Билет 22: Теоремы Лагранжа, Коши. Критерий постоянства функции

Теорема 22.1 (Лагранж) ***Пусть $f(x) \in C[a, b]$, $f(x) \in D(a, b)$. Тогда существует точка*** $c \in (a, b)$ ***такая, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.***

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. $F(x) \in C[a, b], F(x) \in D(a, b)$, так как $F(x)$ отличается от $f(x)$ лишь слагаемыми, совокупность которых представляет собой линейную функцию от x, которая всюду непрерывна и дифференцируема. При этом

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (1)$$

Вычислим $F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a - a) = 0.$ Аналогично, $F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) = f(b)(a) - f(b) + f(a) = 0.$

Итак, все условия теоремы Ролля верны для функции $F(x)$. Поэтому существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $F'(c) = 0$. С учётом формулы (1), $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$

что равносильно доказываемому равенству $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Замечания:

- Доказанную теорему также называют ***теоремой о среднем значении***, а полученную в ней формулу – ***формулой конечных приращений***.
- Если $a > b$ и $f(x) \in C[b, a]$, $f(x) \in D(b, a)$, то существует точка $c \in (b, a)$ такая, что

$$f(a) - f(b) = f'(c)(b - a).$$

Но это равенство можно записать так:

$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$

Это означает, что формула конечных приращений верна как в случае $a < b$, так и в случае $a > b$.

- Часто рассматривают точку x, приращение Δx (причём, согласно примечанию 2, возможно, что $\Delta x, x < 0$) и функцию f ,непрерывную на отрезке, соединяющем точки x и $x + \Delta x$ и дифференцируемую хотя бы на этом интервале. Тогда доказанную формулу можно переписать в виде

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(\xi)\Delta x \qquad (2)$$

где ξ – точка, лежащая между x и $x + \Delta x$. Так как для любой точки ξ между x и $x + \Delta x$ существует число θ, $0 < \theta < 1$ такое, что $\xi = x + \theta\Delta x$, формулу (2) записывают также в виде $\Delta f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x$

Следствия теоремы Лагранжа

Следствие 1. (критерий постоянства функции на интервале). ***Функция $f(x)$, дифференцируемая на (a, b) (где (a, b) может быть и бесконечным интервалом) является постоянной тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$.***

Доказательство. То, что производная постоянной функции равна 0 уже доказано. Докажем теперь, что если производная функции, определённой на интервале, равна 0, то эта функция является постоянной.

Для этого возьмём две произвольные точки $x_1, x_2 \in (a, b)$ для определённости пусть $x_1 < x_2$. Так как всюду на (a, b) существует производная, функция $f(x)$ непрерывна на (a, b), следовательно, и на $[x_1, x_2] \subset (a, b)$. По теореме Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$, так как $f'(\xi) = 0$ по условию. Это означает, что значения функции $y = f(x)$ в любых двух точках x_1, $x_2 \in (a, b)$ одинаковые. Но это означает, что $f(x)$ – постоянная.

Замечания к следствию 1:

- Это следствие ещё называют ***основной леммой теории неопределённого интеграла.***
- Если $f'(\mathrm{x}) = 0$ для всех $x \in X$, где X – объединение нескольких интервалов, то $f(x)$ принимает постоянное значение на каждом из интервалов, своё для каждого интервала.

<u>**Теорема 22.2 (Коши).**</u> ***Пусть*** $\boldsymbol{f(x)}$, $\boldsymbol{g(x)} \in \boldsymbol{C[a,b]}, \boldsymbol{f(x)}, \boldsymbol{g(x)} \in \boldsymbol{D(a,b)}$, $\boldsymbol{g'(\xi) \neq 0}$ ***для всех точек*** $\boldsymbol{\xi} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. ***Тогда существует точка*** $\mathrm{c} \in (\mathrm{a}, \boldsymbol{b})$ ***такая, что***

$$\frac{\boldsymbol{f(b)-f(a)}}{\boldsymbol{g(b)-g(a)}} = \frac{\boldsymbol{f'(c)}}{\boldsymbol{g'(c)}}.$$

Доказательство. Доказательство во многом подобно доказательству теоремы Лагранжа. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{g(x)-g(a)}{g(b)-g(a)}\big(f(b) - f(a)\big).$$

Во-первых, эта функция существует, так как $g(b) - g(a) = g'(\xi)(b - a) \neq 0$ по условию теоремы. Далее, она непрерывна на отрезке $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ и дифференцируема на интервале (a, b), причём её производная равна

$F'(x) = f'(x) - g'(x)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. По теореме 21.2 (Ролля) существует

$c \in (a, b)$ такая, что $F'(c) = 0$, т.е. $F'(c) = f'(c) - g'(c)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = 0$, откуда сразу следует заключение теоремы.

Замечание.

Не стоит пытаться «упростить» доказательство теоремы Коши, применяя теорему Лагранжа отдельно к числителю и к знаменателю. Дело в том, что хотя и для $f(x)$ существует некоторая точка , обозначим её $c_f \in (a, b)$

такая, что $f(b) - f(a) = f'(c_f)(b - a)$, и для $g(x)$ существует некоторая точка , обозначим её $c_g \in (a, b)$, такая, что $g(b) - g(a) = g'(c_g)(b - a)$, мы не можем сразу утверждать, что эти точки совпадут, т.е. что $c_f = c_g = c$. Это равенство следует как раз из приведённого выше доказательства.