Билет 10. Критерий Коши существования предела последовательности, предела функции.

Определение 10.1. Пусть задана последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, ..$ и пусть $1 \le\ n_1 < n_2 \dots < n_k <..$ - возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, ..$***подпоследовательность*** исходной последовательности.

Теорема 10.1. ***Последовательность $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n, ..}$ имеет предел A тогда и только тогда, когда любая её подпоследовательность имеет предел, равный A.***

Доказательство. Поскольку последовательность сама является одной из своих подпоследовательностей (для которой $n_1 = 1, n_2 = 2, \dots, n_k = k, \dots$), утверждение теоремы очевидно в одну сторону.
Обратно, из определения подпоследовательности сразу вытекает, что для любого k выполняется неравенство $n_k \ge k$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$,то для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - A| <\ \varepsilon$. При этом для любой подпоследовательности $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nk}, ..$ при $k > N$ выполняется неравенство $n_k \ge k > N$, из которого следует, что $\left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = A$.

Теорема 10.2. (Лемма Больцано-Вейерштрасса).

Из любой ограниченной бесконечной последовательности можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к конечному пределу.

Доказательство.

1. Если множество значений , которые принимает последовательность a_n конечное, т.е. $\{a_n\} = \ \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, то хотя бы одно из значений $b_1, \dots b_m$, обозначим его b, она принимает бесконечно много раз, т.е. существует бесконечное множество номеров $n = n_1, n_2, \dots, n_m, \dots$таких, что $a_{n_i} = b, i = 1,2, \dots$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_1}$, подпоследовательность $\left\{a_{n_i}, i = 1,2, \dots\right\}$ - искомая.

2. Рассмотрим теперь случай, когда множество значений бесконечно. Так как множество значений последовательности $\{a_{n_1}\}$ – бесконечное ограниченное множество, то по теореме **4.1** существует предельная точка этого множества, равная A. Покажем, что существует последовательность $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = A$. По определению предельной точки, для $\varepsilon_1 = 1$ существует номер n_1 такой, что $\left|a_{n_1} - A\right| < \varepsilon_1$. Положим $\varepsilon_2 = \min(\frac{1}{2}, \left|a_{n_1} - A\right|)$. Существует n_2 такое, что $\left|a_{n_2} - A\right| < \varepsilon_2$. Точка $a_{n_1} \neq a_{n_2}$, т.к. $\varepsilon_2 < |a_{n_1} - A|$, а номер n_2 выбираем так, чтобы выполнялось неравенство $n_2 > n_1$, что можно сделать, так как в любой окрестности предельной точки содержится бесконечное число элементов этого множества. Далее, $\varepsilon_3 = \min(\frac{1}{3}, \left|a_{n_2} - A\right|)$. Как и раньше, строим a_{n_3} так, что $|a_{n_3} - A| < \varepsilon_3$ и $n_3 > n_2 > n_1$. Продолжая этот процесс, получаем последовательность $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_k}, \dots$ такую, что $\left|a_{n_k} - A\right| < \frac{1}{k}$, что означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Определение 10.2. Последовательность $\{a_n\}$ называется ***фундаментальной***, если для любого положительного δ существует такое $N(\varepsilon)$, что для всех $m, n > N(\varepsilon)$ разность значений a_m, a_n по модулю меньше δ, т.е. $\forall\delta > 0\ \exists N(\delta) \forall m, n > N(\delta) |a_n - a_m| < \delta$.

Теорема 10.3. (Критерий Коши для последовательности).

Предел последовательности существует тогда и только тогда, когда эта последовательность является фундаментальной.

Необходимость (⇒)

То, что последовательность имеет предел, запишем так: $\forall\delta > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |\ a_n - A| < \frac{\delta}{2}$. Легко видеть, что $|a_m - a_n| = |(a_m - A) - (\ a_n - A)|$. По свойству модулей: $|c - d| \le |c| + |d|$. Обозначив $c = a_m - A, d = a_n - A$, имеем: $|(a_m - A) - (a_n - A) \le |a_m - A| + |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, т.е. из существования предела последовательности легко следует ее фундаментальность.

Достаточность (⇦)

Во-первых, из фундаментальности последовательности следует ее ограниченность. Действительно, пусть $\varepsilon = 1$. Тогда существует $N \in$ N такое, что для всех $m, n > N$ имеет место неравенство $|a_m - a_n| < 1$. Положим $m = N + 1$. Тогда для всех $n > N$ $\left|a_n - a_{N_{+1}}\right| < 1$, т.е. $a_{N+1} - 1 < a_n < a_{N+1} + 1$. Пусть $C_0 = \max(|a_{N+1} - 1|, |a_{N+1} + 1|)$. Из этих неравенств тогда следует, что при $n > N$ имеем: $|a_n| < C_0$. Положим $C = \max(|a_1|, \dots, |a_N|, C_0)$. Теперь для всех $n \in$ N имеет место неравенство $|a_n| \leq C$, т.е. $\{a_n\}$ - ограниченная последовательность.

По теореме 11.2 существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ такая, что она имеет некоторый предел A, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Докажем, что вся последовательность имеет тот же предел, т.е. что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, для чего достаточно доказать, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_0\ \forall n > N_0\ |a_n - A| < \varepsilon$.

У нас доказано, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists K\ \forall k > K\left|a_{n_k} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N_1, m > N|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Если $N_0 = \max(K, N)$ и если $k > N_0$, то $k > K$, поэтому $|a_n - A| = \left|a_n - a_{n_k} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Теорема 10.4. (Критерий Коши для функции).

Условие: для любого $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ существует такое $\boldsymbol{\delta = \delta(\varepsilon)}$, что для любых $\boldsymbol{x_0, x_1}$ из $\boldsymbol{U_б(a)}$ разность значений функции $\boldsymbol{f(x)}$ в этих точках по абсолютной величине меньше $\boldsymbol{\delta}$, равносильно тому, что существует предел этой функции при $\boldsymbol{x \to a}$, т.е. $\boldsymbol{\forall\delta > 0\ \exists\delta\ (\delta)\forall x_0, x_1 \in \mathring{U}_\delta(a)\ |f(x_0) - f(x_1)| < \delta}$ равносильно существованию $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$.

Необходимость (→)

Пусть существует предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $x_0, x_1, \in \mathring{U}_\delta(a)$, то $|f(x_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x_0) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $|f(x_0) - f(x_1)| = |f(x_0) - A + A - f(x_1)| \leq |f(x_0) - A| + |f(x_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Доказательство достаточности на экзамене не требуется. Оно приведено в отдельном дополнительном файле.