'_y p$, получим уравнение

$2yp'p = 1 + p^2$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$\Longrightarrow 2yp\frac{dp}{dy} = 1 + p^2$

$\frac{2pdp}{1+p^2} = \frac{dy}{y}$

Проинтегрируем это уравнение, пропотенцируем и получим

$\int \frac{d(1+p^2)}{1+p^2} = \int \frac{dy}{y}$

$\ln|1 + p^2| = \ln|y| + C,\ C \in \mathbb{R}$

$1 + p^2(y) = C_1 y, C_1 \in \mathbb{R}$

$p^2(y) = C_1 y - 1, C_1 \in \mathbb{R}$

$p(y) = \pm\sqrt{C_1 y - 1}, C_1 \in \mathbb{R}.$

2) Сделаем обратную замену.

$y'(x) = \pm\sqrt{C_1 y - 1}, C_1 \in \mathbb{R}$

$\pm \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \int dx\,, C_1 \in \mathbb{R}$

$\pm \frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = x + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$\pm\sqrt{C_1 y - 1} = C_1 x + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$(C_1 y - 1) = (C_1 x + C_2)^2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $(C_1 y - 1) = (C_1 x + C_2)^2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

4. Однородные уравнения n-го порядка

Задача 1. Решить уравнение $y'' - 4y' + 3y = 0.$

Рассмотрим уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3.$

Тогда фундаментальная система решений будет иметь вид

$y_1(x) = e^x$ и $y_2(x) = e^{3x}.$

И общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1e^x + C_2e^{3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 2. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Рассмотрим уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Тогда фундаментальная система решений будет иметь вид

$y_1(x) = e^{2x}$ и $y_2(x) = xe^{2x}$.

И общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ответ: $y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 3. Решить уравнение $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Рассмотрим уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i$,

то есть уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 2 + 3i,\ \lambda_2 = 2 - 3i$.

Тогда фундаментальная система решений будет иметь вид

$y_1(x) = e^{2x}\cos 3x$ и $y_2(x) = e^{2x}\sin 3x$.

И общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1e^{2x}\cos 3x + C_2e^{2x}\sin 3x\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

или

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Ответ: $y_{\text{общ.одн.}}(x) = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Решить уравнение $y'' - 4y = 0$.

Рассмотрим уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2$.

Тогда фундаментальная система решений будет иметь вид

$y_1(x) = e^{2x}$ и $y_2(x) = e^{-2x}$.

И общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 5. Решить уравнение $y'' + 4y = 0.$

Рассмотрим уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i,$

то есть уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 2i,\ \lambda_2 = -2i.$

Тогда фундаментальная система решений будет иметь вид

$y_1(x) = \cos 2x$ и $y_2(x) = \sin 2x.$

И общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Ответ: $y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 6. Решить уравнение $x'' + 3x' - 4x = 0,\ \ x = x(t).$

Рассмотрим уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow$ (не забывайте пользоваться теоремами Виета!)

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -4.$

Тогда фундаментальная система решений будет иметь вид

$x_1(t) = e^t$ и $x_2(t) = e^{-4t}.$

И общее решение однородного уравнения запишется в виде

$x_{\text{общ.одн.}}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-4t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $x_{\text{общ.одн.}}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-4t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 7. Решить уравнение $4\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = 0,\ \rho = \rho(\varphi).$

Рассмотрим уравнение относительно характеристического многочлена

$4\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}i,$

то есть уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{i}{2},\ \lambda_2 = -\frac{i}{2}.$

Тогда фундаментальная система решений будет иметь вид

$\rho_1(\varphi) = \cos\frac{\varphi}{2}$ и $\rho_2(\varphi) = \sin\frac{\varphi}{2}.$

И общее решение однородного уравнения запишется в виде

$\rho_{\text{общ.одн.}}(\varphi) = C_1 \cos\frac{\varphi}{2} + C_2 \sin\frac{\varphi}{2},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Ответ: $\rho_{\text{общ.одн.}}(\varphi) = C_1 \cos\frac{\varphi}{2} + C_2 \sin\frac{\varphi}{2},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 8. Решить уравнение $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 0,\ s = s(t).$

Рассмотрим уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i,$

то есть уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня

$\Leftrightarrow \lambda_1 = -1 + i,\ \lambda_2 = -1 - i.$

Тогда фундаментальная система решений будет иметь вид

$s_1(t) = e^{-t}\cos t$ и $s_2(t) = e^{-t}\sin t.$

И общее решение однородного уравнения запишется в виде

$s_{\text{общ.одн.}}(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Ответ: $s_{\text{общ.одн.}}(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 9. Решить уравнение $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$

Рассмотрим уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0.$

Попробуем найти целые корни этого многочлена. Их следует искать среди делителей свободного члена, то есть среди чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Подставляя их в уравнение, находим, что $\lambda = 1$ – корень этого многочлена, поэтому

$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)P_2(\lambda)$, где $P_2(\lambda)$ – многочлен 2-й степени относительно λ. Как его найти? Например, делением столбиком!

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$

Тогда фундаментальная система решений будет иметь вид

$y_1(x) = e^x,\;\; y_2(x) = e^{2x},\; y_3(x) = xe^{2x}.$

И общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x},\; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x},\; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Задача 10. Решить уравнение $y^{IV} - 16y = 0.$

Рассмотрим уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 2,\; \lambda_2 = -2,\; \lambda_3 = 2i,\; \lambda_4 = -2i.$

Тогда фундаментальная система решений будет иметь вид

$y_1(x) = e^{2x},\; y_2(x) = e^{-2x},\; y_3(x) = \cos 2x, y_4(x) = \sin 2x.$

И общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x\,,\; C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x,$
$C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$

Задача 11. Решить уравнение $y''' - 8y = 0.$

Рассмотрим уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 2,\;\; \lambda_2 = -1 + \sqrt{3}i,\; \lambda_3 = -1 - \sqrt{3}i.$

Тогда фундаментальная система решений будет иметь вид

$y_1(x) = e^{2x},\;\; y_2(x) = e^{-x} \cos \sqrt{3}x,\; y_3(x) = e^{-x} \sin \sqrt{3}x.$

И общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^{2x} + e^{-x}\left(C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x\right),\; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^{2x} + e^{-x}\left(C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x\right),\; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Задача 12. Решить уравнение $y''' + 3ay'' + 3a^2 y' + a^3 y = 0.$

Рассмотрим уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^3 + 3a\lambda^2 + 3a^2\lambda + a^3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + a)^3.$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -a.$

Тогда фундаментальная система решений будет иметь вид

$y_1(x) = e^{-ax}, \; y_2(x) = xe^{-ax}, \; y_3(x) = x^2e^{-ax}.$

И общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1e^{-ax} + C_2xe^{-ax} + C_3x^2e^{-ax}, \; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

или

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = e^{-ax}(C_1 + C_2x + C_3x^2), \; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

Ответ: $y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1e^{-ax} + C_2xe^{-ax} + C_3x^2e^{-ax}, \; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Задача 13. Решить уравнение $4y^{IV} - 3y'' - y = 0.$

Рассмотрим уравнение относительно характеристического многочлена

$4\lambda^4 - 3\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (4\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = -1, \; \lambda_3 = \frac{i}{2}, \; \lambda_4 = -\frac{i}{2}.$

Тогда фундаментальная система решений будет иметь вид

$y_1(x) = e^{x}, \; y_2(x) = e^{-x}, \; y_3(x) = \cos\frac{x}{2}, \; y_4(x) = \sin\frac{x}{2}.$

И общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3\cos\frac{x}{2} + C_4\sin\frac{x}{2}, \; C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3\cos\frac{x}{2} + C_4\sin\frac{x}{2}, \; C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$

5. Неоднородные уравнения n-го порядка

5.1. Вариация постоянных

Задача 1. Решить уравнение $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x.$

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' + 4y' + 4y = 0.$

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}, \; A, B \in \mathbb{R},$

а фундаментальная система решений будет иметь вид:

$y_1(x) = e^{-2x} \Rightarrow y_1'(x) = -2e^{-2x}$

$y_2(x) = xe^{-2x} \Rightarrow y_2'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x}$

2) Для поиска общего решения исходного уравнения сделаем вариацию постоянных, то есть будем искать общее решение уравнения $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$ в виде $y(x) = A(x)e^{-2x} + B(x)xe^{-2x}$.

Решим систему

$$\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0 \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = e^{-2x}\ln x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A'e^{-2x} + B'xe^{-2x} = 0 \\ A'(-2e^{-2x}) + B'(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) = e^{-2x}\ln x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A' + B'x = 0 \\ -2A' + B'(1-2x) = \ln x \end{cases}$$ – линейная система относительно A' и B'.

Решив систему, получим

$$\begin{cases} A' = -x\ln x \\ B' = \ln x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B(x) = \int \ln x\, dx = x\ln x - x + C_1, \;\; C_1 \in \mathbb{R} \\ A(x) = -\int x\ln x\, dx = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C_2, \;\; C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

И тогда общее решение исходного неоднородного уравнения $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$ будет иметь вид

$$y(x) = e^{-2x}(A(x) + xB(x)) =$$

$$= e^{-2x}\left(-\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C_2 + x(x\ln x - x + C_1)\right) =$$

$$= e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3x^2}{4} + C_1x + C_2\right), \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y(x) = e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3x^2}{4} + C_1x + C_2\right), \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 2. Решить уравнение $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' + y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = i, \; \lambda_2 = -i.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = A\cos x + B\sin x\,, \;\; A, B \in \mathbb{R}$,

а фундаментальная система решений будет иметь вид:

$y_1(x) = \cos x \Rightarrow y_1'(x) = -\sin x$

$y_2(x) = \sin x \Rightarrow y_2'(x) = \cos x$

2) Для поиска общего решения исходного уравнения сделаем вариацию постоянных, то есть будем искать общее решение уравнения
$y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$ в виде $y(x) = A(x)\cos x + B(x)\sin x$.

Решим систему

$$\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0 \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = \frac{1}{\cos^3 x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A'\cos x + B'\sin x = 0 \\ -A'\sin x + B'\cos x = \frac{1}{\cos^3 x} \end{cases}$$ – линейная система относительно A' и B'.

Эту систему лучше решать методом Крамера.

$\Delta = 1$, поэтому

$\Delta_{A'} = A' = -\frac{\sin x}{\cos^3 x}$

$\Delta_{B'} = B' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Относительно A' и B' получим систему

$$\begin{cases} A' = -\frac{\sin x}{\cos^3 x} \\ B' = \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A(x) = -\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = \int \frac{d\cos x}{\cos^3 x} = -\frac{1}{2\cos^2 x} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \\ B(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C_2 = \frac{\sin x}{\cos x} + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

И тогда общее решение исходного неоднородного уравнения
$y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$ будет иметь вид

$$y(x) = A(x)\cos x + B(x)\sin x =$$

$$= \left(-\frac{1}{2\cos^2 x} + C_1\right)\cos x + \left(\frac{\sin x}{\cos x} + C_2\right)\sin x =$$

$$= -\frac{1}{2\cos x} + C_1\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + C_2\sin x =$$

$$= \frac{2\sin^2 x - 1}{\cos x} + C_1\cos x + C_2\sin x = -\frac{\cos 2x}{\cos x} + C_1\cos x + C_2\sin x, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y(x) = -\frac{\cos 2x}{\cos x} + C_1\cos x + C_2\sin x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 3. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' - 2y' + y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = Ae^x + Bxe^x,\ \ A, B \in \mathbb{R}$,

а фундаментальная система решений будет иметь вид:

$y_1(x) = e^x \Rightarrow y_1'(x) = e^x$

$y_2(x) = xe^x \Rightarrow y_2'(x) = e^x + xe^x$.

2) Для поиска общего решения исходного уравнения сделаем вариацию постоянных, то есть будем искать общее решение исходного уравнения $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$ в виде $y(x) = A(x)e^x + B(x)xe^x$.

Решим систему

$$\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0 \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A'e^x + B'xe^x = 0 \\ A'e^x + B'(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A' + B'x = 0 \\ A' + B'(1 + x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \end{cases}$$ – линейная система относительно A' и B'.

Решив систему, получим

$$\begin{cases} A' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \\ B' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C_1,\ \ C_1 \in \mathbb{R} \\ A(x) = -\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{4-x^2} + C_2,\ \ C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

И тогда общее решение исходного уравнения $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$ будет иметь вид

$y(x) = A(x)e^x + B(x)xe^x = \left(\sqrt{4-x^2} + C_2\right)e^x + \left(\arcsin\frac{x}{2} + C_1\right)xe^x =$

$$= e^{x}\left(\sqrt{4 - x^{2}} + x\arcsin\frac{x}{2} + C_{1}x + C_{2}\right),\ \ C_{1}, C_{2} \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y(x) = e^{x}\left(\sqrt{4 - x^{2}} + x\arcsin\frac{x}{2} + C_{1}x + C_{2}\right),\ \ C_{1}, C_{2} \in \mathbb{R}.$