

Билет 28: Выпуклость графика функции

Выпуклость непрерывной функции

Определение 28.1. Непрерывная на интервале (a, b) функция f , называется *выпуклой вниз* (соответственно, *выпуклой вверх*), если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, и любого числа $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ справедливо неравенство

$$(1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \geq f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \quad (1)$$

(соответственно, неравенство

$$(1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \leq f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \quad (1')$$

В правой части неравенства (1) стоит значение функции f в произвольной точке $x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$, расположенной на отрезке $[x_1, x_2]$, содержащемся в интервале (a, b) . Левая часть в (1) выражает собой ординату точки координатной плоскости, абсцисса которой равна $\alpha = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, 0 \leq \lambda \leq 1$, и которая лежит на прямолинейном отрезке (хорде), соединяющем точки $M_1(x_1, f(x_1))$ и $M_2(x_2, f(x_2))$ графика функции f .

Итак, если непрерывная функция f выпукла вниз на интервале (a, b) , то для любых его точек $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$, график функции f на отрезке $[x_1, x_2]$ расположен ниже хорды, стягивающей концевые точки графика на этом отрезке (см. рис.1, а)).

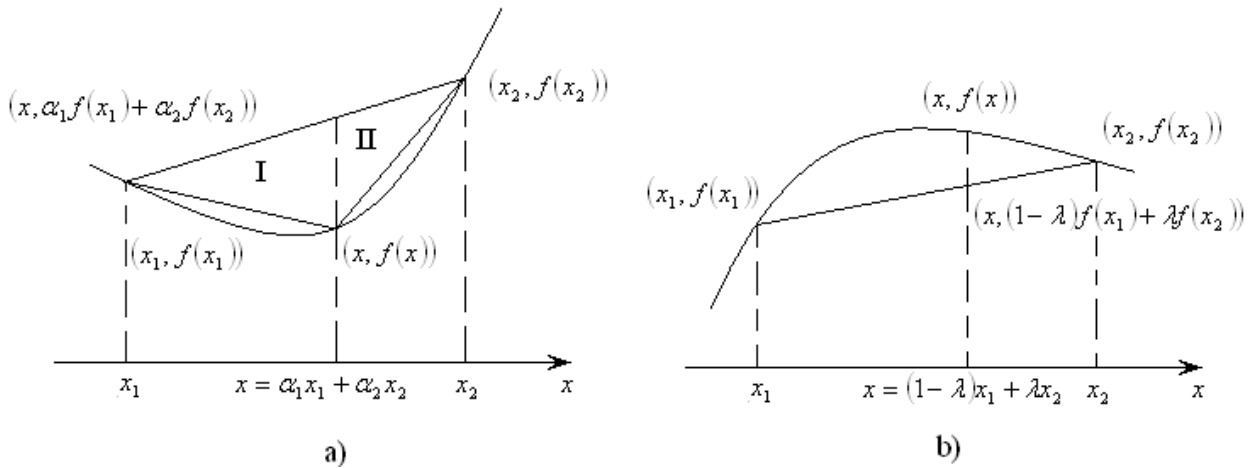


Рис.1

Аналогично, заключаем, что если непрерывная функция f выпукла вверх на интервале (a, b) , то для любых его точек $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$, график функции f на отрезке $[x_1, x_2]$ расположен выше хорды, стягивающей концевые точки графика на этом отрезке (см. рис.1, b)).

Обозначим $(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 = x$. Тогда $\lambda(x_2 - x_1) = x - x_1$, откуда $\lambda = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, 1 - \lambda = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}$.

Неравенство (1) принимает вид

$$f(x) \leq \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2) \quad (2)$$

или, после умножения обеих частей его на множитель $x_2 - x_1 > 0$,

$$(x_2 - x_1)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geq 0 \quad (3)$$

Поскольку $x_2 - x_1 = (x_2 - x) = (x - x_1)$, то после элементарных преобразований неравенства (4) переходит в неравенство

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} \quad (4)$$

справедливое для любого $x, x_1 < x < x_2$.

Итак, условие (1) равносильно неравенству (4).

В случае выпуклости вверх знаки неравенств (2)-(4) следует сменить на противоположные.

Выпуклость дифференцируемой функции

Теорема 28.1. *Для того, чтобы дифференцируемая на (a, b) функция f была выпукла вниз (вверх) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы её производная функция f' не убывала (не возрастала) на этом интервале.*

Доказательство. Доказательство проведём для выпуклой вниз функции. Докажем сначала, что её производная не убывает.

Пусть $[x_1, x_2] \subset (a, b)$, $x_1 < x_2$. Переходя в неравенстве (4) к пределу при $x \rightarrow x_1$, получим:

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (5)$$

Переходя в неравенстве (4) к пределу при $x \rightarrow x_2$, получим:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2) \quad (6)$$

Из неравенств (5) и (6) следуют неравенства

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2),$$

это и требовалось доказать.

Обратно, пусть производная функция f' не убывает на (a, b) . Пусть $[x_1, x_2] \subset (a, b)$, $x_1 < x_2$. Следует доказать, что выполняется неравенство (4). Для этого заметим, что $f(x)$ дифференцируема на (a, b) , следовательно, непрерывна на (a, b) и непрерывна на $[x_1, x_2] \subset (a, b)$. Тогда по теореме Лагранжа, применённой к отрезку $[x_1, x_2]$ где $x_1 < x < x_2$, находим:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f'(c_1)(x - x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \quad x_1 < c_1 < x \quad (7)$$

Аналогично, по теореме Лагранжа, применённой к отрезку $[x, x_2]$,

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = \frac{f'(c_2)(x_2-x)}{x_2-x} = f'(c_2), x < c_2 < x_2 \quad (8)$$

Так как f' не убывает на (a, b) , выполняется неравенство $f'(c_1) \leq f'(c_2)$, из которого следует, ввиду (7) и (8), неравенство (4), равносильное выпуклости вниз рассматриваемой функции.

Теорема 28.2. *Функция $f(x)$, дифференцируемая на интервале (a, b) , тогда и только тогда выпукла вниз на этом интервале, когда для любой точки $x_0 \in (a, b)$ и любой точки $x \in (a, b)$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.*

Противоположное неравенство $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, справедливо для всех, $x, x_0 \in (a, b)$ тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ выпукла вверх на (a, b) .

Доказательство. Доказательство проведём для случая выпуклой вниз функции. Пусть сначала дифференцируемая функция $f(x)$ выпукла вниз на (a, b) . Тогда, как установлено в теореме 28.1, справедливы неравенства (5) и (6). Неравенство (5) можно преобразовать к равносильному виду

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (9)$$

Преобразование состоит в умножении обеих частей неравенства (5) на положительный знаменатель и замене обозначений: точку x_1 заменяем на x_0 , а точку x_2 – на точку x , считая, что $x_0 < x$. Точно также, при $x_0 > x$, преобразуем неравенство (6), заменяя точку x_1 на точку x , а точку x_2 – на x_0 . После этого преобразования снова получим неравенство (9).

Таким образом, если дифференцируемая функция выпукла вниз на интервале (a, b) , то для всех $x, x_0 \in (a, b)$ выполняется неравенство (9). Для выпуклой вверх функции имеем, соответственно, $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Обратно, пусть для всех $x, x_0 \in (a, b)$ выполняется неравенство (9).

Рассмотрим произвольные точки $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. Применяя неравенство (9) к точке $x_0 = x_1$ и считая $x = x_2$, получим неравенство $f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$, а применяя его к точке $x_0 = x_2$ и считая $x = x_1$, получаем неравенства $f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$, на основании которых, с учётом условия $x_2 - x_1 > 0$, имеем $f(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f(x_1)$.

Следовательно, производная функции f' не убывает на (a, b) . По теореме 30.1 функция $f(x)$ выпукла вниз на (a, b) .

Геометрически свойство выпуклости вниз дифференцируемой функции f на (a, b) означает, что её график в пределах этого интервала располагается выше касательной, проведенной в любой точке графика; для выпуклой вверх дифференцируемой функции картина противоположная (см. рис. 2).

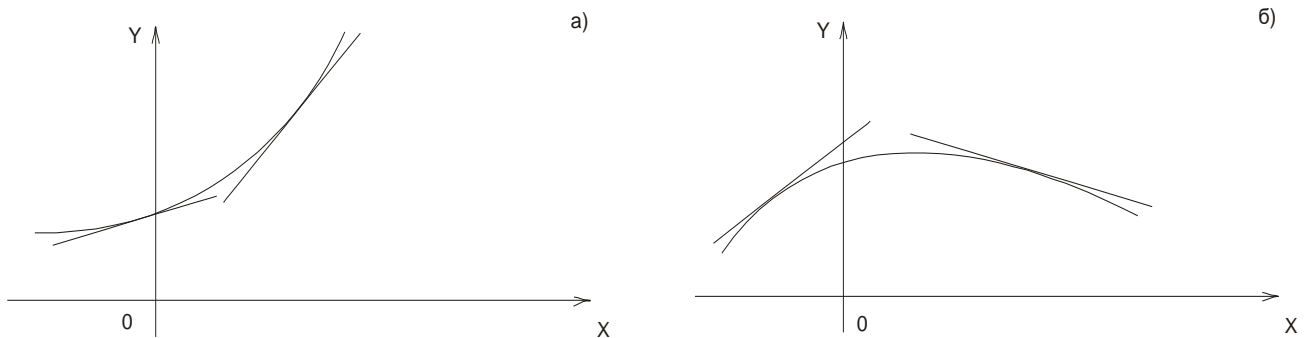


Рис.2

Замечание:

Если обозначить $\Delta(x; x_0) = \Delta(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, то свойство выпуклости вниз (вверх) дифференцируемой функции f на (a, b) равносильно тому, что для любой точки $x_0 \in (a, b)$ неравенство $\Delta x \geq 0$ ($\Delta x \leq 0$) справедливо для всех $x \in (a, b)$. Отметим, что $\Delta(x_0, x_0) = \Delta(x_0) = 0$

3. Выпуклость дважды дифференцируемой функции

Теорема 28.3. Для того чтобы функция f , дважды дифференцируемая в интервале (a, b) , была выпуклой вниз (вверх) на (a, b) , необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) во всех точках $x \in (a, b)$.

Доказательство. Согласно критерию монотонности функции на промежутке (теорема 27.1), условие $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) для всех $x \in (a, b)$ является необходимым и достаточным условием возрастания (убывания) производной функции $f'(x)$ на (a, b) . Последнее свойство, согласно теореме 28.1 предыдущего пункта, является необходимым и достаточным условием выпуклости вниз (вверх) функции f на интервале (a, b) .

Точки перегиба

Определение 28.2. Точку кривой $M(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$, называют *точкой перегиба*, если она отделяет участок кривой, где функция выпукла вверх, от участка кривой, где функция выпукла вниз.

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) , то по теореме 28.1 в некоторой окрестности абсциссы $x_0 \in (a, b)$ точки перегиба её производная либо возрастает слева от точки $x_0 \in (a, b)$, а справа от неё убывает, либо наоборот. В первом случае рассматриваемая точка будет точкой максимума производной $f'(x)$, во втором случае – точкой минимума. Если предположить существование $f''(x_0)$, то по теореме Ферма, применённой к функции $f'(x)$, получим: $f''(x_0) = 0$.

Это условие играет такую же роль в отношении точек перегиба, какую играло условие $f'(x) = 0$ в отношении точек экстремума, т.е. оно является необходимым, но не достаточным. Действительно, функция $y = x^4$, очевидно, выпукла вниз, но её вторая производная, равная $12x^2$, обращается в ноль при $x = 0$.

Достаточное условие точки перегиба даёт следующее правило, вытекающее из теоремы 28.3:

если при переходе через значение $x = x_0$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то налицо перегиб. Если же знак не меняется, то перегиба нет.

Используя формулу Тейлора, так же, как и при исследовании функции на экстремум, можно доказать следующее утверждение:

если $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$, и если n – нечётное число, то в точке x_0 имеется перегиб, если же n – чётное число, то перегиба нет.