Лекция 15

Основные теоремы дифференциального исчисления

Определение 1. *Пусть $\delta > 0$, $U_\delta(a)$ – δ-окрестность точки a Если функция f определена на множестве E, точка $a \in E$ и при всех $x \in U_\delta(a) \cap E$, выполнено неравенство $f(x) \le f(a)$, то a называется точкой локального максимума функции f. Если при тех же $x \in U_\delta(a) \cap E$ $f(x) \ge f(a)$, то f называется точкой локального минимума функции f. Если неравенство строгое, то a называется точкой строгого локального максимума или строгого локального минимума соответственно. Точки максимума и минимума называются точками локального экстремума (если неравенства нестрогие), и точками строгого локального экстремума, если неравенства строгие.*

У любой постоянной на числовом множестве функции любая точка её области определения является точкой локального экстремума (можно воспринимать их и как максимумы, и как минимумы). Если область определения функции содержит изолированные точки, то они являются точками локальных экстремумов. Точка $x = 0$ является строгим локальным минимумом функции $y = x^2$ и строгим локальным максимумом функции $y = -|x|$.

В изучаемых ниже теоремах важно иметь наглядное представление об их утверждениях, так что читателям полезно сделать чертежи при изучении формулировок.

Теорема 1. ***(Теорема Ферма)****. Пусть функция f определена на интервале (a, b), дифференцируема в точке $c \in (a, b)$ и имеет в точке c локальный экстремум. Тогда $f'(c)$=0.*

Доказательство. Пусть в точке c функция f имеет максимум (для минимума доказательство аналогично). Тогда при всех $x > c$ справедливо неравенство $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0$, а при всех $x < c$ – неравенство $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0$. Так как существует производная функции f в точке c, то есть существует предел $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$, то существуют и равны друг другу оба односторонних предела: $\lim\limits_{x\to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) = \lim\limits_{x\to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Таким образом, из предельного перехода в неравенствах имеем

$$(f'(c))^2 = \lim_{x\to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x\to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0,$$

что равносильно тому, что $f'(c) = 0$. □

Таким образом, в теореме Ферма утверждается, что если функция дифференцируема в точке экстремума, то её график в этой точке имеет касательную, параллельную оси абсцисс. Обратим внимание, что у непрерывной на отрезке функции экстремум может быть также и в точке, в которой производная не существует (например, $y = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$.) При поиске экстремумов функции обычно изучают поведение функций в окрестности точек, где производная либо равна нулю, либо не существует. Точки, в которых производная равна нулю, не всегда являются точками экстремумов. Примером может служить функция $y = x^3$ при $x = 0$ (проверьте это).

Теорема 2. ***(Теорема Ролля)****. Пусть:*
1) Функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$.
2) Функция f дифференцируема на интервале (a, b).
3) $f(a) = f(b)$.
Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.

Доказательство. Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то по второй теореме Вейерштрасса существуют такие точки $c_1 \in [a,b]$ и $c_2 \in [a,b]$, что $f(c_1) = m := \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$ и $f(c_2) = M := \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$. Если при этом $m = M = f(a)$, то функция f на отрезке $[a,b]$ является постоянной, поэтому в любой точке интервала (a,b) её производная равна нулю. Если $m < M$, то хотя бы одна из точек c_1 и c_2 лежит в интервале (a,b) и согласно теореме Ферма производная функции f в этой точке равна нулю. Эту точку и можно взять в качестве c. □

Все условия теоремы Ролля важны. Если отказаться от условия 1 (при выполнении условий 2 и 3), то можно рассмотреть функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0,1), \\ 0, & \text{если } x = 1 \end{cases}$$

(см. рисунок 1). Производная этой функции равна 1 в каждой точке интервала $(0,1)$.

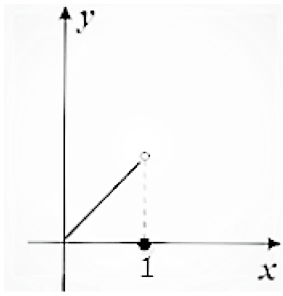

Рис. 1: Функция разрывна на отрезке, но дифференцируема на интервале

Если взять непрерывную на отрезке $[-1,1]$ функцию, но отказаться от дифференцируемости на интервале, то подойдёт функция $y = |x|$, но утверждение теоремы Ролля для неё не выполнено. Наконец, если отказаться от условия 3, то можно на любом отрезке просто взять функцию $y = x$, производная которой ни в одной точке не обращается в нуль.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что при условиях теоремы обязательно найдётся точка, в которой касательная к графику функции f параллельна оси абсцисс (см. рисунок 2).

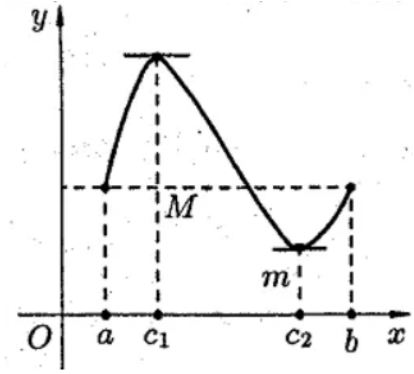

Рис. 2: Касательные параллельны оси Ox

Физический смысл теоремы Ролля состоит в том, что если x – время, а $f(x)$ – координата точки, движущейся по оси Oy, то при условии, что точка в момент времени b

возвращается в то же положение, откуда стартовала в момент a, должен наступить момент c, в который точка остановится, то есть её скорость будет равна нулю.

Теорема 3. ***(Теорема Лагранжа)***. *Пусть:*
1) Функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$.
2) Функция f дифференцируема на интервале (a, b).
Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию g, определяемую равенством

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Эта функция по свойствам непрерывных и дифференцируемых функций непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и $g(a) = 0 = g(b)$. Таким образом, функция g удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля на $[a, b]$, поэтому существует такая точка $c \in (a, b)$, что $g'(c) = 0$, а это равносильно тому, что $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Отметим, что в доказательстве мы фактически вывели теорему Лагранжа из теоремы Ролля. Если функция принимает на концах отрезка равные значения, то легко видеть, что из теоремы Лагранжа следует теорема Ролля. Таким образом, теоремы Ролля и Лагранжа равносильны.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа будет лучше понятен, если саму формулу из теоремы (называемую также *формулой конечных приращений*) переписать в виде $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Справа стоит тангенс угла наклона прямой, которая называется *секущей* (см. рисунок 3), а слева – тангенс угла наклона касательной. Таким образом, в теореме утверждается, что для дифференцируемой на интервале и непрерывной на отрезке функции найдётся точка, в которой касательная к графику функции f будет параллельна секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

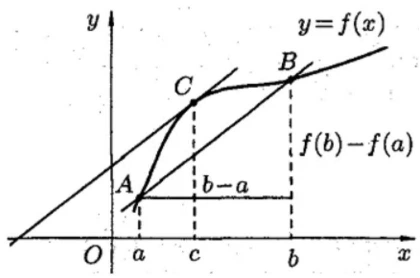

Рис. 3: Секущая AB параллельна касательной, проходящей через точку C

Физический смысл теоремы Лагранжа состоит в том, что если переменную x воспринимать как время, то величина $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ – это средняя скорость материальной точки, движущейся по оси Oy, за промежуток времени $[a, b]$, а $f'(c)$ – мгновенная скорость точки в момент времени c. Таким образом, существует такой момент времени, что средняя скорость точки на промежутке времени $[a, b]$ равна её мгновенной скорости в некоторый момент времени c. Докажем два полезных следствия теоремы Лагранжа.

Предложение 1. ***(1-е следствие)*** *Пусть функция f определена и дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) = 0 \; \forall x \in (a, b)$. Тогда функция f постоянна на (a, b).*

Доказательство. Пусть $x_1,\ x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2$. Тогда на отрезке $[x_1,\ x_2]$ к функции f применима теорема Лагранжа, поэтому $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $c \in (x_1,\ x_2)$. По условию $f'(c) = 0$, поэтому $f(x_1) = f(x_2)$. Так как рассуждение верно для любых точек на интервале (a,b), то, зафиксировав x_1 и беря произвольные значения $x_2 \in (a,b)$, видим, что во всех точках интервала функция f принимает равные значения. □

Предложение 2. ***(2-е следствие)*** *Пусть функция f определена и дифференцируема на интервале (a,b).*
1) Функция f не убывает на этом интервале тогда и только тогда, когда

$$f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b).$$

2) Функция f не возрастает на этом интервале тогда и только тогда, когда

$$f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a,b).$$

Доказательство. Проведём доказательство для случая неубывающей функции (для невозрастающей всё аналогично).
Необходимость. Если функция не убывает на интервале (a,b), то для любых точек

$$x_1,\ x_2 \in (a,b),$$

имеем:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0.$$

Зафиксировав точку x_1, получим в силу предельного перехода в неравенствах, что

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1) \geq 0.$$

В силу произвольности точек x_1 и x_2 получаем неотрицательность f' в каждой точке интервала (a,b).

Достаточность. Если $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b)$, то по теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$$

при всех $x_1,\ x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2$. □

Следующая теорема Коши является обобщением теоремы Лагранжа.

Теорема 4. ***(Теорема Коши)****. Пусть функции f и g:*
1) определены и непрерывны на отрезке $[a,b]$;
2) дифференцируемы на интервале (a,b);
3) $g'(x) \neq 0\ \forall\ x \in\ (a,b)$.
Тогда существует точка такая точка $c \in (a,b)$, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Отметим прежде всего, что $g(a) \neq g(b)$, так как в противном случае функция g удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, поэтому условие 3) теоремы выполняться не может.

Снова сведём доказательство к теореме Ролля. Рассмотрим вспомогательную функцию G, определяемую равенством

$$G(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x).$$

Эта функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и

$$G(a) = g(b)f(a) - g(a)f(b) = G(b),$$

то есть все условия теоремы Ролля выполнены. Тогда найдётся такая точка $c \in (a,b)$, что

$$G'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) - (f(b) - f(a))g'(c) = 0,$$

откуда и получается доказываемое равенство. $\square$

Отметим, что если убрать условие 3 теоремы Коши, то можно доказано, что будет справедливо равенство $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$. Это равенство равносильно тому, что

$$\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f'(c) \\ g(b) - g(a) & g'(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Равенство нулю определителя означает, что столбцы матрицы образуют коллинеарные векторы, а отсюда можно получить один из возможных *физических смыслов задачи Коши*: если вектор $(f(x), g(x))$ – это закон движения тела на плоскости, а x играет роль времени, то вектор $(f(b) - f(a), g(b) - g(a))$ будет вектором перемещения за время $b - a$, а вектор $(f'(c), g'(c))$ – это вектор мгновенной скорости в момент времени c. Таким образом, в теореме Коши утверждается, что вектор перемещения коллинеарен вектору мгновенной скорости, взятому в какой-то момент времени между моментами a и c. В трехмерном пространстве в общем случае это не верно (например, при движении по винтовой линии на поверхности цилиндра).

Упражнения.

1. Вывести из теоремы Коши теорему Лагранжа.

2. Рассмотрим следующее рассуждение при доказательстве теоремы Коши: применяя к числителю и знаменателю теорему Лагранжа, получим цепочку равенств

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)(b - a)}{g'(c)(b - a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

чем всё и доказано. Почему оно неверно?

3. Рассмотрим следующее рассуждение применительно к доказательству необходимости в предложении 2. *Если функция не убывает на интервале (a,b), то для любых точек*

$$x_1,\ x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2$$

имеем: $0 \le f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \Leftrightarrow f'(c) \ge 0$, где $c \in (x_1, x_2)$. Так как это верно для любых точек интервала, а c всегда лежит между x_1 и x_2, то в производная неотрицательна в каждой точке (a,b).

Почему это рассуждение не может являться доказательством необходимости предложения 2?

4. Доказать, что если $f'(x) > 0\ \forall x \in (a,b)$, то f строго возрастает на интервале (a,b), но обратное неверно.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши иногда называют теоремами о среднем (в дифференциальном исчислении), так как в каждой из них речь идёт о точке c, лежащей между концами отрезка $[a,b]$.