МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ МГУ

КРИТЕРИЙ КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ

В.Г.ЧИРСКИЙ,А.И.КОЗКО.Л.М.ЛУЖИНА

2022

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов. В этом пособии содержится материал, относящийся к курсу математического анализа, читаемому студентам первого курса химического факультета МГУ.

__**Теорема (Критерий Коши для функции).**__

Условие: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любых x_0, x_1 из $U_б(a)$ разность значений функции $f(x)$ в этих точках по абсолютной величине меньше δ, равносильно тому, что существует предел этой функции при $x \to a$, т.е. $\forall \delta > 0\ \exists \delta\ (\delta) \forall x_0, x_1 \in \mathring{U}_\delta(a)\ |f(x_0) - f(x_1)| < \delta \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

__Необходимость__ ($\rightarrow$)

Пусть существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $x_0, x_1, \in \mathring{U}_\delta(a)$, то $|f(x_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x_0) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $|f(x_0) - f(x_1)| = |f(x_0) - A + A - f(x_1)| \le |f(x_0) - A| + |f(x_{1)} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

__Достаточность__($\Leftarrow$)

Доказательство достаточности значительно труднее и его не обязательно рассказывать на экзамене.

Однако для заинтересованного читателя ниже приводится схема этого доказательства.

Сначала дадим ещё одно определение предела функции при $x \to a$**.**

__**Определение (предела функции $f(x)$** при $x \to a$ **по Гейне**).__ Говорят, что функция $f(x)$ имеет при $x \to a$ **предел** A, если для любой последовательности $\{a_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и такой, что для всех n выполнено неравенство $a_n \neq a$, предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$.

__**Теорема**__**. Определение предела по Коши, равносильно определению предела по Гейне.**

Пусть сначала функция имеет предел по Коши. Рассмотрим произвольную последовательность $\{a_n\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и такую, что для всех *n* выполнено неравенство $a_n \neq a$. По определению предела по Коши, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) |f(x) - A| < \varepsilon$. По определению предела последовательности, $\forall\delta > 0 \exists N = N(\delta) \forall n > N |a_n - a| < \delta$. Значит, при n>$N$ выполняется условие $a_n \in \mathring{U}_\delta(a)$, из которого сразу следует неравенство $|f(a_n) - A| < \varepsilon$, означающее, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$, Тем самым, предел этой функции по Гейне также существует.

Предположим теперь, что предел по Коши не существует и докажем, что не существует и предел по Гейне. По предположению, существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого числа $\delta > 0$ существует такая точка $a^* \in \mathring{U}_\delta(a)$, что $|f(a^*) - A| \geq \varepsilon$. Последовательно выбирая в качестве δ числа $\delta_n = {}^1/_n$, находим точки $a_n \in \mathring{U}_{1/n}(a)$ такие, что $|f(a_n) - A| \geq \varepsilon$. Эти точки представляют собой последовательность точек, удовлетворяющую всем условиям, входящим в определение предела по Гейне, однако для этой последовательности условие $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$ не выполнено.

Докажем теперь, что из условия (1) вытекает, что функция имеет предел по Гейне.

Действительно, возьмём любую последовательность $\{a_n\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и такую, что для всех n выполнено неравенство $a_n \neq a$. Рассмотрим соответствующую последовательность $\{f(a_n)\}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем соответствующее $\delta > 0$ с помощью (1). Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, имеем: $\forall\delta > 0\ \exists N = N(\delta)\ \forall n > N\ |a_n - a| < \delta$. Далее, при $n, m > N$ $a_n, a_m \in \mathring{U}_\delta(a)$ и по условию (1), $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$. Значит, $\{f(a_n)\}$. - фундаментальная последовательность. По теореме 12.3 существует предел последовательности $\{f(a_n)\}$. обозначим его $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$.

Осталось доказать, что если взять любую другую последовательность $\{b_n\}$такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ и такую, что для всех n выполнено неравенство $b_n \neq a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = A$.

Для этого рассмотрим последовательность $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$. Это – последовательность точек, сходящаяся к точке a и не принимающая значение a, согласно своему определению. Поэтому последовательность значений $f(a_1), f(b_1), f(a_2), f(b_2), \dots, f(a_n), f(b_n), \dots$ также имеет предел, по доказанному выше. Тогда предел этой последовательности равен пределу подпоследовательности $\{f(b_n)\}$ и пределу подпоследовательности $\{f(a_n)\}$, равному A.