Билет 20: Производные и дифференциалы высших порядков

20.1. Последовательные производные

Производная f' функции f, в свою очередь, может иметь производную. Последнюю в этом случае называют ***второй производной*** (или ***производной второго порядка***) функции f и обозначают обычно f''. Таким образом, $f'' = (f')'$. В соответствии с этим f' называют ***первой производной*** (или ***производной первого порядка***) функции f. По индукции определяют (в предположении, что они существуют) производные следующих порядков:$f''' = (f'')'$ и т.д. Если f имеет n-ю производную (а значит, и производные всех меньших порядков) во всех точках некоторого промежутка **I**, то говорят, что функция f n раз (или n-кратно) дифференцируема на промежутке **I**. Функцию f, имеющую на **I** производные всех порядков, называют ***бесконечно дифференцируемой*** на **I**. Таковы, например, на всем множестве действительных чисел алгебраические многочлены, показательные функции.

Для обозначения порядка производной, если он невелик, используют также римские цифры. Так, f^{IV} – четвертая производная функции f. Вообще же, n-ю производную функции f обозначают $f^{(n)}$ (в частности, $f^{(1)} = f'$). При этом удобно саму функцию f обозначать символом $f^{(0)}$. В таких обозначениях, очевидно, $f^{(n)} = \left(f^{(k)}\right)^{(n-k)}$ для всех $k, 0 \le k \le n$.

Итак, функция f имеет в точке $x_0 \in (a, b)$ производную $f^{(n)}(x_0)$ (обозначение: $f \in D^{(n)}(x_0)$) в том и только в том случае, когда в некоторой окрестности Uточки x_0, $U \subset (a, b)$, существуют производные функции $f^{(k)}$ всех порядков $k, 1 \le k \le n-1$, и функция $f^{(n-1)}$ имеет в x_0 производную $\left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.

Вторая производная имеет важный **механический** смысл. Если прямолинейное движение материальной точки описывается уравнением $S =$

$f(t)$, то, как было показано, $V = f'(t)$– скорость точки в момент t. Величину $j = f''(t)$ ("скорость изменения скорости") называют **ускорением** точки в момент t. Согласно второму закону классической механики, сила F, приложенная к точке, пропорциональна ускорению, $F = mj$; коэффициент пропорциональности m называют массой точки.

Для некоторых бесконечно дифференцируемых функций легко указать формулу для вычисления n-ой производной.

1) $\mathrm{f}(x) = x^{\alpha}, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ - фиксировано. Поскольку $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ то, по индукции, получим $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}, x > 0, k \in \mathbb{N}$,. Если $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то $f(x) = x^{n}$определена на всем $\mathbb{R}$ и $(x^{n})^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}, x \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq n-1$. При $k = n$ получим $(x^{n})^{(n)} = n!$ для всех $x \in \mathbb{R}$ (так как $(x^{n})^{(n-1)} = n!\,x, x \in \mathbb{R}$), и поэтому $(x^{n})^{(m)} = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $m > n$.

2) $f(x) = e^{x}, x \in \mathbb{R}$. Поскольку $f'(x) = e^{x}, f''(x) = e^{x}$, то $f^{(k)}(x) = e^{x}, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$.

3) $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$. Поскольку $f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,то $f''(x) = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), x \in \mathbb{R}$, и, по индукции,$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right), x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$.

4) $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$. Так как $f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, то $f''(x) = \left(\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), x \in \mathbb{R}$, и, по индукции,$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right), x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$.

5) $f(x) = (1+x)^{\alpha}, x > -1,\ \alpha \in \mathbb{R}$ - фиксировано. Как и в примере 1, получим $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}(1+x)' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ и $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}, x > -1, k \in \mathbb{N}$.

6) $f(x) = ln(1+x), x > -1$. Так как $f'(x) = \frac{1}{1+x}(1+x)' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$, то, на основании примера 5) с $\alpha = -1$, получим $f^{(k)}(x) = (f')^{(k-1)}(x) = ((1+x)^{-1})^{(k-1)} = (-1) \quad (-2) \dots (-1-(k-1)+1) \cdot (1+x)^{-1-(k-1)} = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, k \in \mathbb{N}$.

20.3. Линейное свойство производных высших порядков

Теорема 20.1. ***Для любого числа $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, любых функций $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, имеющих в какой-то точке $\boldsymbol{x}$ производные $\boldsymbol{u^{(n)}(x)}$ и $\boldsymbol{v^{(n)}(x)}$, и для любых чисел $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2} \in \mathbb{R}$ функция $\boldsymbol{w = \lambda_1 u + \lambda_2 v}$ имеет в точке $\boldsymbol{x}$ производную $\boldsymbol{w^{(n)}(x)}$ и $\boldsymbol{w^{(n)}(x) = \left(\lambda_1 u(x) + \lambda_2 v(x)\right)^{(n)} = \lambda_1 u^{(n)}(x) + \lambda_2 v^{(n)}(x)}$.***

Доказательство. Поскольку каждая производная высшего порядка получается из производной предыдущего порядка посредством операции дифференцирования, а операция дифференцирования и первая производная обладают свойством линейности, то это свойство переносится на производные всех порядков.

n-я производная произведения функций

Теорема 20.2.(Г.Лейбниц). ***Если функции $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ на некотором промежутке имеют производные функции $\boldsymbol{f^{(n)}}$ и $\boldsymbol{g^{(n)}}$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, то существует $\boldsymbol{(fg)^{(n)}}$ и $\boldsymbol{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n)} g^{(n-k)} = f g^{(n)} + n f' g^{(n-1)} + \dots + \frac{n(n-1)-(n-k+1)}{k!} f^{(k)} g^{(n-k)} + \dots + n f^{(n-1)} g' + f^{(n)} g}$ (1)***

Доказательство. Для $n = 1$ утверждение справедливо по теореме 19.8: вместе с f и g произведение fg также дифференцируемо и $(fg)^1 = fg' + f'g = C_1^0 f^{(0)} g^{(1)} + C_1^1 f^{(1)} g^{(0)}$.

Пусть утверждение теоремы справедливо для n, а функции f и g дифференцируемы на рассматриваемом промежутке $(n+1)$ раз. Тогда эти функции вместе со своим произведением n-кратно дифференцируемы, и для него справедлива формула (1). Так как в каждом члене правой части этой формулы функции $f^{(k)}$и $g^{(n-k)}$ дифференцируемы, то по теоремам 19.7, 19.8 функция $(fg)^{(n)}$ дифференцируема, причем $(fg)^{(n+1)} = \left((fy)^{(n)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(k+1)} g^{(n-k)}\right) = C_n^0 f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + C_n^n f^{(n+1)} g^{(0)}$.

Но $\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} = C_n^0 f^{(1)} g^{(n)} + C_n^1 f^{(2)} g^{(n-1)} + \cdots + C_2^{n-2} f^{(n-1)} g^{(2)} + C_n^{n-1} f^{(n)} g^{(1)} = \sum_{1\Leftarrow 1}^{n} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)}$ и, принимая также во внимание свойства биномиальных коэффициентов: $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$, получаем $(\mathrm{fg})^{(\mathrm{n}+1)} = \mathrm{C}_{\mathrm{n}+1}^0 \mathrm{f}^{(0)} \mathrm{g}^{(\mathrm{n}+1)} + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \left(\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} + \mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}-1}\right) \mathrm{f}^{(\mathrm{k})} \mathrm{g}^{(\mathrm{n}-\mathrm{k}+1)} + \mathrm{C}_{\mathrm{n}+1}^{\mathrm{n}+1} \mathrm{f}^{(\mathrm{n}+1)} \mathrm{g}(0) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$, так что формула (1) верна, если заменить n на n+1 и теорема доказана.

Вторая производная функции, заданной параметрически

Рассмотрим уравнение $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$, (2)

где $x(t)$, $y(t)$– дважды дифференцируемые функции на некотором промежутке T; пусть, кроме того, функция $x(t)$ строго возрастает (или убывает) на T и ни в одной точке этого промежутка x_t' не равна 0. В этом случае уравнения (2) задают функцию $Y(x) = y\big(t(x)\big)$, и производная этой функции равна

$$Y'(x) = \frac{y_t'}{x_t'} \quad (3)$$

Бывает также, что производные по параметру t обозначают так: $x_t' = \dot{x},\ y_t' = \dot{y}$. Тогда формула (3) принимает вид: $Y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Найдём вторую производную функции $Y(x)$:

$$Y''(x) = \frac{d\big(Y'(x)\big)}{dx} = \frac{d\big(Y'(x)\big) \,/\, dt}{dx \,/\, dt} = \frac{d\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) \,/\, dt}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3}$$

5. **Дифференциалы высших порядков**.

Однородную линейную функцию называют линейной формой. Напомним, что если функция f дифференцируема в точке x, то дифференциалом f в x называют линейную форму $f'(x)h$. Аналогично, если f дифференцируема дважды в точке x, то ее ***вторым дифференциалом называют*** квадратичную форму $f''(x)h^2$. Вообще, ***n-ым дифференциалом*** f в точке x будет n-ичная форма $f^{(n)}(x)h^n$ (в предположении, что $f^{(n)}(x)$ существует для n-го дифференциала f в точке x используют обозначение $d^n f(x)$ или, более строго $d^n f(x)(h)$.

Таким образом, по определению,

$$d^n f(x)(h) = f^{(n)}(x)h^n \text{ для всех } h \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Согласно этому определению, $h^n = \big(dx(h)\big)^n$есть n-я степень функции $dx(h)$ и потому используют обозначение $\big(dx(h)\big)^n = dx^n(h)$. Тогда (2) примет вид $d^n f(x)(h) = f^{(n)}(x)dx^n(h)$ для всех $h \in \mathbb{R}$, или равенства

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)\, dx^n \quad (3)$$

Форма (2) записи n-го дифференциала не инвариантна уже при $n = 2$. Действительно, подставляя вместо x дифференцируемую функцию $\varphi(t)$ в левую часть формулы (2) (при $n = 2$), получим

$$d^2 f\big(\varphi(t)\big)(h) = \Big(f\big(\varphi(t)\big)\Big)'' h^2 = \big(f'(\varphi(t))\varphi'(t)\big)' h^2 = \Big(f''\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\Big)^2 + f'\big(\varphi(t)\big)\varphi''(t))h^2 \qquad (4)$$

а в результате такой же подстановки в правую часть, имеем

$$f''(\varphi(t))\big(d\varphi(t)(h)\big)^2 = \left(f''(\varphi(t))\big(\varphi'(t)\big)^2\right)\big(dt(h)\big)^2 =$$

$$\left(f''(\varphi(t))\big(\varphi'(t)\big)^2\right)h^2 \quad (5)$$

Правые части формул (5) и (4) отличаются слагаемым $\left(f'(\varphi(t))\varphi''(t)\right)h^2$.Вообще говоря, это слагаемое не равно нулю. Однако если $\varphi(t)$- линейная функция, то $\varphi''(t) = 0$ и, вообще, для любого $n \geq 2$ имеет место равенство $\varphi^{(n)}(t) = 0$, откуда следует, что формула (3) будет верна и для линейной функции $\varphi(t)$.