Билет 23: Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Формула Тейлора представляет собой один из основных инструментов математического анализа. Её смысл состоит в том, что функция $f(x)$ представляется в виде $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, где $T_n(x)$ – многочлен Тейлора, $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора. В зависимости от вида $R_n(x)$ она используется в различных целях: при вычислениях значений функций с заданной точностью, при исследовании асимптотического поведения функций и т.д.

Теорема 23.1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа) ***Пусть $f(x), f'^{(x)}, \dots, f^{(n)}(x)$ непрерывны в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и пусть в $U(x_0)$ существует $f^{(n+1)}(x)$. Тогда для любого $x \in U(x_0)$ существует точка ξ, лежащая между x_0 и x такая, что***

$$\boldsymbol{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}} \qquad \textbf{\textit{(1)}}$$

Примечание.

В этом представлении функции $f(x)$ величина $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^{n+1}$ называется ***остаточным членом в форме Лагранжа***.

Можно выписать более общую форму ***Шлёмильха и Роша*** (Schlömilch–Roche) остаточного члена:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{n!p}(1 - \theta)^{n+1-p}(x - x_0)^{n+1} \qquad (2)$$

где θ – число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \theta < 1$, такое, что $\varepsilon = x_0 + \theta(x - x_0)$, а $p > 0$ – любое число. Например, остаточный член в форме

Лагранжа получится, если $p = n + 1$ в этой общей форме (2). Иногда бывает удобен ***остаточный член в форме Коши***, получаемый из (2) при $p = 1$:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big)}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}.$$

Однако наиболее часто используется остаточный член в форме Лагранжа и мы докажем формулу Тейлора именно в таком виде.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(z) = f(z) - f'^{(x_0)(z-x_0)} - \frac{f''(x_0)}{2}(z-x_0)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(z-x_0)^n - A(z-x_0)^{n+1} \qquad (3)$$

Поскольку эта функция $\varphi(z)$ получится вычитанием из $f(z)$ многочлена от z, а многочлен непрерывен и имеет непрерывные производные любого порядка, для функции $\varphi(z)$ сохраняются свойства функции $f(z)$, т.е. $\varphi(z), \varphi'(z), \dots, \varphi^n(z)$ непрерывны в $U(x_0)$ и $\varphi^{(n+1)}(z)$ существует в $U(x_0)$.

Пусть $x \in U(x_0)$. Для определённости, пусть $x > x_0$. Выберем число A так, чтобы выполнялось равенство $\varphi(x) = 0$. Это возможно, поскольку при подстановке x вместо z в (3), это равенство примет вид линейного относительно уравнения с коэффициентом при A, равным $(x-x_0)^{n+1} \neq 0$.

Теперь для применения следствия Ролля осталось только доказать, что выполняются равенства

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \cdots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0$$

Для этого сначала вычислим k-ю производную, $k \geq 1$, от функции $(z-x_0)^l$ в точке $z = x_0$.

По формуле для производной степенной функции последовательно получаем:

$((z-x_0)^l)' = l(z-x_0)^{l-1}, ((z-x_0)^l)'' = l(l-1)(z-x_0)^{l-2}, \dots, ((z-x_0)^l)^{(k)} = l(l-1)\dots(l-k+1)(z-x_0)^{l-k}$, если $k < l$. В точке $z = x_0$ эта величина обращается в 0.

Если $k = l$, то $((z-x_0)^l)^{(l)} = l(l-1)\dots(l-l+1) = l!$

Если же $k > 1$, то дальнейшее дифференцирование даст тождественный ноль. (Степень многочлена $(z-x_0)^l$ равна l, т.е. он имеет вид $z^l + a_{l-1}z^{l-1} + \dots + a_0$, k-кратное дифференцирование при $k > 1$каждого слагаемого, входящего в этот многочлен, даёт тождественный ноль)

Итак, все производные порядка $k,\ k \neq l$, функции $(z-x_0)^l$ равны 0 в точке $z = x_0$, а $(z-{x_0}^l)^{(l)} = l!$

Равенство $\varphi(x) = 0$ справедливо по выбору A. Для любого $1 < k \leq n$ имеем, согласно доказанному выше $\varphi^{(l)}(x_0) = f^{(l)}(x_0) - \frac{f^{(l)}(x_0)}{l!} l! = 0$

Все условия следствия теоремы 21.2 (Ролля) выполнены, поэтому существует точка $\xi \in [x_0, x]$, такая, что $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$. Но $\varphi^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - A(n+1)!$, значит $0 = f^{(n+1)}(\xi) - A(n+1)!$, т.е.

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad (4)$$

Вспоминаем, что $\varphi(x) = 0$ и подставляем x вместо z в формулу (3), учитывая (4):

$$0 = f(x) - f'(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

что означает:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \xi \in [x_0, x] \qquad (5)$$

Случай, когда $x < x_0$ вполне аналогичен и приводит к такому же равенству (5).

Замечания:

- Часто вместо ξ пишут $x_0 + \theta(x - x_0)$, где $0 < \theta < 1$ и наоборот, каждому такому $0 < \theta < 1$ соответствует число ε между x_0 и x.

- Часто вместо точки x_0 пишут просто x, а вместо x пишут $x + \Delta x$ и формула Тейлора приобретает вид:

- $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}\,\Delta x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}\,(x+\theta\Delta x)}{(n+1)!}\,(\Delta x)^{n+1}$,

  $0 < \theta < 1$ (6)

- В случае, когда x – независимая переменная, или линейная функция от независимой переменной, $\Delta x = dx$, и $df^{(k)}\,(x) = f^{(k)}\,(x)\Delta x^k$. Обозначим $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x)$. При этом формула Тейлора записывается так:

$$f(x) = df(x) + \frac{d^2\,f(x)}{2} + \cdots + \frac{d^n\,f(x)}{n!} + \frac{d^{n+1}\,f(x+\theta\Delta x)}{(n+1)!} \tag{7}$$

- Особенно часто формула Тейлора используется, когда $x_0 = 0$. Тогда $x = x_0 + \Delta x = \Delta x$ и

$$\Delta f(0) = f'(0) + \frac{f''(0)}{2} + \cdots + \frac{d^n\,f(0)}{n!} + \frac{d^{n+1}\,f(\theta\Delta x)}{(n+1)!}\,(\Delta x)^{n+1} \tag{8}$$

Эту формулу часто называют также ***формулой Маклорена*** (Mac-Laurin).