

Лекция 7

Предел функции

Определение 1. Точка a называется предельной точкой множества X , если в любой окрестности точки a содержится бесконечно много элементов множества X .

Равносильным определением является следующее

Определение 2. Точка a называется предельной точкой множества X , если в любой проколотой окрестности точки a содержится хотя бы один элемент множества X .

Упражнение: докажите равносильность эти определений.

Отметим, что из определения следует отсутствие у пустого множества и любого множества, состоящего из конечного числа элементов, предельной точки. Отметим, однако, что частичные пределы последовательности могут существовать даже тогда, когда множество её значений конечно, так как в этом случае речь идёт о том, чтобы в любой окрестности (не проколотой!) частичного предела лежало бесконечно много элементов последовательности, то есть, в частности, все эти элементы из окрестностей могут принимать значение, равное частичному пределу. Примером может служить последовательность $a_n = (-1)^n$, у которой два значения, каждое из которых является частичным пределом. При этом множество значений последовательности конечно, поэтому не имеет ни одной предельной точки.

Приведём примеры на нахождение предельных точек множеств.

Пример 1. 1) Пусть множество $X = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Тогда единственной предельной точкой этого множества является точка 1.

2) У интервала $(0, 1)$, как и отрезка $[0, 1]$ множество предельных точек – это весь отрезок $[0, 1]$, потому что в любой окрестности любой из точек отрезка $[0, 1]$ содержится бесконечно много других точек этих множеств.

3) Множеством предельных точек для всех рациональных чисел \mathbb{Q} служит всё множество \mathbb{R} , так как в любой окрестности любого действительного числа бесконечно много различных рациональных чисел (подробнее см. первую и вторую лекции).

Дадим теперь определения предела функции.

Определение 3. (*Определение предела по Коши*). Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$ и пусть a – предельная точка множества E . Число A называется пределом функции f в точке a по множеству E , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого такого $x \in E$, что $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Запись с помощью кванторов:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Отметим, что функция f может быть даже не определена в точке a .

Запись $x \in E \wedge 0 < |x - a| < \delta$ означает, что $x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, где $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ – это проколотая δ -окрестность точки a . При этом неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ означает, что число $f(x)$ принадлежит ε -окрестности точки A ; обозначим эту окрестность $V_\varepsilon(A)$. Таким образом, определение 1 можно переписать в таком виде: число A называется пределом функции f в точке a по множеству E , если для любой ε -окрестности $V_\varepsilon(A)$ точки A существует

такая проколота δ -окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ точки a , что для любого $x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ выполнено $f(x) \in V_\varepsilon(A)$, то есть выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Запись с помощью кванторов:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall V_\varepsilon(A) \exists \overset{\circ}{U}_\delta(a) : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a) f(x) \in V_\varepsilon(A).$$

Итак, для любой ε -окрестности точки A найдётся проколота δ -окрестность точки a , образ пересечения которой со множеством E при функции f содержится в ε -окрестности точки A .

Позже мы вернёмся к определению предела функции в терминах окрестностей, чтобы сформулировать и доказать теорему о пределе композиции функций.

Дадим ещё определение предела функции при стремлении x к $+\infty$. Для этого отметим, что о таком пределе может идти речь, если при любом $\delta > 0$ во множестве E , на котором определена функция f , содержится бесконечно много таких точек x , что $x > \delta$. Иными словами, множество E не является ограниченным сверху.

Определение 4. Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$. Число A называется пределом функции f при $x \rightarrow +\infty$ по множеству E , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого такого $x \in E$, что $x > \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Запись с помощью кванторов:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \wedge x > \delta |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Принято считать окрестностью $+\infty$ любой луч $(\delta, +\infty)$. Таким образом, A – это предел функции f при $x \rightarrow +\infty$, если для любой $V_\varepsilon(A)$ найдётся такая окрестность бесконечности $(\delta, +\infty)$, что её пересечение с множеством E (которое предполагается непустым при любом δ) при функции f содержится в окрестности $V_\varepsilon(A)$.

Полезно сформулировать определение предела при $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow \infty$, а также определить, что значит $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (здесь a также может выступать бесконечностью).

Теперь сформулируем ещё одно определение предела, которые во многих случаях оказывается более удобным, чем определение по Коши.

Определение 5. (Определение предела по Гейне). Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$ и пусть a – предельная точка множества E . Число A называется пределом функции f в точке a по множеству E , если для любой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, такой, что $a_n \in E$, $a_n \neq a \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$, выполняется равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$. Запись с помощью кванторов:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{a_n\}_{n=1}^\infty : a_n \in E \setminus \{a\} \forall n \in \mathbb{N} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A.$$

Обратим внимание, что точка a может даже не принадлежать области определения функции. Нас интересует не случай $x = a$, а что происходит с f при приближении x к a .

Приведём примеры применения определений пределов функции по Коши и Гейне.

Пример 2. 1) Докажем, что $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$. Воспользуемся определением предела функции по Коши. Множество E , на котором определена функция, – это всё \mathbb{R} , любая точка является предельной для этого множества. Необходимо доказать, что при любом $\varepsilon > 0$ найдётся такая проколота окрестность точки a , что при всех x из этой окрестности выполняется неравенство $|x^2 - a^2| < \varepsilon$. Итак, для всякого $\varepsilon > 0$ необходимо указать

такое $\delta > 0$, что при любом $x : 0 < |x - a| < \delta$ требуемое неравенство выполнено. Ограничение на x равносильно тому, что $a - \delta < x < a + \delta, x \neq a$. Используя неравенство треугольника, имеем:

$$|x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x - a + 2a| < \delta(2|a| + \delta).$$

Если $\delta(2|a| + \delta) < \varepsilon$, то заведомо $x^2 - a^2 < \varepsilon$. Однако получающееся квадратичное неравенство всегда имеет положительные решения:

$$\delta(\delta + 2|a|) < \varepsilon \Leftrightarrow \delta^2 + 2|a|\delta - \varepsilon < 0 \Leftrightarrow -|a| - \sqrt{a^2 + \varepsilon} < \delta < -|a| + \sqrt{a^2 + \varepsilon},$$

поэтому для всякого заданного $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta = (-|a| + \sqrt{a^2 + \varepsilon})/2$. Таким образом, доказано, что $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$.

2) Пусть $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ Докажем, что у функции D нет предела ни в одной

точке. Для этого воспользуемся определением предела по Гейне. Снова $E = \mathbb{R}$, и любая точка множества E является его предельной точкой. Возьмём произвольную точку $a \in \mathbb{R}$. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n \in \mathbb{Q} \setminus \{a\} \forall n \in \mathbb{N}$, то есть мы рассматриваем последовательность **рациональных** чисел, стремящуюся к a (см. решения семинарских задач, где в числе прочего доказывалось, что такая последовательность существует). Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} D(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$. Пусть теперь $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a, b_n \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \setminus \{a\} \forall n \in \mathbb{N}$, то есть мы рассматриваем последовательность **иррациональных** чисел, стремящуюся к a . Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} D(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$. Если бы предел в точке a был, то он бы являлся единственным для любых последовательностей, что следует из определения предела по Гейне. Так как мы получили два различных результата для двух разных последовательностей, сходящихся к a , то предела нет. Точка a была выбрана произвольно, поэтому для любой точки действительной оси рассуждения будут такие же. Итак, доказано, что функция D не имеет предела ни в одной точке.

Функция D из примера выше называется **функцией Дирихле**. Это очень полезная функция, встречающаяся во многих разделах анализа. В дальнейшем мы ещё не раз используем её при построении различных контрпримеров.

Возникает важный вопрос: а что было бы, если бы в пункте 2 примера 1 мы бы использовали определение предела по Коши? Мог ли ответ измениться, или факт, который мы доказали, остался бы верным? Как показывает следующая теорема, факт остался бы верным, так как определения предела по Коши и по Гейне равносильны, то есть из существования предела по Коши вытекает существование предела по Гейне и наоборот.

Теорема 1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ в смысле Коши $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ в смысле Гейне.

Доказательство. Коши \Rightarrow Гейне. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ в смысле Коши. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a_n \in E \setminus \{a\} \forall n \in \mathbb{N}, a_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$. По определению предела по Коши $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_{\delta}(a) |f(x) - A| < \varepsilon$. Так как $a_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$, то найдётся такое натуральное число N , что при всех $n > N$ $a_n \in E \cap \overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$, поэтому $|f(a_n) - A| < \varepsilon$. Итак, мы показали, что, какую ни взять последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ с нужными свойствами, всегда $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$, что и означает наличие того же предела A по Гейне.

Гейне \Rightarrow Коши. Пусть $\forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : a_n \in E \setminus \{a\} \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ имеем $f(a_n) \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$. Будем рассуждать от противного: пусть A не является пределом функции f по Коши, то есть $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in E \cap \overset{\circ}{U}_{\delta}(a) : |f(x) - A| \geq \varepsilon$. Пусть $\delta_n = 1/n$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $b_n \in E \cap \overset{\circ}{U}_{1/n}(a)$, что $|f(b_n) - A| \geq \varepsilon$. Таким образом, мы можем построить такую последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $b_n \in E \setminus \{a\} \forall n \in \mathbb{N}$ и при этом $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$. Так как она удовлетворяет всем требованиям из определения предела по Гейне, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = A$. Тогда, переходя в неравенстве $|f(b_n) - A| \geq \varepsilon$ к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим $0 = |A - A| \geq \varepsilon$ – противоречие. Таким образом, из определения предела по Гейне следует определение предела по Коши. \square

Свойства предела функции.

Теперь мы можем, пользуясь двумя равносильными определениями предела, вывести единственность предела, арифметические свойства предела функции, предельный переход в неравенствах, лемму об отделимости, ограниченность функции, имеющей предел, и лемму о зажатом пределе.

Теорема 2. Пусть функции f , g и h определены на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}$, a – предельная точка множества E . Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, а $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Тогда:

- 1) A – единственный предел функции f (**единственность предела**);
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = A/B$ ($g(x) \neq 0 \forall x \in E$, $B \neq 0$) (**арифметика предела**);
- 5) если $f(x) \leq g(x)$ в пересечении некоторой проколотой окрестности точки a и множества E , то $A \leq B$ (**предельный переход в неравенствах**);
- 6) если существует такая $\overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$, что $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$ и $A = B$, то $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ (**лемма о зажатом пределе**);
- 7) существуют такие $\delta > 0$ и $C \geq 0$, что $|f(x)| \leq C \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$ (**ограниченность функции, имеющей предел**);
- 8) если $A \neq 0$, то существует такая $\overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$, что $|f(x)| \geq \frac{|A|}{2} \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$ (**лемма об отделимости**).

Доказательство. Так как у функций f и g есть пределы, то для них выполняется определение предела по Гейне. Применяя его для последовательностей из определения предела по Гейне, получаем выполнение свойств 1) – 6) для этих последовательностей, так свойства уже доказаны для последовательностей в предыдущих лекциях. С другой стороны, так как эти свойства выполнены для любых последовательностей из определения предела по Гейне, то они выполняются и для функций f и g , что следует из определения предела по Гейне.

7) Из определения по Коши следует, что при $\varepsilon = 1$ найдётся такое $\delta > 0$, что

$$\forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_{\delta}(a) |f(x) - A| < 1.$$

Из последнего неравенства следует, что при всех таких x выполнено неравенство

$$|f(x)| < 1 + |A|.$$

Тогда в качестве C можно взять $1 + |A|$.

8) Пусть $A > 0$. Из определения по Коши следует, что при $\varepsilon = \frac{A}{2}$ найдётся такое $\delta > 0$, что

$$\forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a) \quad f(x) \in \left(\frac{A}{2}, \frac{3A}{2} \right).$$

Если $A < 0$, то при $\varepsilon = -\frac{A}{2}$ точно также получаем окрестность $E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, для которой

$$\forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a) \quad f(x) \in \left(\frac{3A}{2}, \frac{A}{2} \right).$$

Объединяя оба случая, при всех $x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ имеем неравенство $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$. □

Все свойства пределов функций, сформулированные выше, имеют свои аналоги для пределов последовательностей, чем мы существенно пользовались, однако для функций, рассматриваемых нами на этой лекции, возможна ещё операция композиции, то есть операция, при которой под знаком функции g , определённой на множестве D , стоит не аргумент, а некоторая функция f , определённая на множестве E и принимающая значения во множестве D . В следующей теореме речь пойдёт о пределе композиции функций.

Теорема 3. (Теорема о пределе композиции). Пусть функция g определена на множестве D , b – предельная точка множества D и

$$\lim_{y \rightarrow b} g(y) = A \quad (y \in D).$$

Пусть функция $f : E \rightarrow D$, a – предельная точка множества E и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ($x \in E$).

Пусть, наконец, для некоторого $\delta > 0$ при всех x из множества $E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ выполнено $f(x) \neq b$. Тогда сложная функция $g \circ f$ определена на множестве E и $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = A$.

Доказательство. То, что сложная функция $g \circ f$ определена на множестве E , следует из того, что функция f принимает значение в D , на котором определена функция g .

Так как $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = A$, то $\forall V_\varepsilon(A) \exists \overset{\circ}{U}_\tau(b) : \forall y \in D \cap \overset{\circ}{U}_\tau(b) \quad g(y) \in V_\varepsilon(A)$. По условию найдётся множество $E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ ($\delta > 0$), образ которого $f(E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a))$ при функции f содержится в $D \cap \overset{\circ}{U}_\tau(b)$. Таким образом,

$$\forall V_\varepsilon(A) \exists \overset{\circ}{U}_\delta(a) : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a) \quad g(f(x)) \in V_\varepsilon(A),$$

то есть по определению $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = A$. □