МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА
МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ
ШКОЛЫ МГУ

ЭСКИЗЫ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

А.А. ЛУЖИН, Л.М. ЛУЖИНА

2022

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке показаны способы построения графиков элементарных функций. Элементарные функции наиболее часто встречаются в математических моделях природных и социальных явлений. Поэтому навыки построения таких графиков очень важны.

ПОСТРОЕНИЕ ЭСКИЗОВ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

§1. Графики элементарных функций и их взаимное расположение

Основными элементарными функциями являются:

1) степенные функции: $y = x^a$, a – произвольное действительное число;
2) функция $y = |x|$;
3) показательные функции: $y = a^x$, $a > 0$; логарифмические функции: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
4) тригонометрические и обратные тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Графики этих функций считаются известными из школьной программы. При этом надо четко понимать, что в школе они отнюдь не были «строго» построены, то есть их построение не сопровождалось серьезными математическими исследованиями. Школьникам эти графики были «подарены», а затем было предложено «по точкам» убедиться в том, что графики действительно выглядят «как-то так». Преобразования, которые мы будем делать, усугубят эту «приблизительность». Именно поэтому предпочтительнее было бы говорить «эскизы графиков функций». Но эта фраза выглядит длинновато, поэтому везде в дальнейшем мы будем говорить просто «график функции». Кстати, проверка (или напоминание) графика «по точкам» бывает полезна, но только в том случае, если это позволяет вспомнить общий вид графика. Строгое обоснование построения графиков функций будет сделано в конце 1 семестра.

Напомним следующие определения.

Определение 1.

Область определения функции $y = f(x)$ – это любое множество, в каждой точке которого значение функции существует (то есть его можно найти с помощью закона, который задает функцию).

Пример 1.

Областью определения функции $y = f(x) = x^2$ являются, например, следующие множества: $\mathbb{R}$, $[-1; 1]$, $[-1; 2]$, $[0; 1]$. Что же имеется в виду, когда говорят, что «областью определения функции $f(x) = x^2$ является $\mathbb{R}$»? Имеется в виду самое большое множество, на котором можно рассмотреть эту функцию. При этом любое подмножество $\mathbb{R}$, также является областью определения $f(x) = x^2$ (действительно, ничто не мешает возводить в квадрат числа, лежащие, например, только на $[-1; 2]$). Поэтому, вообще-то говоря, каждый раз надо уточнять, на каком именно множестве вы собираетесь рассмотреть заданную функцию. По умолчанию предполагается, что рассматривается максимально возможная область определения.

Определение 2.

Функция $\boldsymbol{y = f(x)}$ называется **четной** на множестве $\boldsymbol{D}$, если

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D} \Rightarrow -\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$$

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D} \Rightarrow \boldsymbol{f(-x) = f(x)}$$

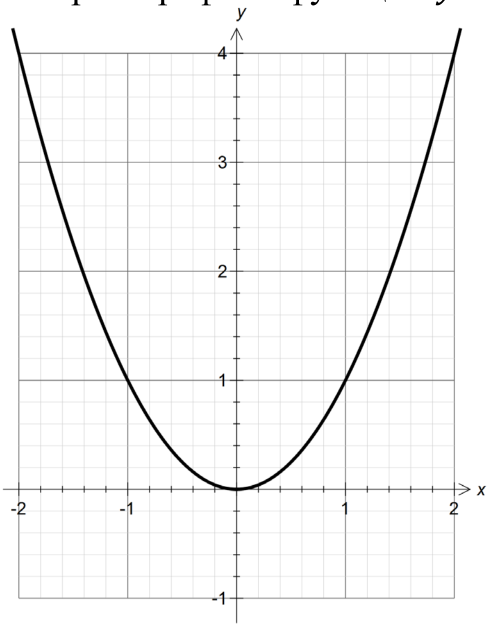
Первое условие означает, что функция может быть четной, только если она рассматривается на множестве D, симметричном относительно $x = 0$. Если это условие не выполнено, то о четности не может быть и речи. Если же выполнено еще и условие 2, то функция будет четной.

Теорема.

Графики четных функций симметричны относительно оси Oy.

Пример 2.

Рассмотрим графики функции $y = x^2$ на $\mathbb{R}$, $[-1; 1]$, $[-1; 2]$, $[0; 1]$.



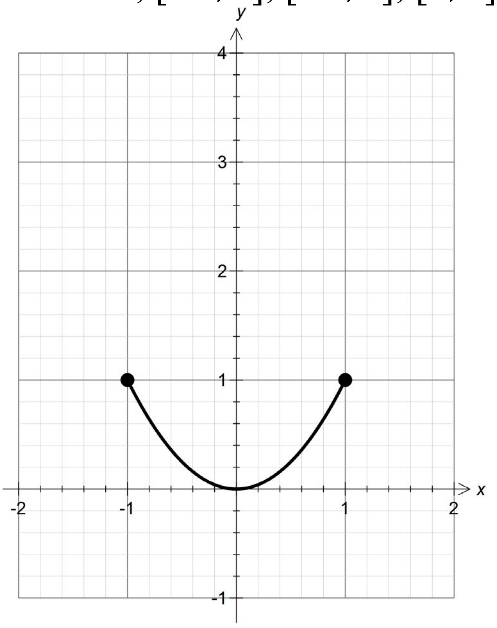
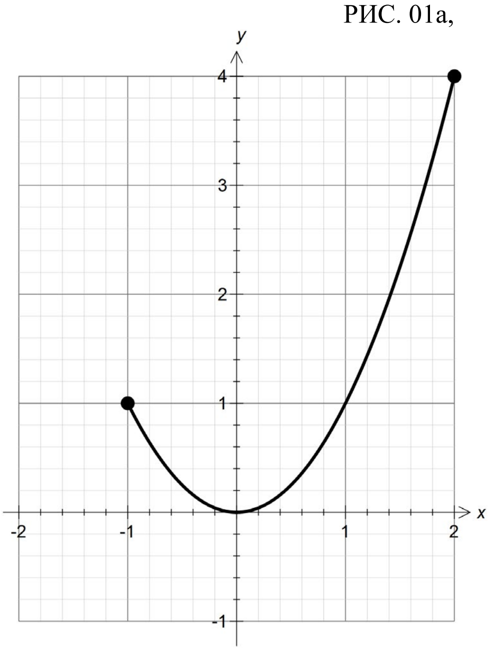


РИС. 01a, РИС. 01b



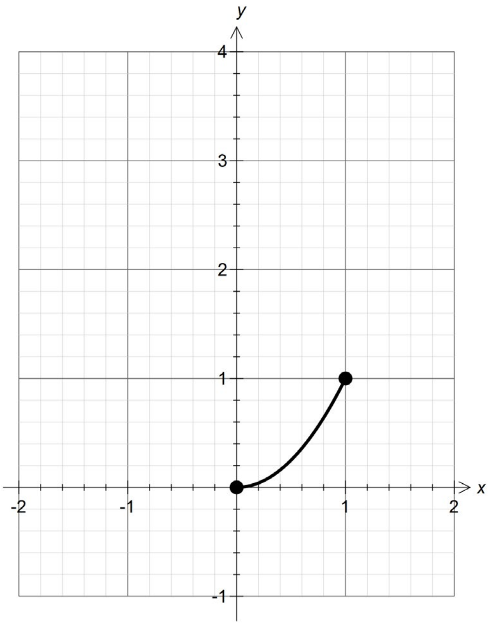


РИС. 01c, РИС. 01d

Заметим, что четными являются только первые две функции.

Определение 3.

Функция $\boldsymbol{y = f(x)}$ называется нечетной на множестве $\boldsymbol{D}$, если

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D} \Rightarrow -\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$$
$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D} \Rightarrow \boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$$

Первое условие означает, что функция может быть нечетной, только если она рассматривается на множестве D, симметричном относительно $x = 0$. Если это условие не выполнено, то о нечетности не может быть и речи. Если же выполнено еще и условие 2, то функция будет нечетной.

Теорема.

Графики нечетных функций центрально симметричны (они переходят в себя при повороте графика на 180° вокруг начала координат).

Определение 4.

Функция монотонно возрастает на множестве $\boldsymbol{D}$, если

$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{D} \mid \boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2} \Rightarrow \boldsymbol{f(x_1)} < f(\boldsymbol{x_2})$.

Определение 5.

Функция монотонно убывает на множестве $\boldsymbol{D}$, если

$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{D} \mid \boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2} \Rightarrow \boldsymbol{f(x_1)} > \boldsymbol{f(x_2)}$.

Первое условие означает, что большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Второе, наоборот, что большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Пример 3.

Заметим, что функция $y = x^2$, рассматриваемая на $D = [0; 1]$, является монотонно возрастающей (см. пример 2). В трех других случаях из примера 2 она монотонной не является.

Далее, для лучшего понимания взаимного расположения графиков различных элементарных функций решим задачу: в одной системе координат изобразить графики нескольких функций.

Задача 1.

В одной системе координат изобразить графики следующих функций: $\boldsymbol{y = x}$, $\boldsymbol{y = x^2}$, $\boldsymbol{y = x^4}$.

Область определения этих функций – $\mathbb{R}$.

Заметим, что

при $x = 0$: $x^2 = 0$ и $x^4 = 0$;

при $x = 1$: $x^2 = 1$ и $x^4 = 1$;

при $0 < x < 1$ выполняется: $x^4 < x^2 < x$, а при $x > 1$ выполняется: $x^4 > x^2 > x$.Функция $y = x$ – нечетная, но функции $y = x^2$, $y = x^4$ – четные, так как $x^{2n} = (-x)^{2n}\ \forall x \in \mathbb{R}$. Поэтому графики двух последних функций симметричны относительно оси Oy. Это означает, что их графики можно построить при $x \geq 0$, а затем сделать симметрию относительно оси Oy.

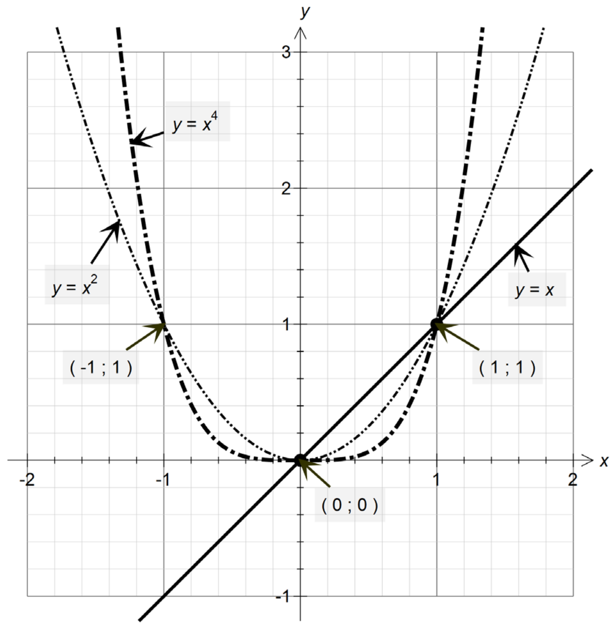


РИС. 02

Задача 2.

В одной системе координат изобразить графики следующих функций: $\boldsymbol{y = x}$, $\boldsymbol{y = x^3}$, $\boldsymbol{y = x^5}$.

Область определения этих функций – $\mathbb{R}$.

Заметим, что

при $x = 0$: $x^3 = 0$ и $x^5 = 0$;

при $x = 1$: $x^3 = 1$ и $x^5 = 1$;

при $0 < x < 1$: $x^5 < x^3 < x$, а при $x > 1$: $x^5 > x^3 > x$.

Все функции: $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$, – являются нечетными, так как $(-x)^{2n+1} = -(x)^{2n+1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Поэтому все графики центрально симметричны. Это означает, что их можно построить при $x \geq 0$, а затем сделать поворот на 180° вокруг начала координат.

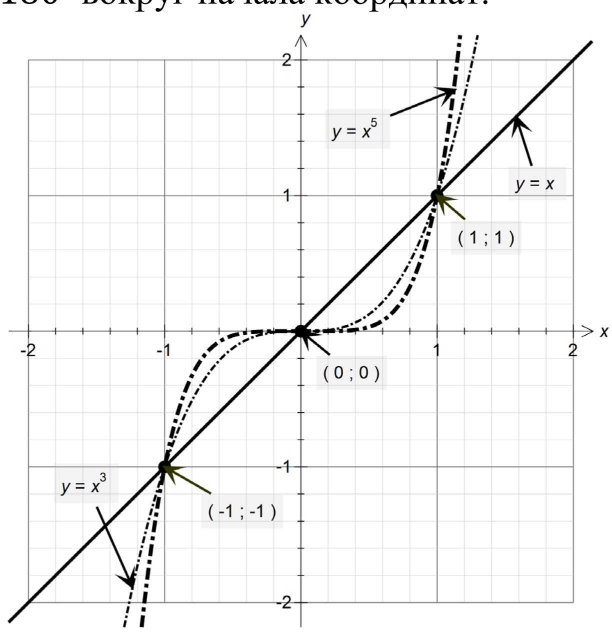


РИС. 03

Задача 3.

В одной системе координат изобразить графики следующих функций: $\boldsymbol{y = x}$, $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$, $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{x}}$.

Заметим, что функцию $y = \sqrt{x}$ можно рассматривать только при $x \geq 0$, в то время как функцию $y = \sqrt[3]{x}$ можно рассматривать на всей оси, причем, на этом множестве она является нечетной (так как $f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$).

Кроме того, $\forall x$: $0 < x < 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x} > \sqrt{x}$ и $\forall x$: $x > 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x} < \sqrt{x}$.

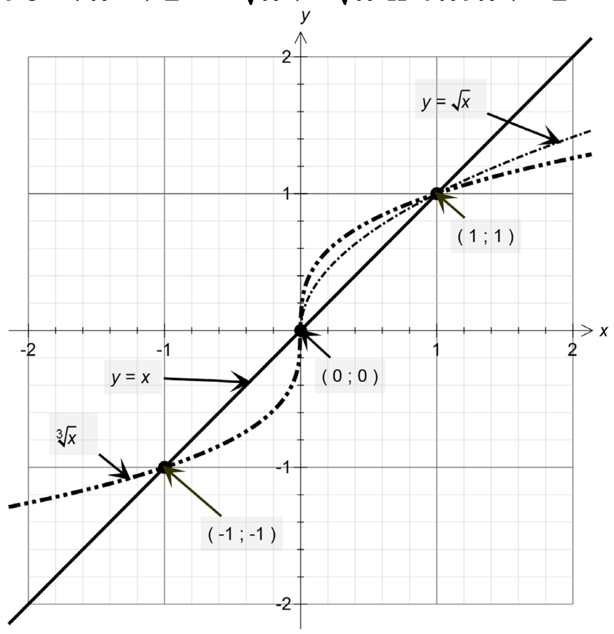


РИС. 04

Задача 4.

В одной системе координат изобразить графики следующих функций: $\boldsymbol{y = \frac{1}{x^2}}$, $\boldsymbol{y = \frac{1}{x^3}}$.

Областью определения обеих функций является множество $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, то есть вся действительная ось без точки 0. Кроме того, первая функция является четной (и ее график симметричен относительно оси Oy, а вторая – нечетной, и ее график центрально симметричен.

У графиков этих функций есть вертикальные и горизонтальные асимптоты, то есть прямые, к которым графики «приближаются» (строгое определение будет дано позже). Заметим, что график функции $\mathrm{y = f(x)}$, не может пересекать вертикальную асимптоту, а горизонтальную – может (примеры рассмотрим в дальнейшем). При построении графиков асимптоты нужно изображать обязательно. Обратите внимание на взаимное расположение этих кривых при $0 < x < 1$ и при $\mathrm{x} > 1$.

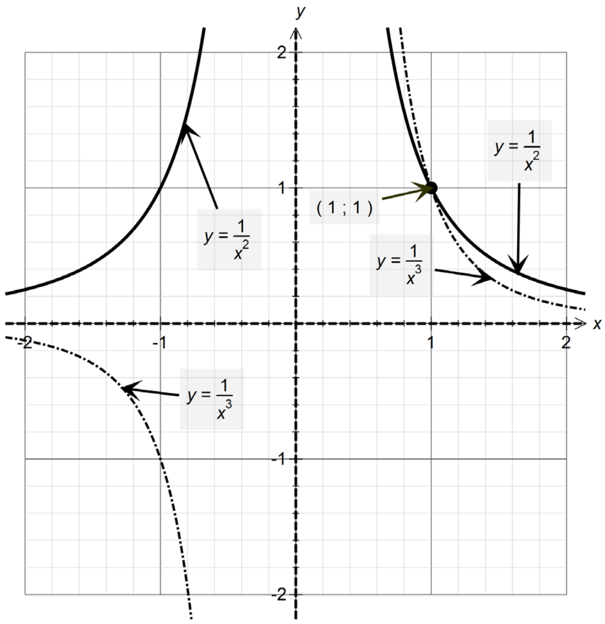


РИС. 05

<u>Задача 5.</u>

В одной системе координат изобразить графики следующих функций: $\boldsymbol{y = 2^x, y = 3^x}$.

Обе функции являются показательными с основанием больше единицы. Область определения таких функций – $\mathbb{R}$, они возрастают, принимают только положительные значения и ось Ox является для них горизонтальной асимптотой. Обратите внимание на взаимное расположение этих кривых при $x < 0$ и при $x > 0$.

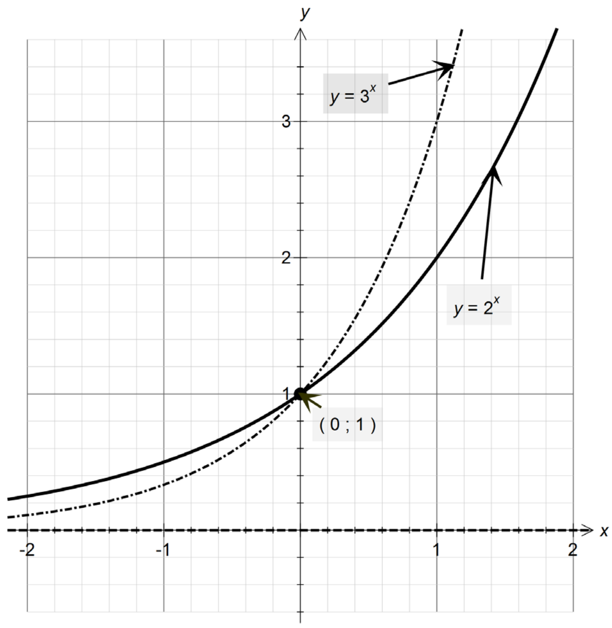


РИС. 06

<u>Задача 6.</u>

В одной системе координат изобразить графики следующих функций: $\boldsymbol{y = (½)^x, y = (⅓)^x}$.

Обе функции являются показательными с основанием меньше единицы (но больше нуля!). Область определения таких функций – $\mathbb{R}$, они убывают, принимают только положительные значения и ось Ox является для них горизонтальной асимптотой. Обратите внимание на взаимное расположение этих кривых при $x < 0$ и при $x > 0$.

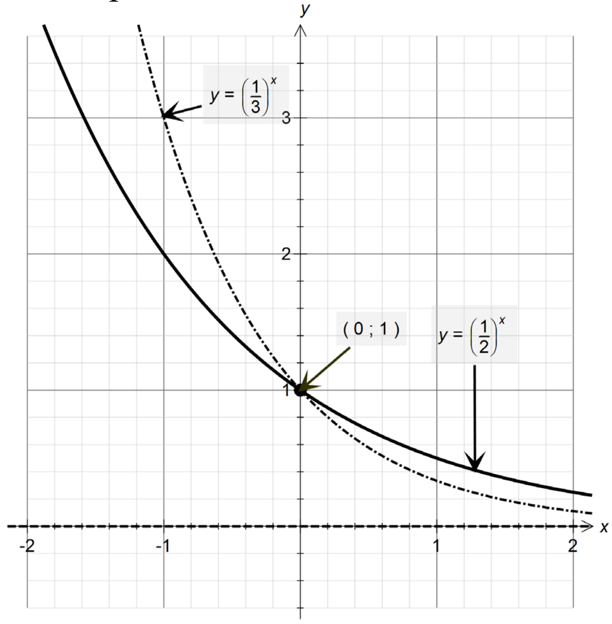


РИС. 07

Если основание показательной функции равно единице, то $y = 1^x \equiv 1$.

<u>Задача 7.</u>

В одной системе координат изобразить графики следующих функций: $\boldsymbol{y = \log_2 x, y = \log_3 x}$.

Обе функции являются логарифмическими с основанием больше 1. Областью определения этих функций является $(0; +\infty)$. Обе функции монотонно возрастают и принимают все значения на $(-\infty; +\infty)$. Ось Oy является для них вертикальной асимптотой. Обратите внимание на взаимное расположение этих кривых при $0 < x < 1$ и при $x > 1$.

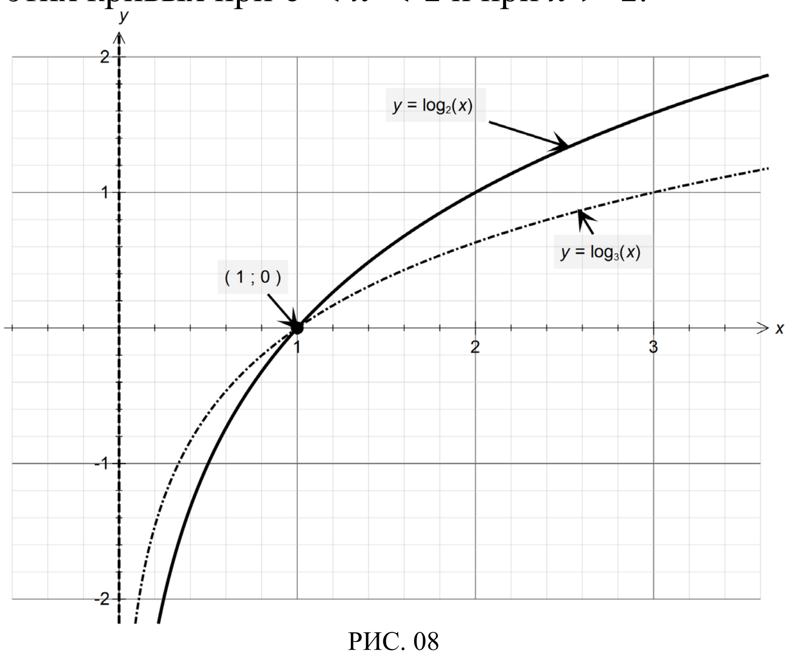


РИС. 08

Задача 8.

В одной системе координат изобразить графики следующих функций: $\boldsymbol{y = \log_{1/2} x, y = \log_{1/3} x}$.

Обе функции являются логарифмическими с основанием $0 < a < 1$. Область определения этих функций – $(0; +\infty)$. Обе функции монотонно убывают и принимают все значения на $(-\infty; +\infty)$. Ось Oy является для них вертикальной асимптотой. Обратите внимание на взаимное расположение этих кривых при $0 < x < 1$ и при $x > 1$.

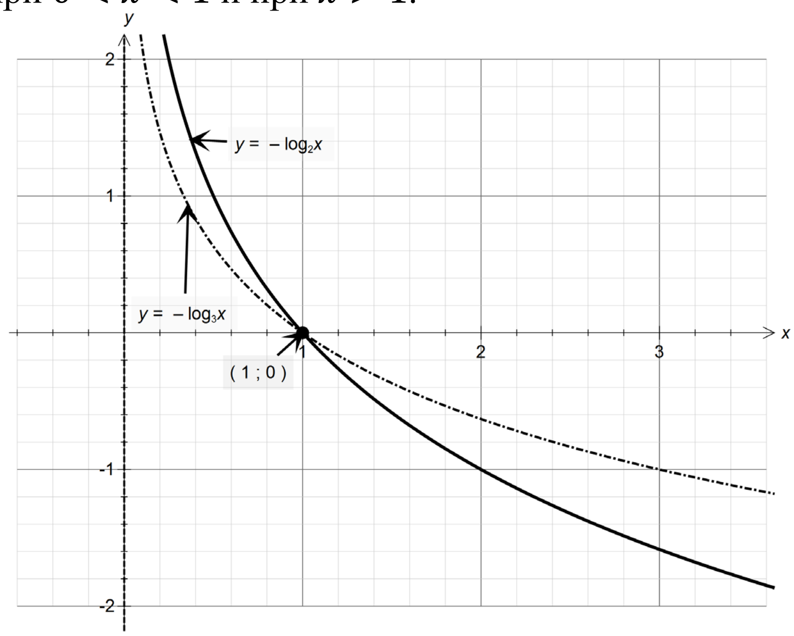


РИС. 09

Определение 6.

Функция $y = f(x)$называется периодической с периодом $\boldsymbol{T} > 0$ на множестве $\boldsymbol{D}$**,** если

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D} \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{T} \in \boldsymbol{D}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{T} \in \boldsymbol{D}$$
$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D} \Rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Заметим, что первое условие означает, что если $x_0 \in D$, то все точки $x_0 \pm T, x_0 \pm 2T, x_0 \pm 3T, \ldots \in D$, то есть область D не может быть ограниченной.

Второе условие означает, что значения функции $f(x)$ «повторяются» каждый раз, когда аргумент изменяется на величину T.

Заметим, что из первого условия в определении периодичности следует, что, если $x_0 \in D$, то $x_0 \pm 2T, x_0 \pm 4T, \ldots \in D$ и $f(x_0) \equiv f(x_0 \pm 2T) \equiv f(x_0 \pm 4T) \equiv \ldots$ Следовательно, число $2T > 0$ также является периодом для функции $f(x)$. Аналогично можно показать, что и числа $3T, 4T, \ldots, nT, \ldots$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ являются периодами функции $f(x)$ (но числа $-T, -2T, \ldots, -nT, \ldots$ $\forall n \in \mathbb{N}$ периодами не являются, так как по определению период всегда больше нуля). Что же имеется в виду, когда говорят, что период функции, например, $y = \sin x$ равен 2π? Имеется в виду ***наименьший период***. При этом, конечно, $4\pi, 6\pi, \ldots$ также являются периодами функции $y = \sin x$.

Всегда ли периодическая функция имеет наименьший период? Нет. Рассмотрим функцию $f(x) \equiv const$. Для нее любое положительное число T является периодом. А так как наименьшего положительного числа не существует, то не существует и наименьшего периода у этой функции.

Второй вопрос, который часто возникает: является ли $y = \sin x$ периодической, например, на $[0; +\infty)$ или на $[-100\pi; 200\pi]$? Нет, на этих промежутках эта функция периодической не является (не выполняется первый пункт определения). Но ничто не запрещает нам, воспользовавшись периодичностью $y = \sin x$ на всей действительной оси, сделать выводы о значениях этой функции на предлагаемых промежутках.

Задача 9.

В одной системе координат изобразить графики следующих функций: $\boldsymbol{y = \sin x}$, $\boldsymbol{y = x}$.

Областью определения обеих функций является вся действительная ось. Обе функции являются нечетными, то есть их графики центрально симметричны (достаточно построить графики при $x \geq 0$ и сделать симметрию). Отметим, что графики этих функций пересекаются только при $x = 0$; при $x > 0$ график $y = x$ лежит выше графика $y = \sin x$ (а при $x < 0$ – наоборот, ниже). Кроме того, $y = \sin x$ на $\mathbb{R}$ – периодическая функция с минимальным периодом $T = 2\pi$. Это значит, что можно построить график функции $y = \sin x$ на любом промежутке длины 2π, а затем «бесконечное число раз сдвинуть его на расстояние 2π вдоль оси Ox» влево и вправо.

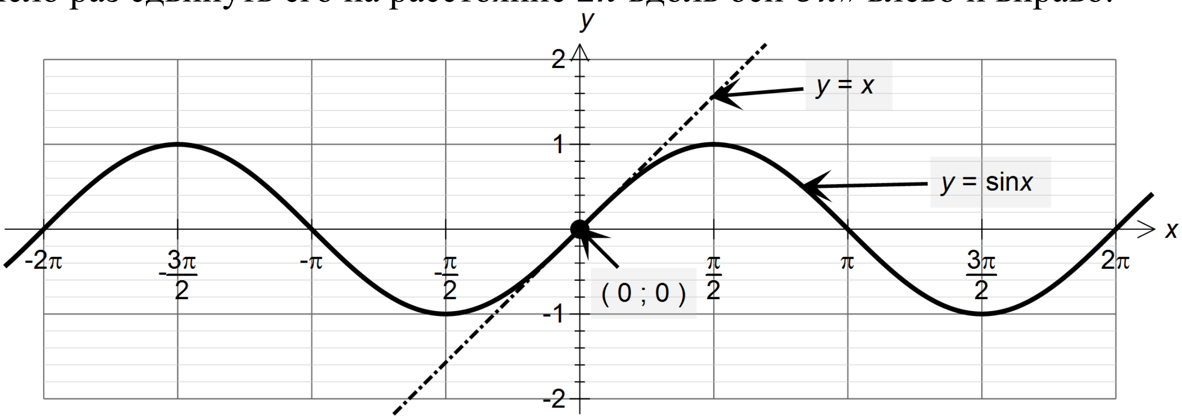


РИС. 10

Изобразить график функции $\boldsymbol{y = \cos x}$. Заметим, что кривая $y = \cos x$ получается из кривой $y = \sin x$ сдвигом на величину $\frac{\pi}{2}$ вправо. Почему же мы изучаем функцию $y = \cos x$ отдельно, а не рассматриваем ее как «подвинутый синус»? Потому что обе эти функции играют очень важную роль в математике (и обладают все-таки некоторыми разными свойствами), и лучше сразу изучить свойства каждой, чем потом «постоянно двигать».

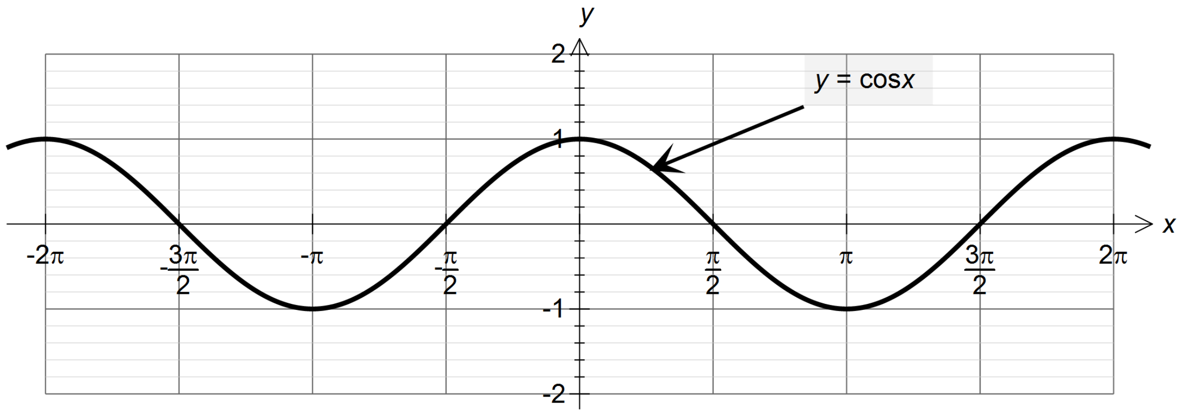


РИС. 11

Задача 10.

Изобразить графики функций $\boldsymbol{y = \operatorname{tg} x}$ и $\boldsymbol{y = \operatorname{ctg} x}$.

Обе функции являются нечетными, то есть их графики центрально симметричны. Области определения этих функций:

$$y = \operatorname{tg} x : D = \left\{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$y = \operatorname{ctg} x \ : D = \ \{x \in \mathbb{R}, x \neq \ \pi n, n \in \mathbb{Z}\}.$$

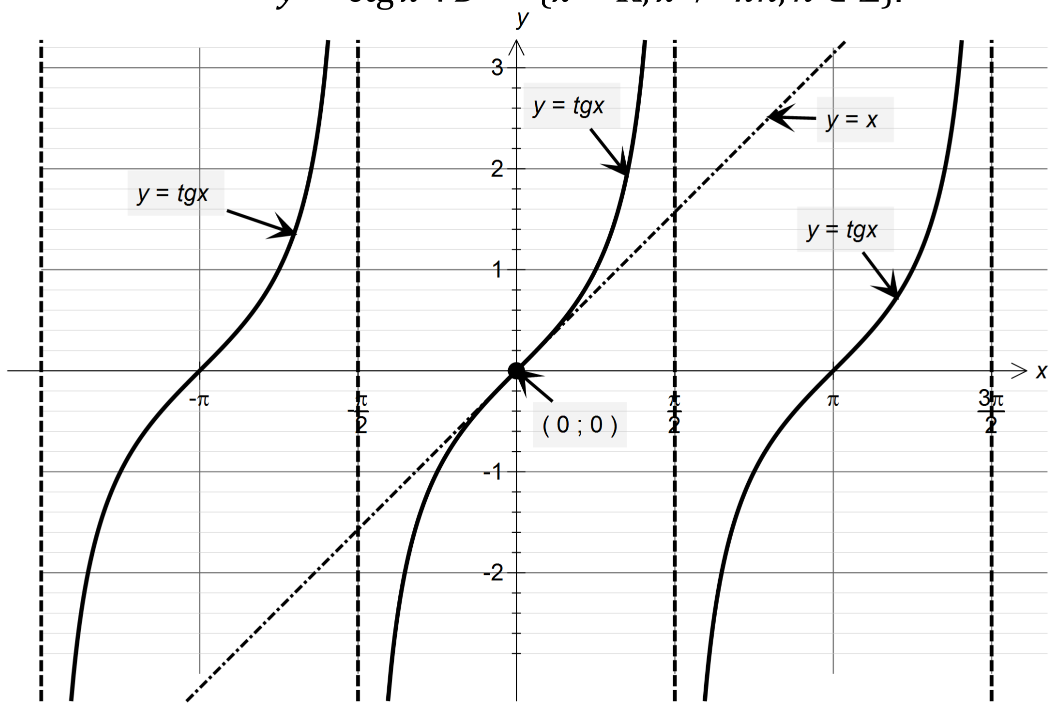


РИС. 12

Заметим, что ветвь функции $y = \operatorname{tg} x$, расположенная в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (ее часто называют «основная ветвь»), пересекается с прямой $y = x$ только в одной точке (при $x = 0$).

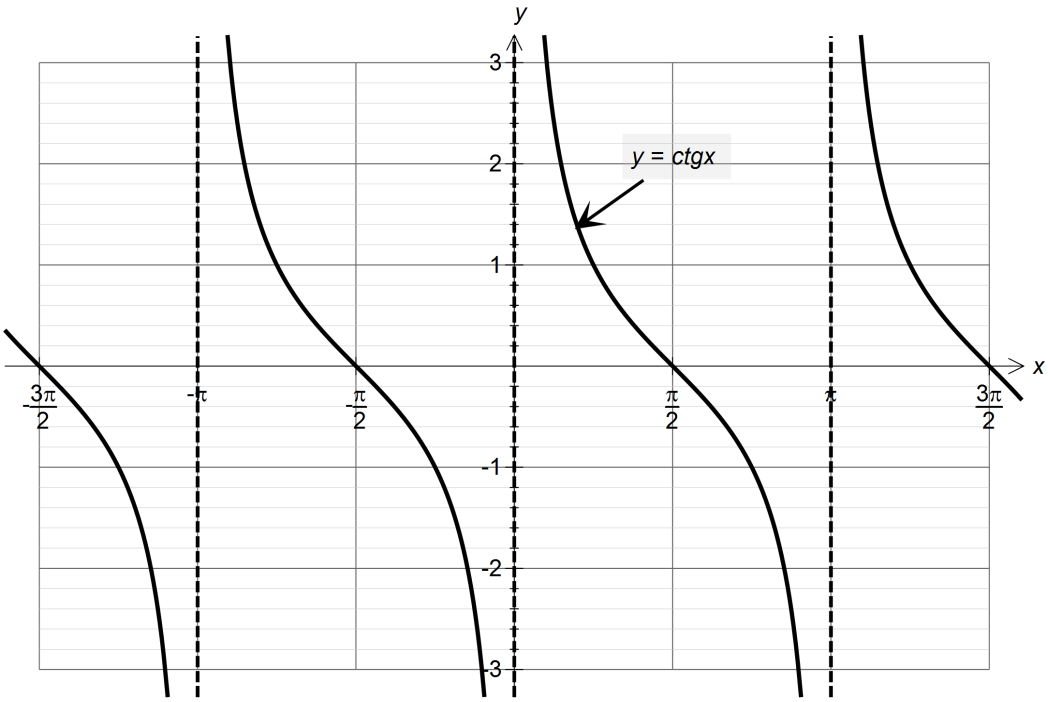


РИС. 13

Задача 11.

Изобразить графики функций $\boldsymbol{y = \arcsin x}$, $\boldsymbol{y = \arccos x}$, $\boldsymbol{y = \operatorname{arctg} x}$, $\boldsymbol{y = \operatorname{arcctg} x}$. Эти функции являются обратными тригонометрическими функциями.

Областью определения функций $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ является отрезок $[-1; 1]$.

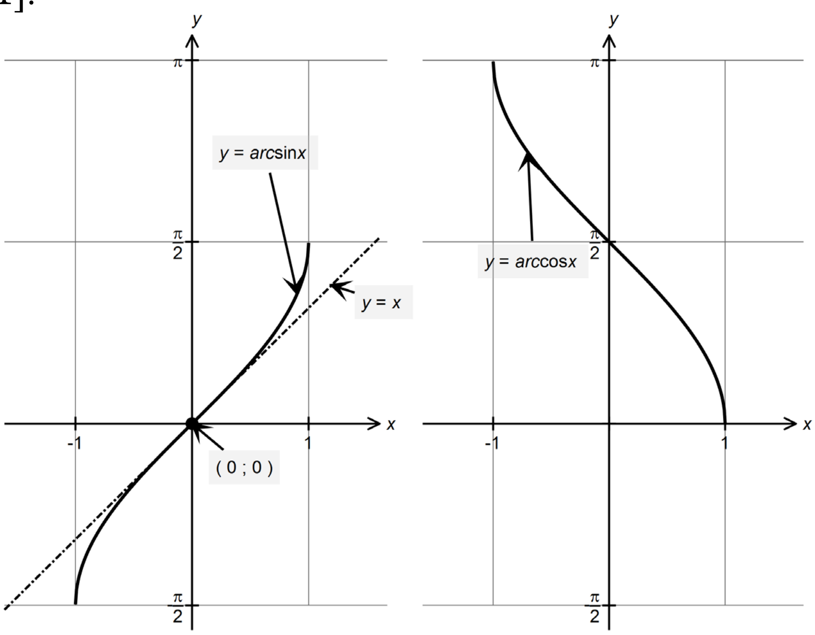


РИС. 14a, РИС. 14b

График функции $y = \arcsin x$ имеет с прямой $y = x$ только одну общую точку.

Отметьте для себя возрастание и убывание этих функций и области их значений.

Областью определения функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ является вся действительная ось.

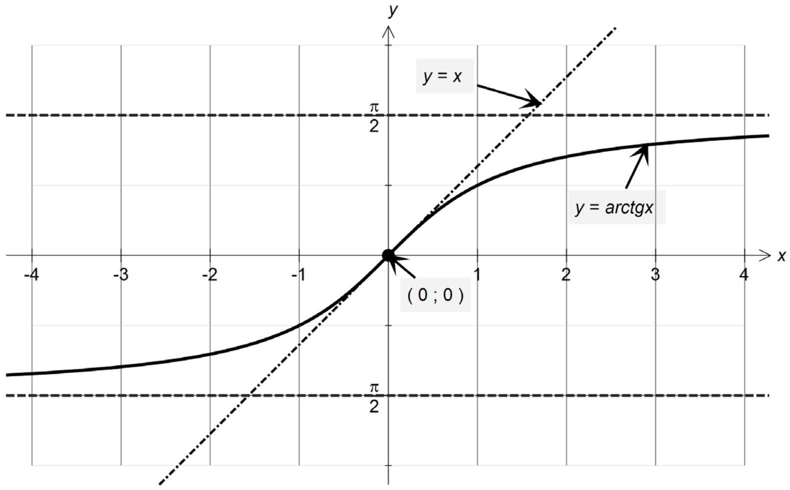


РИС. 15

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ имеет две горизонтальные асимптоты: $y = \frac{\pi}{2}$ и $y = -\frac{\pi}{2}$. Кривая $y = \operatorname{arctg} x$ пересекается с прямой $y = x$ только в одной точке.

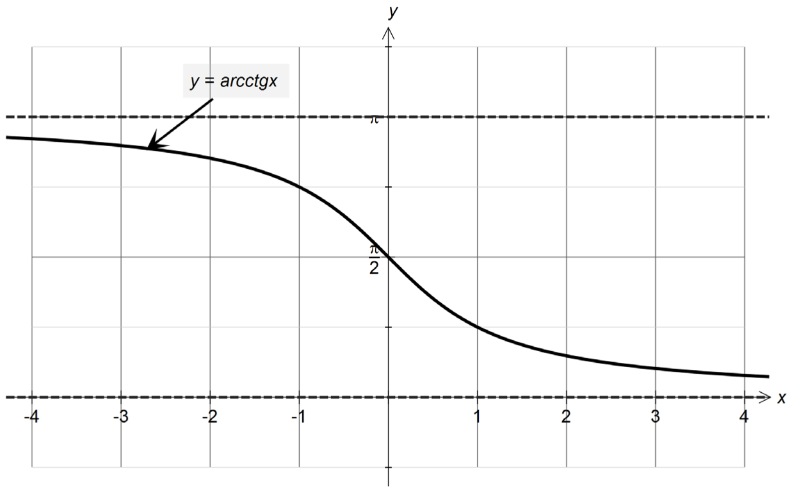


РИС. 16

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ имеет две горизонтальные асимптоты: $y = 0$ и $y = \pi$.

Отметьте для себя возрастание и убывание этих функций и области их значений.

§2. Элементарные преобразования графиков

Для удобства дальнейшего использования сначала приведем все преобразования, а затем подробно рассмотрим каждое отдельно.

Итак, предположим, что нам известен график функции $y = f(x)$. Как построить графики следующих функций?

I.	$y = A \cdot f(x)$, $A > 0$	растянуть график $y = f(x)$ в A раз от оси Ox (вдоль оси Oy)
II.	$y = -f(x)$	сделать симметрию графика $y = f(x)$

		относительно оси Ox
III.	$y = f(x) + B$	перенести график функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на величину B
IV.	$y = f(kx)$, $k > 0$	сжать график функции $y = f(x)$ в k раз к оси Oy
V.	$y = f(x - a)$	перенести график функции $y = f(x)$ на величину a вдоль оси Ox
VI.	$y = f(-x)$	сделать симметрию графика функции $y = f(x)$ относительно оси Oy
VII.	$y = f(\|x\|)$	1) построить график функции $y = f(x)$; 2) убрать часть графика при $x < 0$, оставить часть графика функции $y = f(x)$ при $x \geq 0$; 3) сделав симметрию последней части графика относительно оси Oy, получить часть графика функции $y = f(\|x\|)$ при $x < 0$
VIII.	$y = \|f(x)\|$	$y = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ -f(x), f(x) < 0 \end{cases}$
IX.	$y = f(kx + b)$, $k > 0$	1) сжатие графика функции $y = f(x)$ в k раз к оси Oy 2) сдвиг на величину $-\frac{b}{k}$ вдоль оси Ox
X.	$y = f(kx + b)$, $k < 0$	1) сжатие графика функции $y = f(x)$ в $\|k\|$ раз к оси Oy 2) симметрия относительно оси Oy 3) сдвиг на величину $-\frac{b}{k}$ вдоль оси Ox

Рассмотрим теперь каждое преобразование отдельно, приведем примеры и некоторые пояснения.

I. $y = f(x) \rightarrow y = A \cdot f(x)$, $A > 0$ – растяжение в A раз от оси Ox.

Пример I .1.

Построить в одной системе координат графики функций $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$.

Заметим, что в каждой точке значение функции $y = 2x^2$ будет в 2 раза больше, чем было у функции $y = x^2$, то есть точка ее графика будет находиться в 2 раза дальше от оси OX.

Для функции $y = \frac{1}{2}x^2$ это значение умножится на $A = \frac{1}{2}$, а это значит, что расстояние уменьшится в 2 раза.

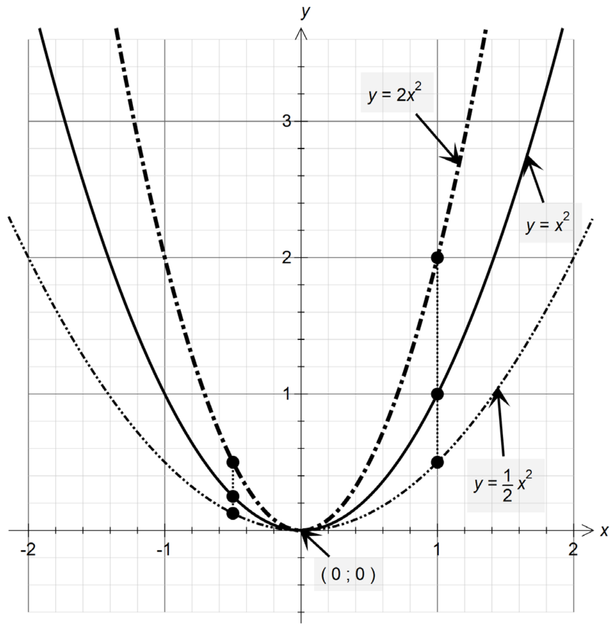


РИС. 17

Заметим, что

1) растяжение от оси Ox с коэффициентом $0 < A < 1$ является сжатием с коэффициентом $\frac{1}{A}$;

2) при растяжении (сжатии) графика от оси Ox точки, лежащие на оси Ox, остаются на месте.

<u>Пример I .2.</u>

Построить график функции $y = 3\log_2 x$.

Нужно взять график функции $y = \log_2 x$ и каждую точку «отдалить» от оси Ox в 3 раза (то есть сделать растяжение с коэффициентом $A = 3$).

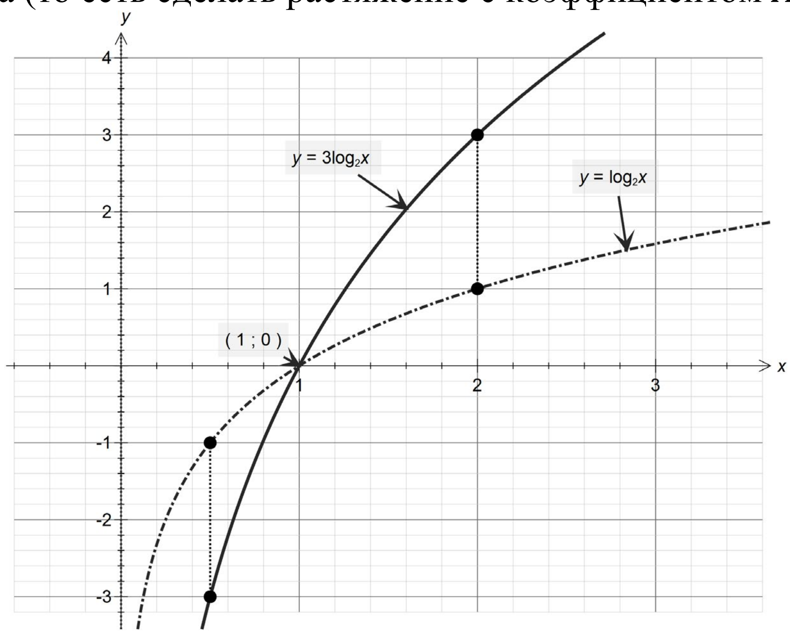


РИС. 18

<u>Пример I .3.</u>

Построить график функции $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$.

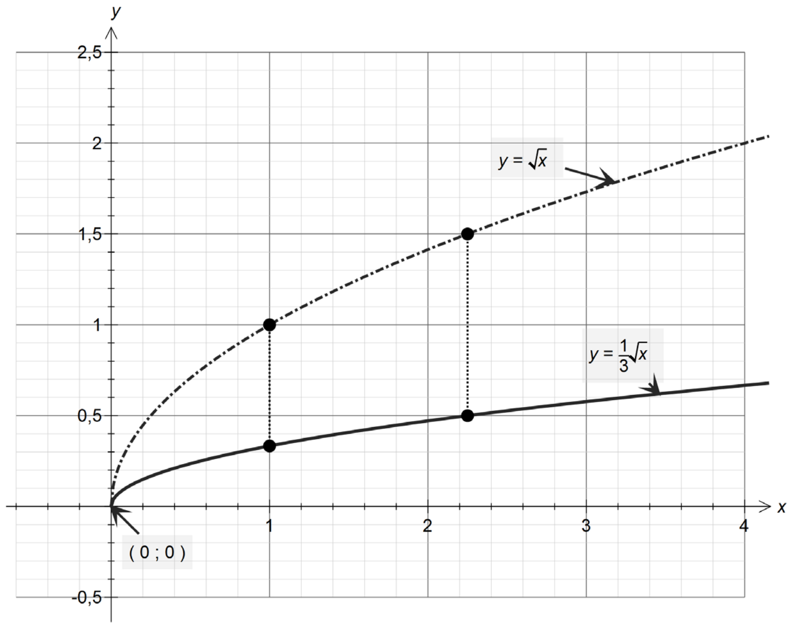


РИС. 19

Нужно взять график функции $y = \sqrt{x}$ и сделать растяжение от оси Ox с коэффициентом $A = \frac{1}{3}$, (то есть сжатие с коэффициентом $\frac{1}{A} = 3$).

II. $y = f(x) \to y = -f(x)$ – симметрия относительно оси Ox.

Пример II.1.

Построить график функции $y = -x^2$.

Возьмем график функции $y = x^2$ и заметим, что функция $y = -x^2$ в каждой точке принимает значение противоположное по знаку тому, которое принимала функция $y = x^2$, что и соответствует симметрии относительно оси Ox.

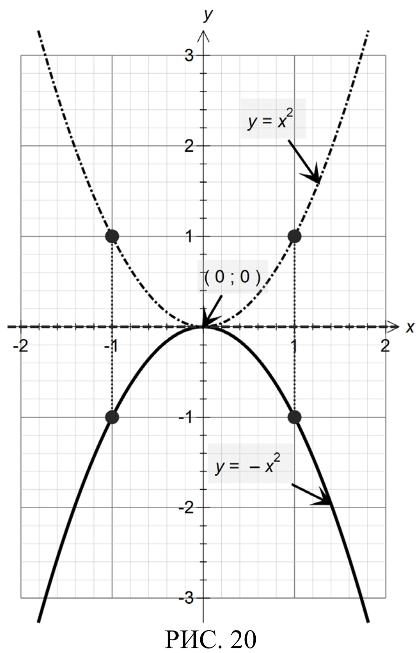


РИС. 20

Пример II.2.

Построить график функции $y = -\frac{1}{x}$.

Возьмем график функции $y = \frac{1}{x}$ и сделаем симметрию относительно оси Ox.

Заметим, что при симметрии относительно координатных осей асимптоты $x = 0$ и $y = 0$ переходят в себя.

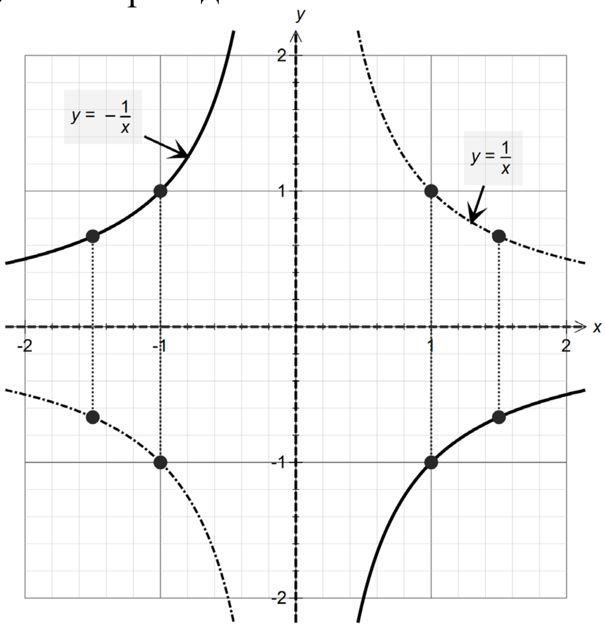


РИС. 21

Пример II.3.

Построить график функции $y = -\frac{1}{3} \cdot 2^x$.

Построение графика этой функции потребует следующей ***цепочки преобразований***:

$$y = 2^x \xrightarrow[]{\substack{\text{растяжение} \\ \text{от оси } Ox \\ \text{с коэф.} A=1/3}} y = \frac{1}{3} \cdot 2^x \xrightarrow[]{\substack{\text{симметрия} \\ \text{относительно} \\ \text{оси } Ox}} y = -\frac{1}{3} \cdot 2^x.$$

Важное замечание.

1) В дальнейшем при самостоятельной работе всегда записывайте цепочки преобразований. Построение цепочек преобразований является самой важной частью работы, связанной с преобразованиями графиков.

2) Точки пересечения с координатными осями, значения функций в «характерных» точках и асимптоты должны быть указаны.

3) Все графики должны быть подписаны.

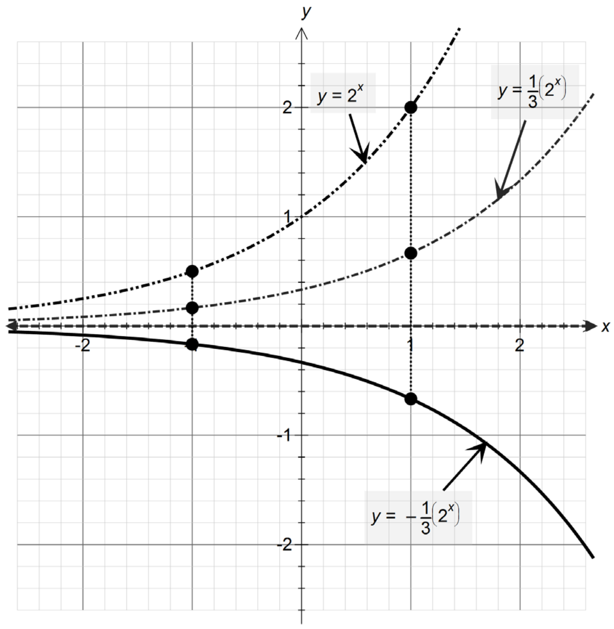


РИС. 22

Пример II.4.

Построить график функции $y = -2\sin x$.

Для построения графика этой функции потребуется следующая цепочка преобразований:

$$y = \sin x \xrightarrow[]{\substack{\text{растяжение}\\ \text{от оси } Ox\\ \text{с коэф.} A=2}} y = 2\sin x \xrightarrow[]{\substack{\text{симметрия}\\ \text{относительно}\\ \text{оси } Ox}} y = -2\sin x\ .$$

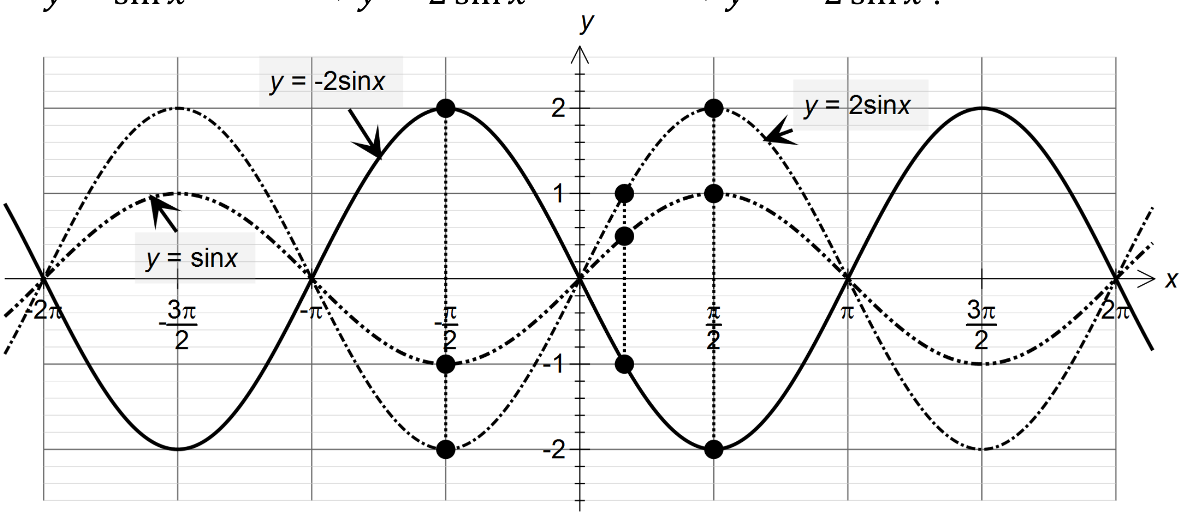


РИС. 23

При растяжении от оси Ox точки графика функции $y = \sin x$, лежавшие на оси Ox, останутся на месте (это точки $x = \pi n, n\epsilon\mathbb{Z}$). Точки графика при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ поднимутся в 2 раза выше (значение y станет равным 2), а точки графика при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ опустятся в 2 раза ниже (значение y станет равным -2). Соединяем полученные характерные точки плавной линией того же вида. Для получения графика $y = -2\sin x$ делаем симметрию относительно оси Ox.

Замечание.

Так как функция $y = -2\sin x$ имеет период $N = 2\pi$, то достаточно построить график этой функции на отрезке, например, $[0; 2\pi]$ и затем периодически продолжить.

Замечание.

Два преобразования: растяжение от оси Ox и симметрия относительно оси Ox, – перестановочны, то есть их можно делать в любом порядке.

Важное замечание.

В одной системе координат не изображайте более 3-х графиков.

III. $y = f(x) \to y = f(x) + B$ – сдвиг на величину B вдоль оси Oy.

Действительно, функция $y = f(x)$ в каждой точке $x_0 \in D_f$ принимала значение $f(x_0)$. Функция $y = f(x) + B$ будет принимать значение $f(x_0) + B$.

Пример III.1.

Построить график функции $y = \cos x + 1$.

$$y = \cos x \xrightarrow[\text{оси } Oy \text{ на } B=1]{\text{сдвиг вдоль}} y = \cos x + 1.$$

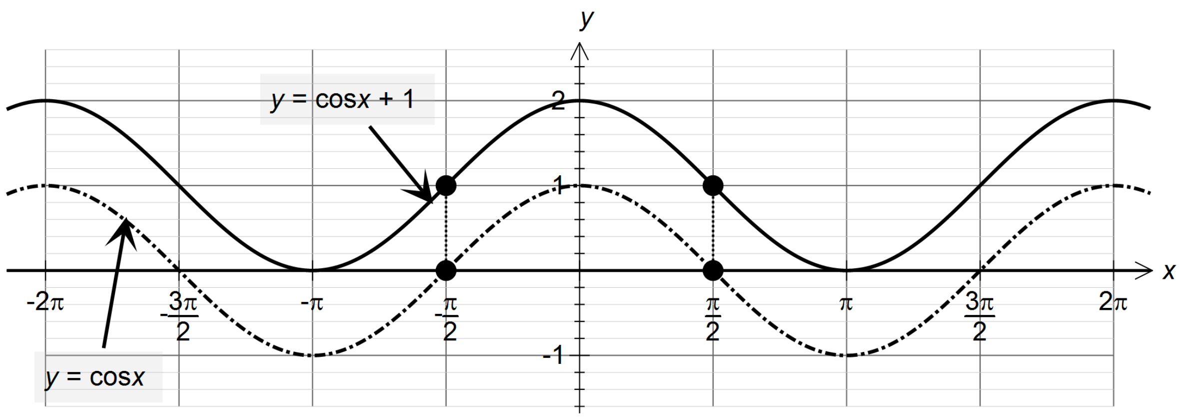


РИС. 24

Пример III.2.

Построить график функции $y = -2\sqrt{x} + 3$.

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{с коэф.} A=2]{\substack{\text{растяжение} \\ \text{от оси } Ox}} y = 2\sqrt{x} \xrightarrow[\text{оси } Ox]{\substack{\text{симметрия} \\ \text{относительно}}} y = -2\sqrt{x} \xrightarrow[\text{на } B=3]{\substack{\text{сдвиг} \\ \text{вдоль} \\ \text{оси } Oy}} y = -2\sqrt{x} + 3.$$

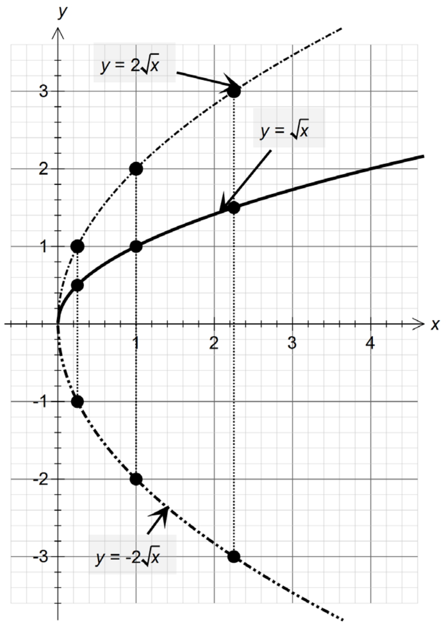


РИС. 25a

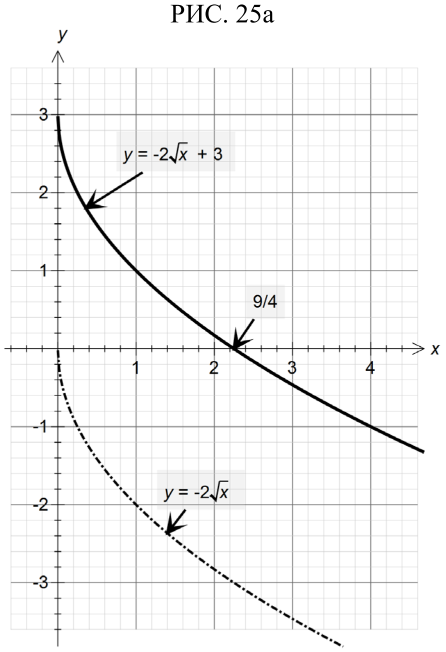


РИС. 25b

Прежде чем поднимать график на 3 единицы вверх, полезно найти точку пересечения с осью Ox: $0 = -2\sqrt{x} + 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4} \in (2; 3)$.

<u>Пример III.3.</u>

Построить график функции $y = -3 \cdot 2^x + 2$.

$$y = 2^x \xrightarrow[\text{с коэф.}A=3]{\substack{\text{растяжение}\\ \text{от оси } Ox}} y = 3 \cdot 2^x \xrightarrow[\text{оси } Ox]{\substack{\text{симметрия}\\ \text{относительно}}} y = -3 \cdot 2^x \xrightarrow[\text{на } B=2]{\substack{\text{сдвиг}\\ \text{вдоль}\\ \text{оси } Oy}} y = -3 \cdot 2^x + 2.$$

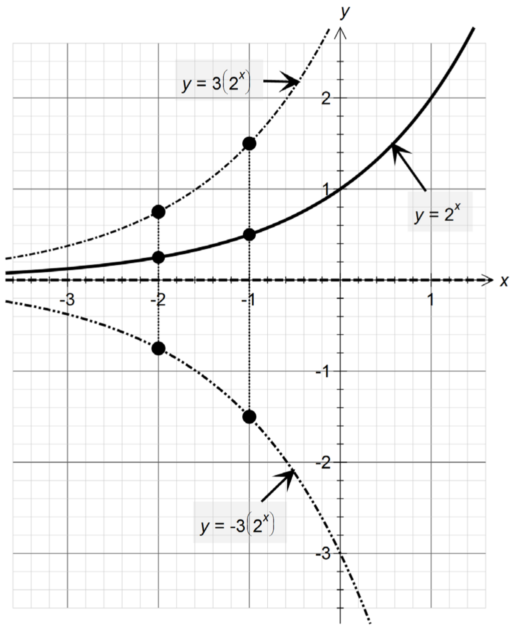


РИС. 26a

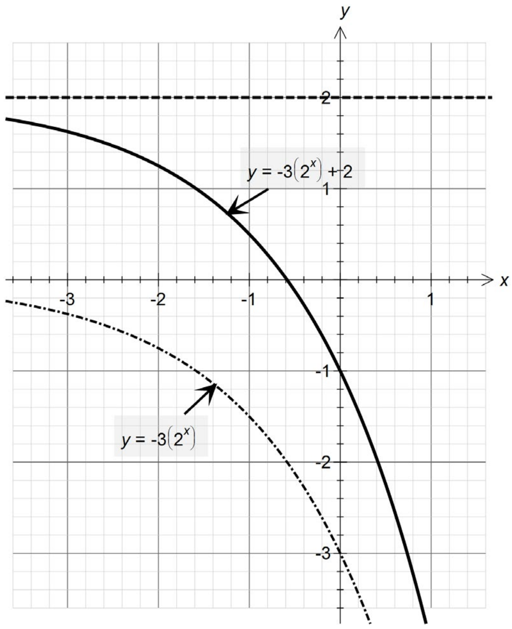


РИС. 26b

Прежде чем перенести график функции $y = -3 \cdot 2^x$ на 2 единицы вверх, перенесем на 2 единицы вверх асимптоту $y \equiv 0$ и определим точку пересечения графика функции $y = -3 \cdot 2^x + 2$ с осью Ox: $0 = -3 \cdot 2^x + 2 \Leftrightarrow\ 2^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \log_2 \left(\frac{2}{3}\right) \in (-1; 0)$.

Замечание.

Преобразование асимптоты графика до преобразования самого графика является хорошей привычкой.

IV. $y = f(x) \to y = f(kx), k > 0$ – сжатие в k раз к оси Oy.

Пример IV.1.

Построить график функции $y = \sin 2x$.

$$y = \sin x \xrightarrow[\text{к оси } Oy]{\text{сжатие в 2 раза}} y = \sin 2x.$$

Воспользуемся периодичностью функции $y = \sin x$. Рассмотрим часть графика функции на промежутке $[0; 2\pi]$, сделаем нужное преобразование и потом периодически продолжим полученный график.

На графике функции $y = \sin x$ возьмем характерные точки и перенесем их в 2 раза ближе к оси Oy; полученные точки соединим плавной линией того же вида.

Заметим, при сжатии к оси Oy точка графика, лежащая на оси Oy, останется на месте.

Точка с координатами $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ перейдет в точку $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$.

Точка с координатами $\left(\frac{3\pi}{2}; -1\right)$ перейдет в точку $\left(\frac{3\pi}{4}; -1\right)$.

Точка с координатами $(\pi; 0)$ перейдет в точку $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Точка с координатами $(2\pi; 0)$ перейдет в точку $(\pi; 0)$.

Функция $y = \sin 2x$ имеет минимальный период $T = \pi$, поэтому далее ее график может быть продолжен периодически.

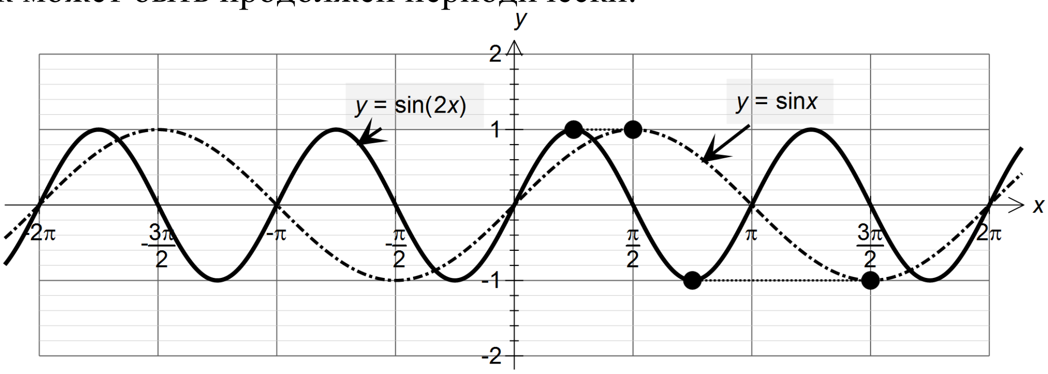


РИС. 27

__Пример IV.2.__

Построить график функции $y = \sqrt[3]{2x}$.

$$y = \sqrt[3]{x} \xrightarrow[\text{к оси } Oy]{\text{сжатие в 2 раза}} y = \sqrt[3]{2x}.$$

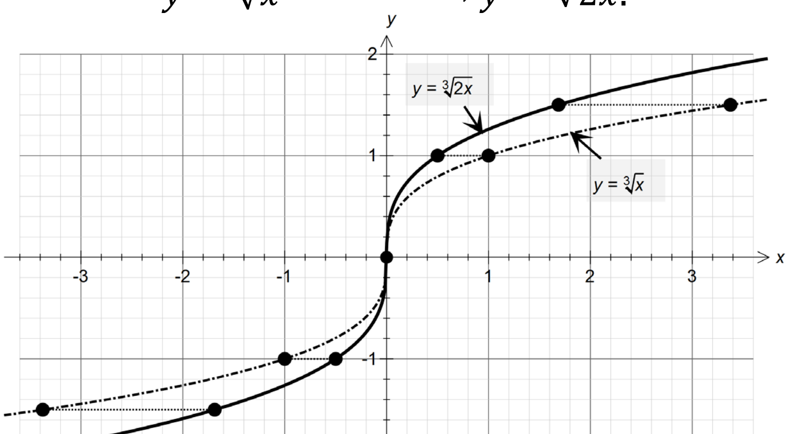


РИС. 28

V. $y = f(x) \to y = f(x - a)$ – перенос графика функции $y = f(x)$ на величину a вдоль оси Ox.

Действительно, то значение, которое функция $y = f(x)$ принимала в точке $x_0 \in D_f$, функция $y = f(x - a)$ будет принимать в точке $x = x_0 + a$.

Пример V.1.

Построить график функции $y = (x - 2)^2$.

$$y = x^2 \xrightarrow[\text{(т.е.вправо на 2 единицы)}]{\substack{\text{сдвиг на величину} \\ a=2 \text{ вдоль оси } Ox}} y = (x - 2)^2.$$

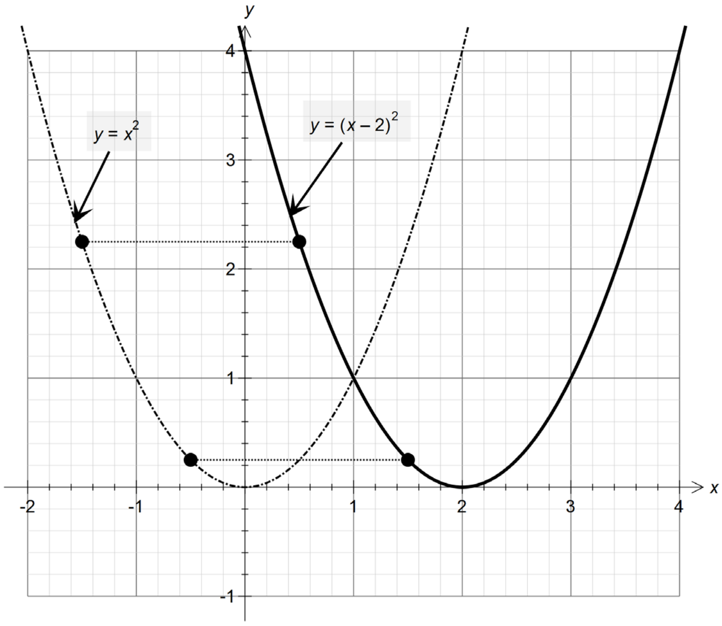


РИС. 29

Пример V.2.

Построить график функции $y = \sqrt{x + 2}$.

Заметим, что $y = \sqrt{x + 2} = \sqrt{x - (-2)}$, поэтому

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\substack{\text{сдвиг на величину} \\ a=-2 \text{ вдоль оси } Ox}} y = \sqrt{x - (-2)}.$$

Возьмем несколько точек на графике функции $y = \sqrt{x}$, сдвинем их на 2 единицы влево и соединим плавной линией того же вида.

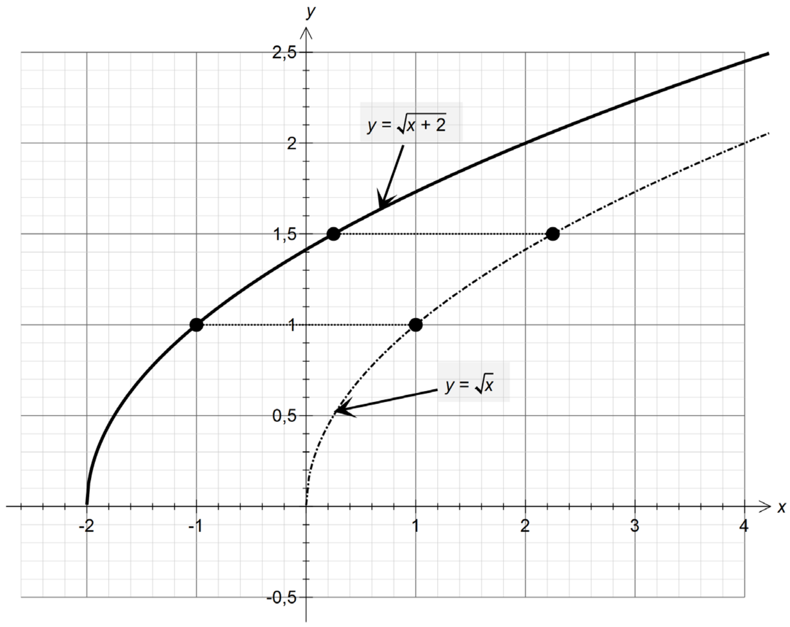


РИС. 30

***Пример V.3*.**

Построить график функции $y = \frac{1}{x+3}$.

Заметим, что $y = \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x-(-3)}$, поэтому получим следующее преобразование:

$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow[a=-3 \text{ вдоль оси } Ox]{\text{сдвиг на величину}} y = \frac{1}{x-(-3)}.$$

Сдвиг двух ветвей гиперболы $y = \frac{1}{x}$ лучше предварить сдвигом асимптот: асимптота $y \equiv 0$ перейдет в себя, асимптота $x \equiv 0$ перейдет в асимптоту $x \equiv -3$.

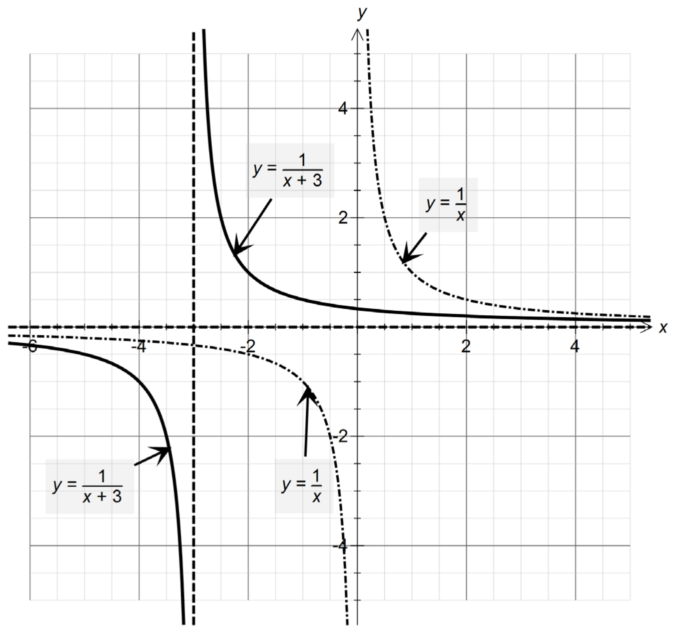


РИС. 31

Точку пересечения графика функции $y = \frac{1}{x+3}$ с осью Oy лучше вычислить заранее $\left(x = 0 \ \Rightarrow y = \frac{1}{3}\right)$.

<u>Пример V.4</u>.

Построить график функции $y = \log_2(x+1) + 2$.

$$y = \log_2 x \xrightarrow[\text{вдоль оси } Ox]{\text{сдвиг на } -1} y = \log_2(x+1) \xrightarrow[\text{вдоль оси } Oy]{\text{сдвиг на } 2} y = \log_2(x+1) + 2.$$

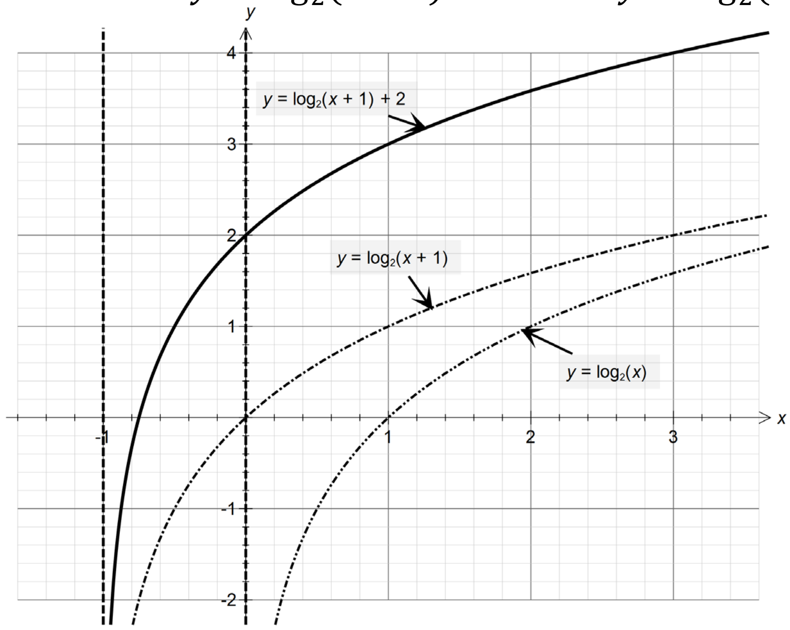


РИС. 32

При сдвиге влево на 1 вертикальная асимптота $x \equiv 0$ перейдет в асимптоту $x \equiv -1$. При сдвиге вверх полученная асимптота останется на месте.

<u>Пример V.5</u>.

Построить график функции $y = -x^2 - 4x - 8$.

Для построения графика квадратичной функции надо сначала проделать процедуру, которая называется «выделение полного квадрата»:

$$y = -x^2 - 4x - 8 = -(x^2 + 4x + 8) = -(x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 8) =$$
$$= -((x+2)^2 + 4) = -(x+2)^2 - 4.$$

Получаем следующую цепочку преобразований:

$$y = x^2 \xrightarrow[\text{вдоль оси } Ox]{\text{сдвиг на } -2} y = (x+2)^2 \xrightarrow[\text{оси } Ox]{\substack{\text{симметрия} \\ \text{относительно}}} y = -(x+2)^2 \xrightarrow[\text{вдоль оси } Oy]{\text{сдвиг на } -4}$$

$$\longrightarrow y = -(x+2)^2 - 4.$$

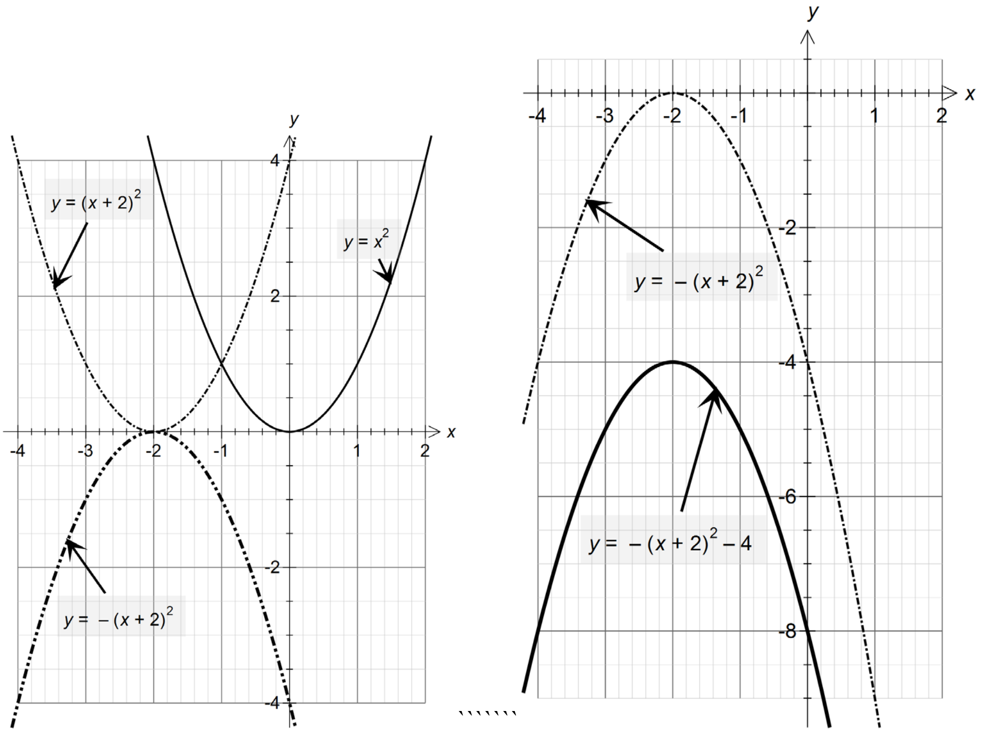


РИС. 33

__Пример V.6__.

Построить график функции $y=\frac{x+2}{x+1}$.

Функция $y=\frac{x+2}{x+1}$ называется «дробно-линейной». Ее графиком являются две ветви гиперболы (одной!). Действительно, преобразуем дробь следующим образом: $\frac{x+2}{x+1}=\frac{x+1+1}{x+1}=\frac{(x+1)+1}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1}=1+\frac{1}{x-(-1)}$. Поэтому, чтобы построить график заданной функции, надо выполнить следующую цепочку преобразований:

$$y=\frac{1}{x}\xrightarrow[]{\substack{\text{сдвиг на } -1\\ \text{вдоль оси } Ox}}y=\frac{1}{x+1}\xrightarrow[]{\substack{\text{сдвиг на } 1\\ \text{вдоль оси } Oy}}y=\frac{1}{x+1}+1.$$

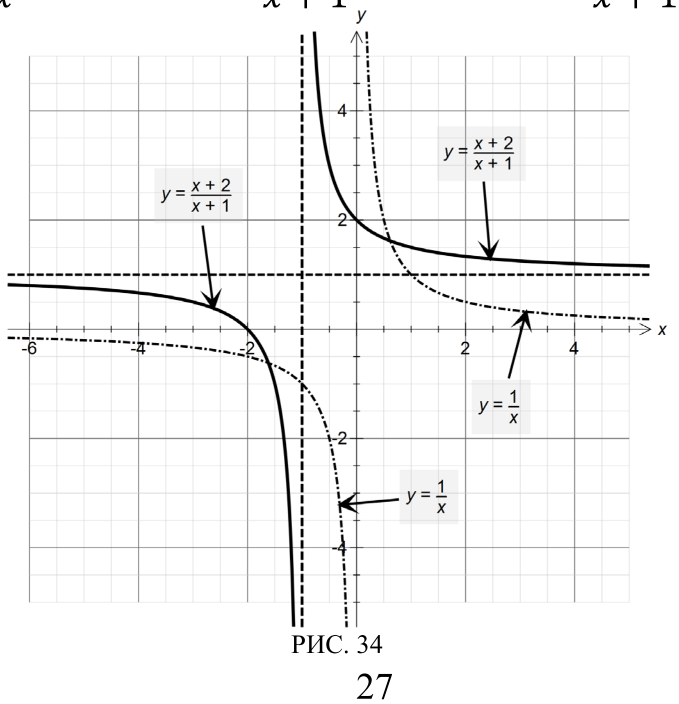


РИС. 34

Замечание.

Эти два сдвига (говорят также «параллельных переноса» или просто «переноса») можно делать одновременно. При этом вертикальная асимптота $x = 0$ перейдет в асимптоту $x = -1$, а горизонтальная асимптота $y = 0$ перейдет в асимптоту $y = 1$.

Точки пересечения с осями координат лучше, как всегда, вычислить заранее. Заодно это послужит косвенной проверкой того, что вы правильно выполнили преобразования:

$$y = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{x+2}{x+1} \Leftrightarrow x = -2; \; x = 0 \Leftrightarrow y = 2.$$

VI. $\boldsymbol{y = f(x) \to y = f(-x)}$ – симметрия относительно оси $\boldsymbol{Oy}$.

Действительно, то значение, которое функция $y = f(x)$ принимала в точке $x_0 \in D_f$, функция $y = f(-x)$ будет принимать в точке $x = -x_0$.

Пример VI.1.

Построить график функции $y = \log_2(-x)$.

$$y = \log_2 x \xrightarrow{\text{симметрия относительно оси } Oy} y = \log_2(-x).$$

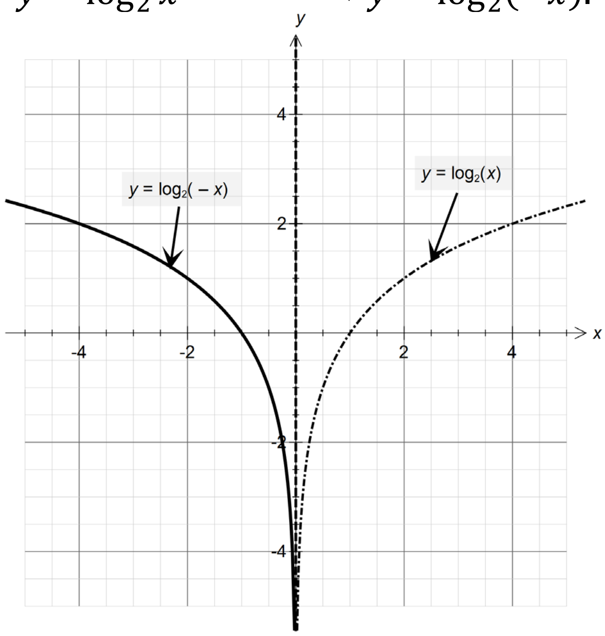


РИС. 35

Пример VI.2.

Построить график функции $y = \sqrt[3]{-x}$.

$$y = \sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{симметрия относительно оси } Oy} y = \sqrt[3]{-x}.$$

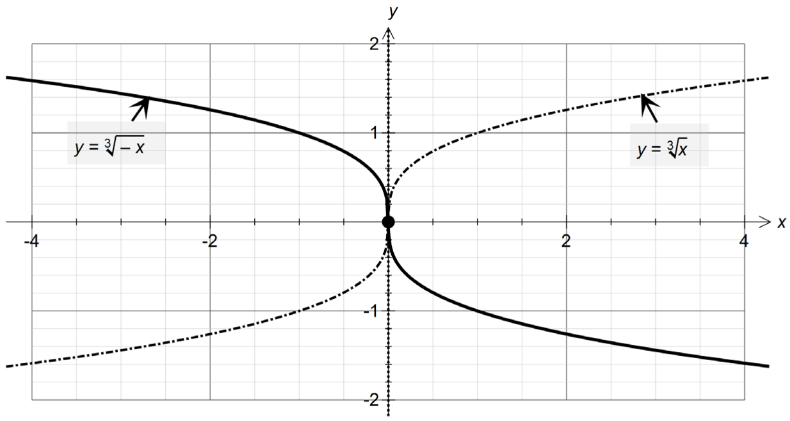


РИС. 36

***Замечание*.**

Функция $y = \sqrt[3]{x}$ – нечетная, то есть $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$. Поэтому можно вместо графика функции $y = \sqrt[3]{-x}$ строить график функции $y = -\sqrt[3]{x}$, который получается из графика функции $y = \sqrt[3]{x}$ симметрией относительно оси Ox.

***Вывод*.**

Прежде чем делать преобразования графика, бывает полезно преобразовать выражение, задающее функцию. Это может упростить цепочку преобразований.

***Пример VI.3*.**

Построить график функции $y = \sqrt{-x} - 1$.

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\substack{\text{симметрия} \\ \text{относительно} \\ \text{оси } Oy}} y = \sqrt{-x} \xrightarrow{\substack{\text{сдвиг на } -1 \\ \text{вдоль оси } Oy}} y = \sqrt{-x} - 1.$$

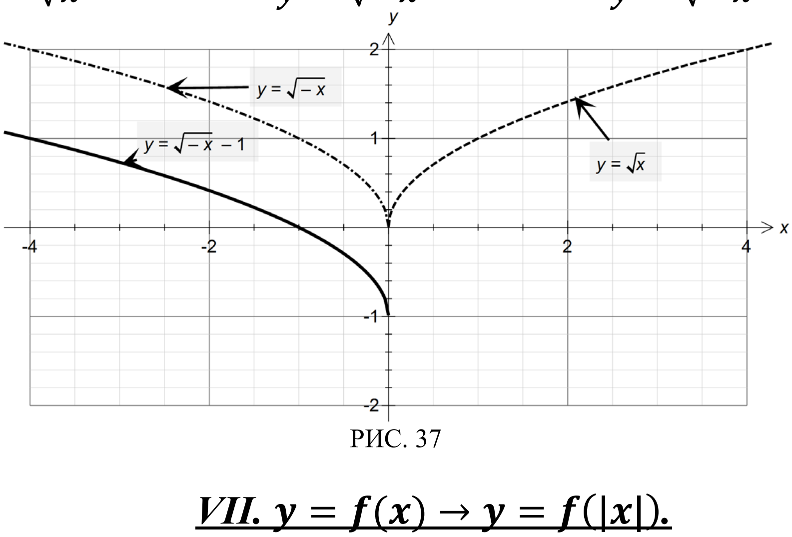


РИС. 37

VII. $y = f(x) \to y = f(|x|)$.

Заметим, что функция $y = f(|x|)$ – четная, поэтому ее график симметричен относительно оси Oy. Следовательно, чтобы построить график функции $y = f(|x|)$, надо сделать следующее:

1) построить график функции $y = f(x)$;

2) убрать часть графика при $x < 0$, оставить часть графика функции $y = f(x)$ при $x \geq 0$;
3) сделать симметрию части графика функции $y = f(x)$ при $x \geq 0$ относительно оси Oy и получить часть графика функции $y = f(|x|)$ при $x < 0$.

Пример VII.1.

Построить график функции $y = x^2 - |x|$.

Заметим, что $y = f(x) = x^2 - |x| = |x|^2 - |x| = f(|x|)$.

1) Построим график функции $y = x^2 - x$.

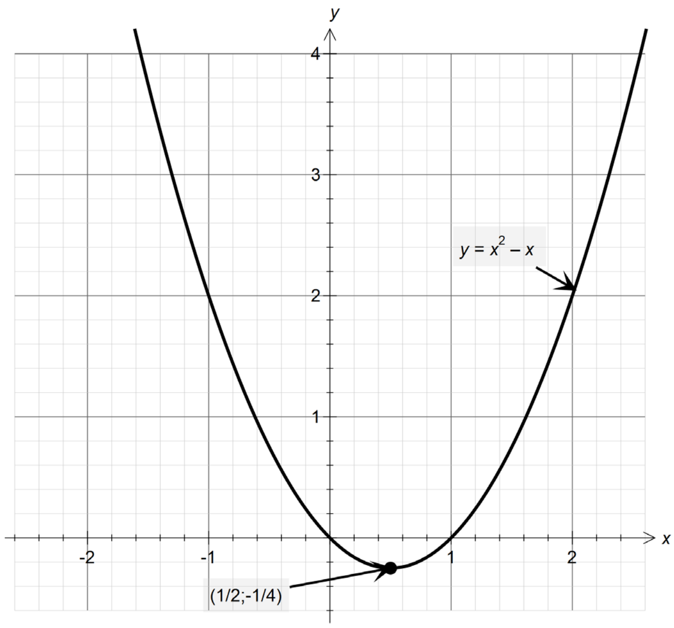


РИС. 38a

2) Оставим часть этого графика при $x \geq 0$.

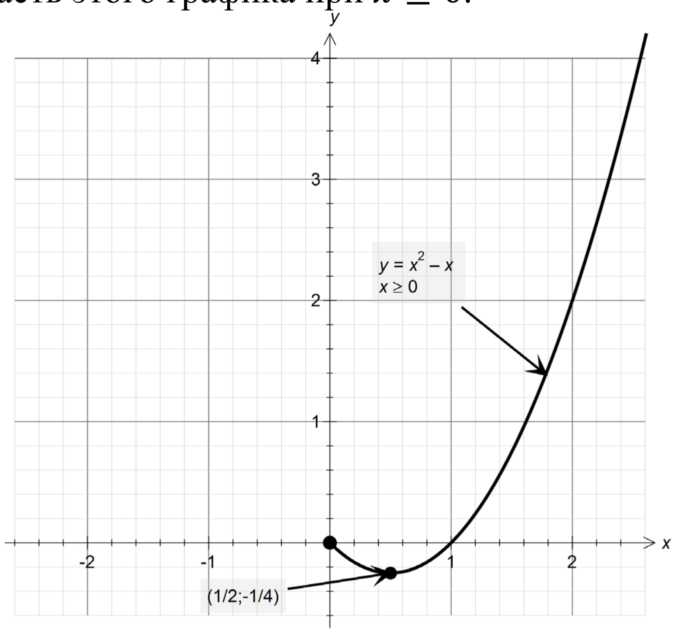


РИС. 38b

3) Сделаем симметрию этой части графика относительно оси Oy и получим график функции $y = x^2 - |x|$.

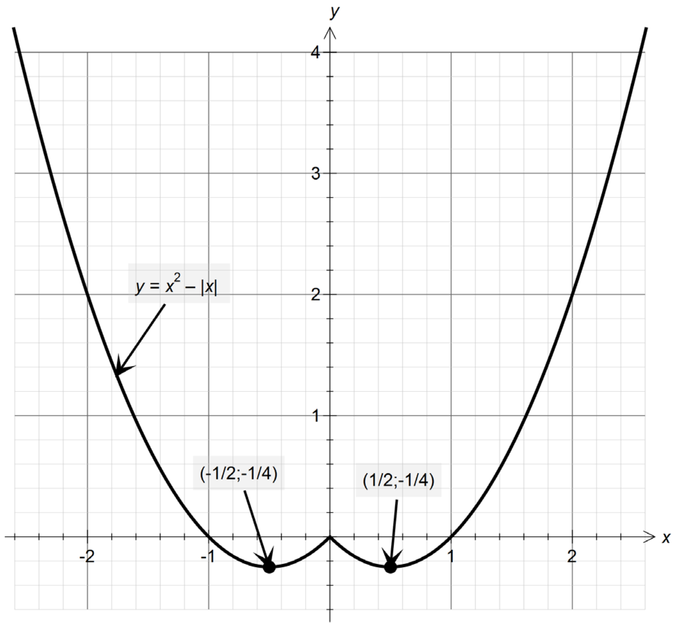


РИС. 38с

Пример VII.2.

Построить график функции $y = \frac{|x|-3}{|x|-2}$.

1) Построим график функции $y = \frac{x-3}{x-2}$:

$$y = \frac{x-3}{x-2} = \frac{x-2-1}{x-2} = 1 - \frac{1}{x-2}.$$

Напомним, что для построения этого графика нужно выполнить следующую цепочку преобразований:

$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow[\text{вдоль оси } Ox]{\text{сдвиг на 2}} y = \frac{1}{x-2} \xrightarrow[\text{оси } Ox]{\substack{\text{симметрия}\\ \text{относительно}}} y = -\frac{1}{x-2} \xrightarrow[\text{вдоль оси } Oy]{\text{сдвиг на 1}} y = -\frac{1}{x-2} + 1.$$

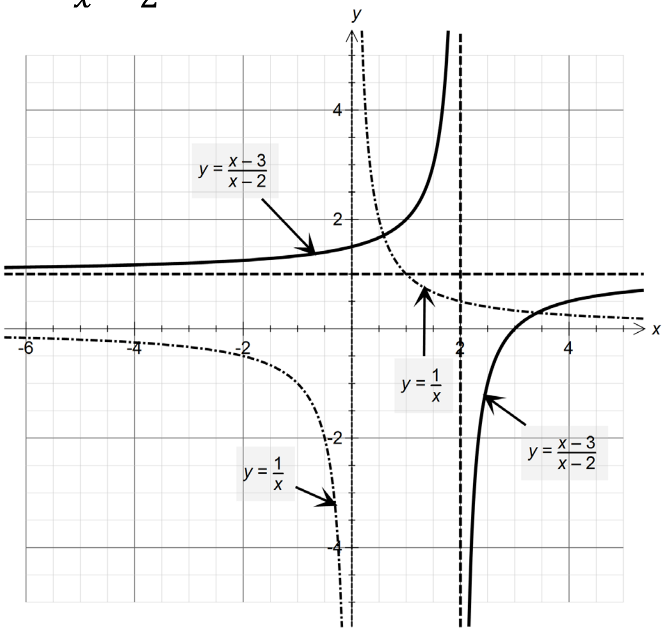


РИС. 39а

2) Оставим часть этого графика при $x \geq 0$ (уберем часть графика при $x < 0$).

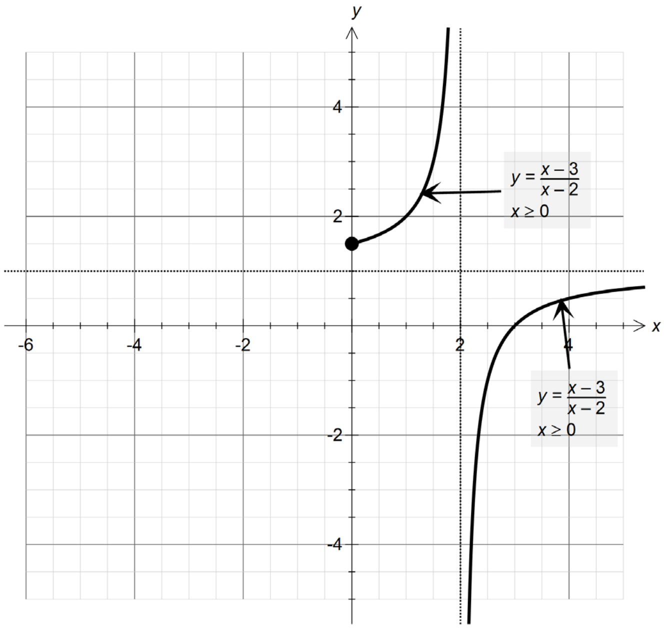


РИС. 39b

3) Сделаем симметрию этой части графика относительно оси Oy и получим график функции $y = \frac{|x|-3}{|x|-2}$.

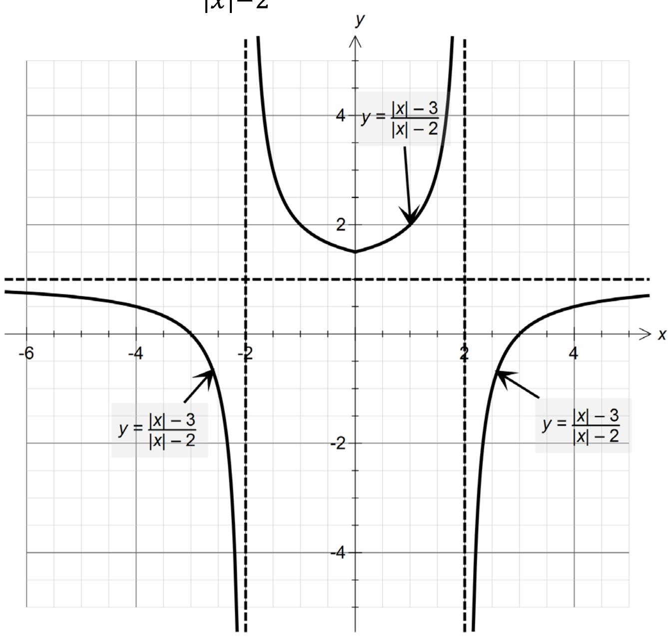


РИС. 39c

VIII. $y = f(x) \to y = |f(x)|$.

По определению модуля

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ -f(x), f(x) < 0 \end{cases}.$$

Поэтому для построения графика функции $y = |f(x)|$ надо сделать следующие действия.

1) Построить график функции $y = f(x)$.

2) Ту часть графика функции $y = f(x)$, которая находится выше оси Ox (там значения $y = f(x) \geq 0$), оставить на месте.

Ту часть графика функции $y = f(x)$, которая находится ниже оси Ox (там значения $y = f(x) < 0$), симметрично отразить относительно оси Ox.

<u>Пример VIII.1.</u>

Построить график функции $y = |x^2 - 3x - 4|$.

1) Построим график функции $y = x^2 - 3x - 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$ (график этой функции получается сдвигом графика функции $y = x^2$ на $\frac{3}{2}$ вдоль оси Ox и на $-\frac{25}{4}$ вдоль оси Oy).

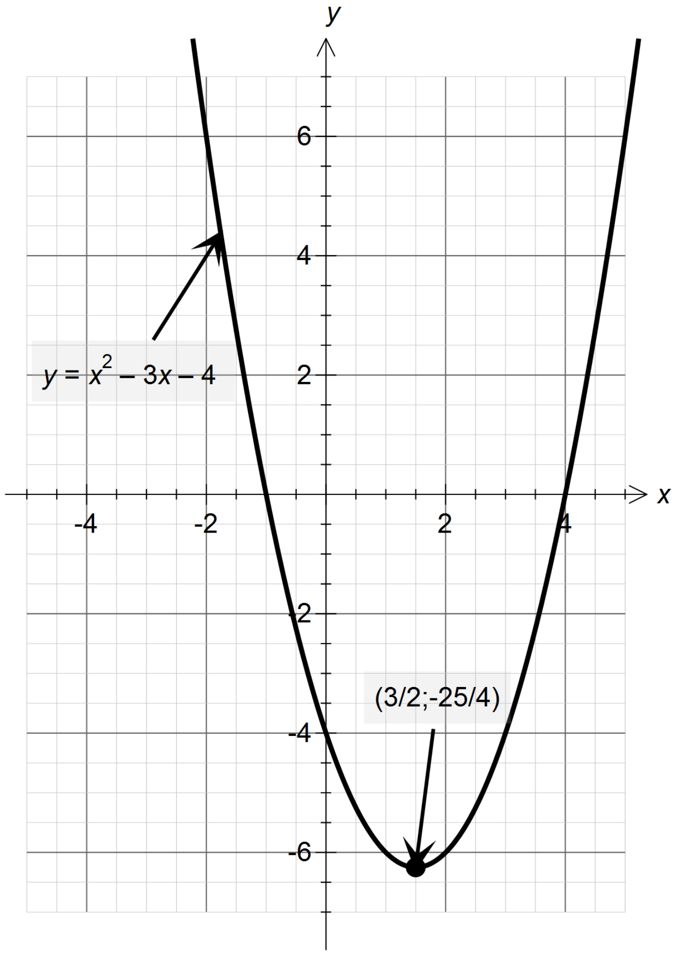


РИС. 40а

2) Построим график функции $y = |f(x)| = |x^2 - 3x - 4|$.

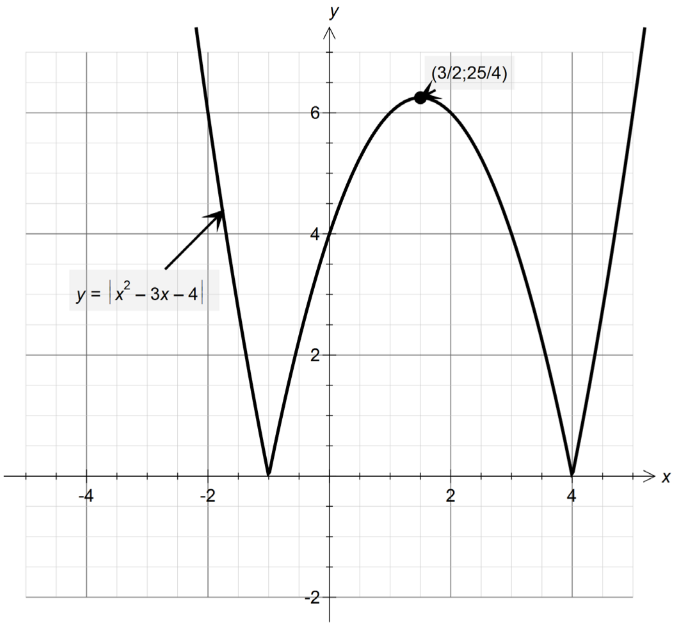


РИС. 40b

Пример VIII.2.

Построить график функции $y = \left|\frac{2x+3}{x-1}\right|$.

1) Построим график функции $y = \frac{2x+3}{x-1} = 2 \cdot \frac{x+\frac{3}{2}}{x-1} = 2 \cdot \frac{x-1+1+\frac{3}{2}}{x-1} =$

$= 2\left(1 + \frac{\frac{5}{2}}{x-1}\right) = 2 + \frac{5}{x-1}$.

Напомним, что для построения графика этой функции нужно сделать следующую цепочку преобразований:

$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow[\text{вдоль оси } Ox]{\text{сдвиг на 1}} y = \frac{1}{x-1} \xrightarrow[\text{оси } Ox]{\substack{\text{растяжение} \\ \text{в 5 раз от}}} y = 5 \cdot \frac{1}{x-1} \xrightarrow[\text{вдоль оси } Oy]{\text{сдвиг на 2}} y = 2 + \frac{5}{x-1}.$$

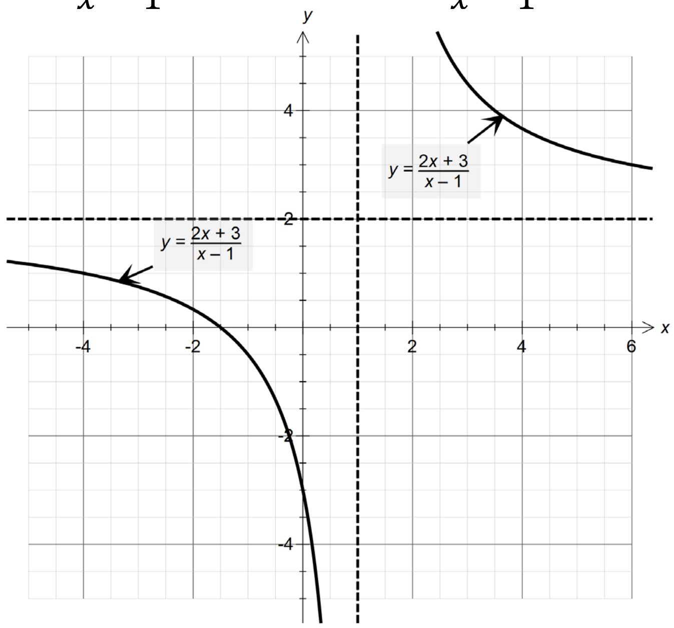


РИС. 41a

2) Построим график функции $y = \left|\frac{2x+3}{x-1}\right|$.

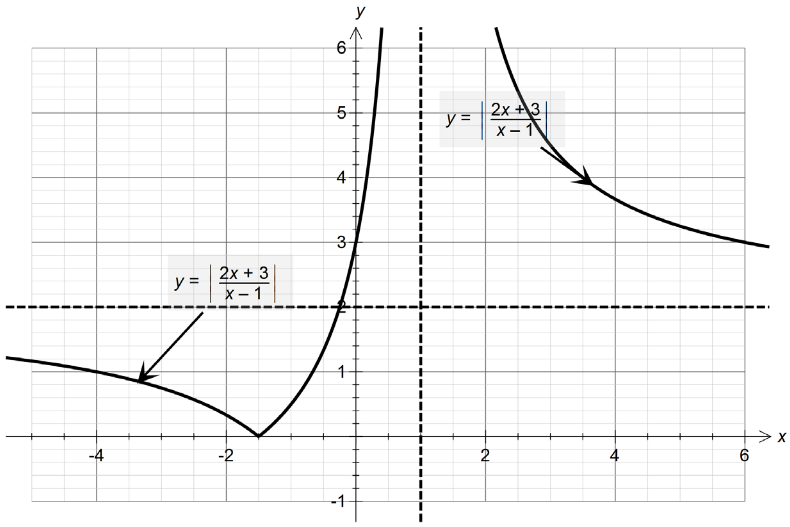


РИС. 41b

Пример VIII.3.

Построить график функции $y = |2^x - 3|$.

1) Построим график функции $y = 2^x - 3$ (построим график функции $y = 2^x$ и сделаем сдвиг на величину -3 вдоль оси Oy).

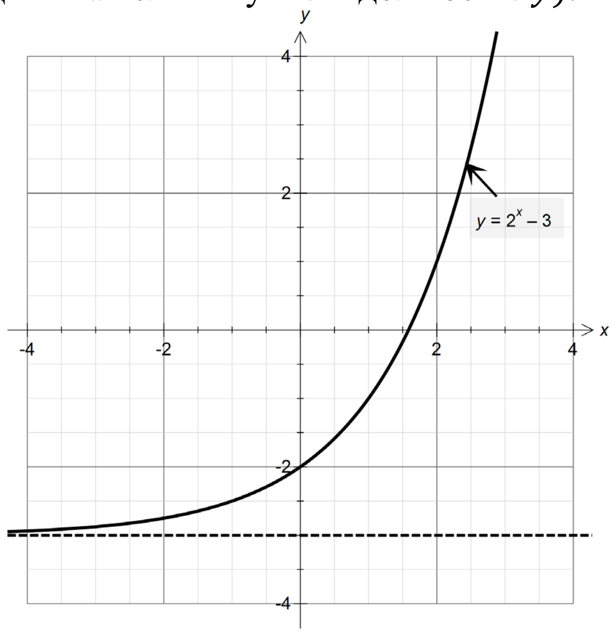


РИС. 42a

2) Построим график функции $y = |2^x - 3|$. Заметим, что при симметрии относительно оси Ox горизонтальная асимптота $y \equiv -3$ переходит в асимптоту $y \equiv 3$.

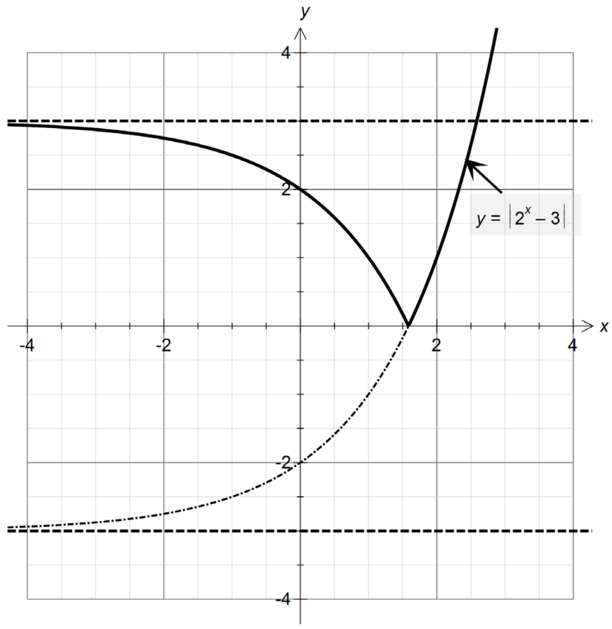


РИС. 42b

IX. Построение графика функции $y = f(kx + b)$.

1) Пусть $k > 0$. Тогда построение графика функции $y = f(kx + b) = f\left(k\left(x + \frac{b}{k}\right)\right)$ сводится к следующим преобразованиям:

$$y = f(x) \xrightarrow[Oy \text{ в } k \text{ раз}]{\text{сжатие к оси}} y = f(kx) \xrightarrow[\text{вдоь оси } Ox]{\text{сдвиг на } -\frac{b}{k}} y = f\left(k\left(x + \frac{b}{k}\right)\right).$$

2) Пусть $k < 0$. Тогда построение графика функции $y = f(kx + b) = f\left(k\left(x + \frac{b}{k}\right)\right)$ сводится к следующим преобразованиям (заметим, что при $k < 0$ выполняется $k = -|k|$):

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{к оси } Oy]{\text{сжатие в } |k| \text{ раз}} y = f(|k|x) \xrightarrow[\text{оси } Oy]{\text{симметрия относительно}} y = f(kx) \xrightarrow[\text{вдоь оси } Ox]{\text{сдвиг на } -\frac{b}{k}}$$

$$\longrightarrow y = f\left(k\left(x + \frac{b}{k}\right)\right).$$

Пример IX.1.

Построить график функции $y = \log_2(2x + 3)$.

Преобразуем выражение, задающее функцию, к следующему виду: $y = \log_2(2x + 3) = \log_2\left(2\left(x + \frac{3}{2}\right)\right)$ и проделаем цепочку преобразований

$$y = \log_2 x \xrightarrow[\text{к оси } Oy]{\text{сжатие в 2 раза}} y = \log_2(2x) \xrightarrow[\text{вдоь оси } Ox]{\text{сдвиг на } -\frac{3}{2}} y = \log_2\left(2\left(x + \frac{3}{2}\right)\right).$$

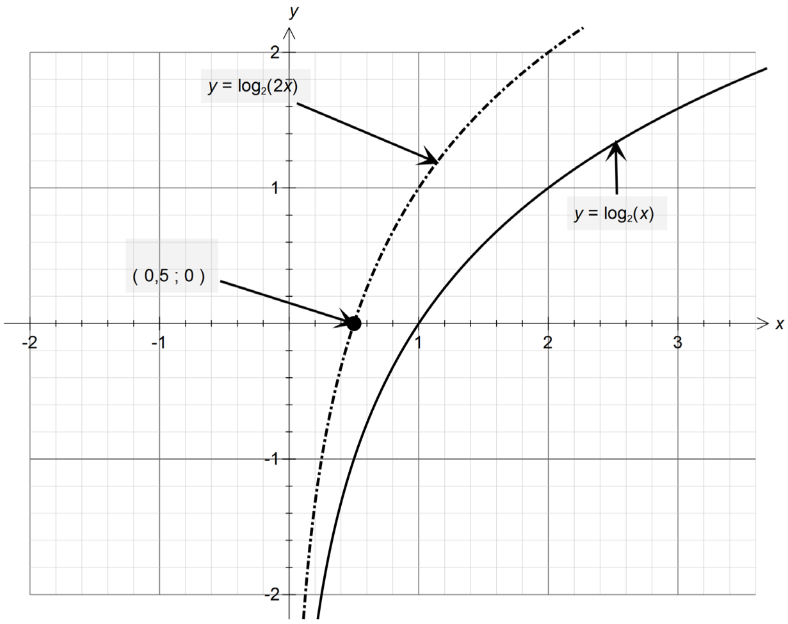


РИС. 43a

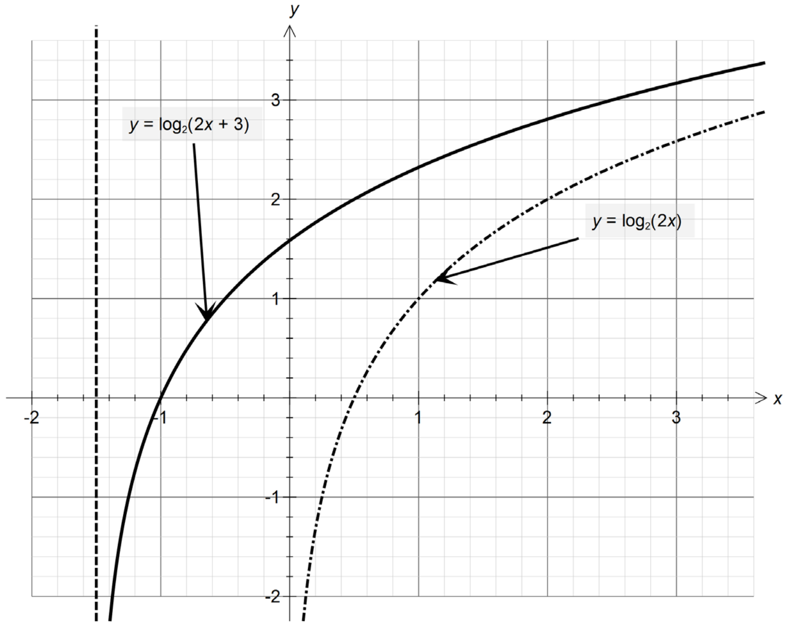


РИС. 43b

<u>Пример IX.2.</u>

Построить график функции $y = \log_2(-2x + 2)$.

Преобразуем функцию к виду $y = \log_2(-2x + 2) = \log_2\big(-2(x - 1)\big)$ и проделаем следующую цепочку преобразований:

$$y = \log_2 x \xrightarrow[\text{к оси } Oy]{\text{сжатие в 2 раза}} y = \log_2 2x \xrightarrow[\text{оси } Oy]{\substack{\text{симметрия} \\ \text{относительно}}} y = \log_2(-2x) \xrightarrow[\text{вдоь оси } Ox]{\text{сдвиг на 1}} y$$
$$= \log_2\big(-2(x - 1)\big).$$

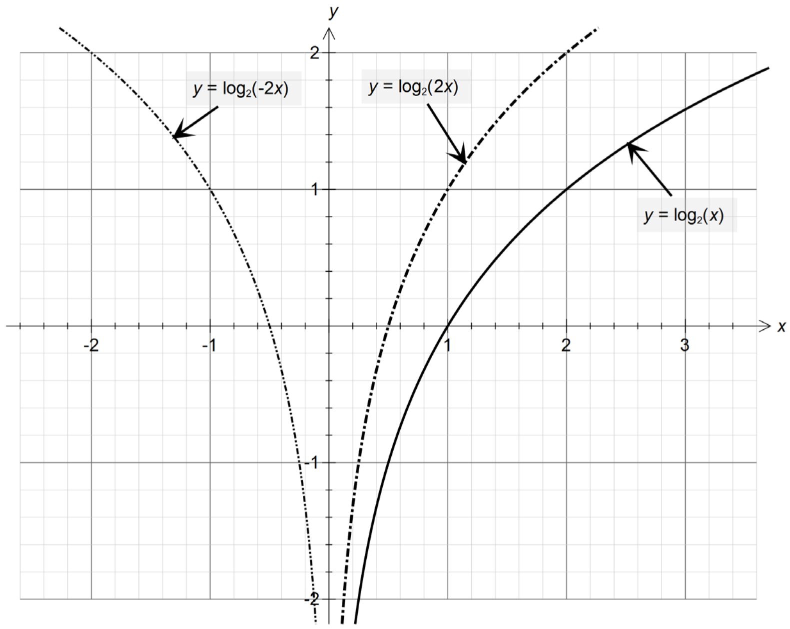


РИС. 44a

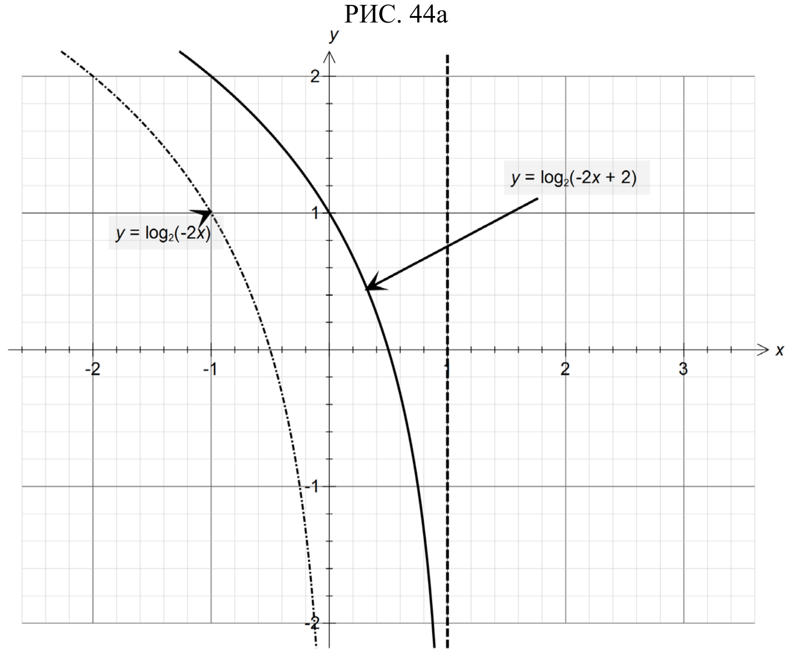


РИС. 44b

<u>Пример IX.3.</u>

Построить график функции $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Заметим, что $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$ (по формулам приведения). Но давайте пока «не обратим на это внимания», то есть построим график функции в «исходном виде», а затем посмотрим, получим ли мы график функции $y = \cos 2x$.

Чтобы построить график функции $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$, надо сделать следующие преобразования:

$$y = \sin x \xrightarrow[\text{к оси } Oy]{\text{сжатие в 2 раза}} y = \sin 2x \xrightarrow[\text{вдоль оси } Ox]{\text{сдвиг на} -\frac{\pi}{4}} y = \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

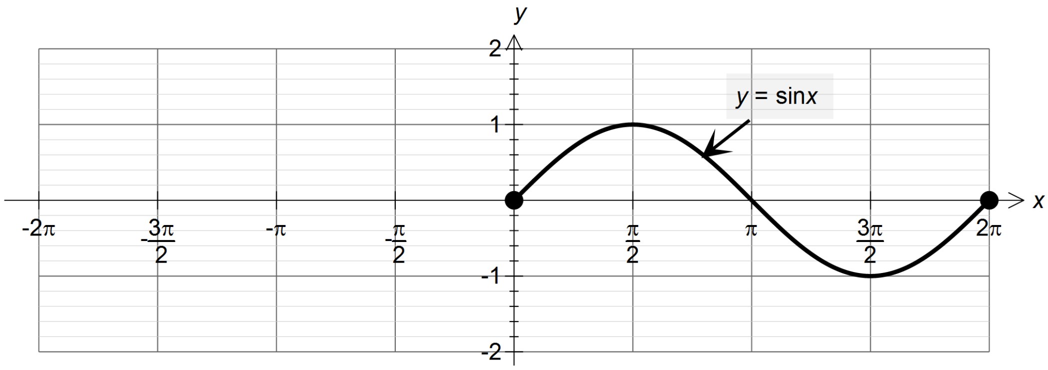


РИС. 45a

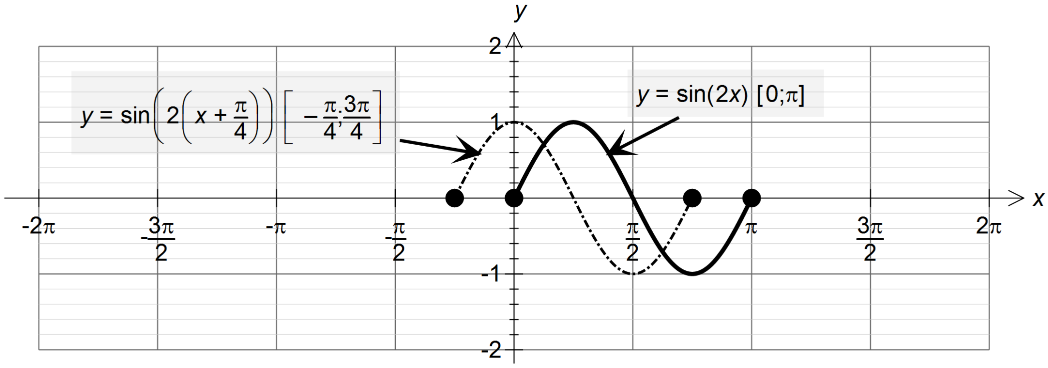


РИС. 45b

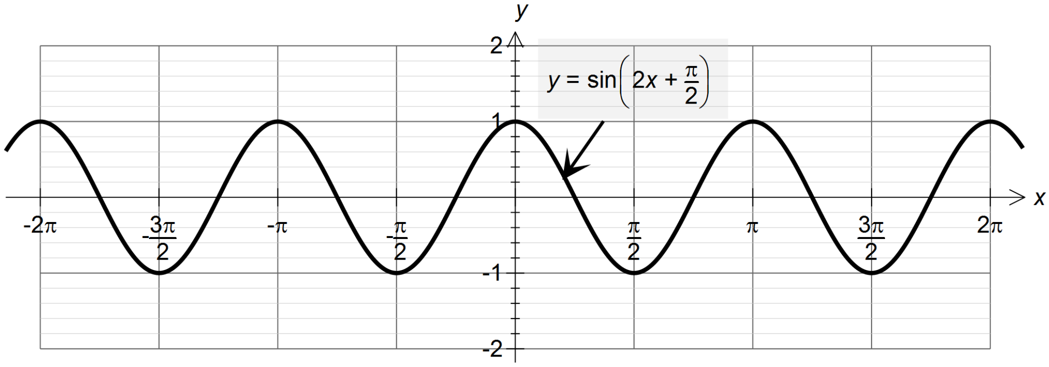


РИС. 45c

***Замечание*.**

Так как $y = \sin x$ – периодическая функция с минимальным периодом $T = 2\pi$, то достаточно сделать все преобразования, начав с любого отрезка длины 2π, например, с отрезка $x \in [0; 2\pi]$, а затем периодически продолжить.

Обратите внимание: мы получили график функции $y = \cos 2x$.

Пример IX.4.

Построить график функции $y = \sqrt{-2x - 4}$.

Для построения графика функции $y = \sqrt{-2x - 4} = \sqrt{-2(x + 2)}$ нужно сделать следующую цепочку преобразований:

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow[]{\substack{\text{сжатие} \\ \text{в 2 раза} \\ \text{к оси } Oy}} y = \sqrt{2x} \xrightarrow[]{\substack{\text{симметрия} \\ \text{относительно} \\ \text{оси } Oy}} y = \sqrt{-2x} \xrightarrow[]{\substack{\text{сдвиг на} -2 \\ \text{вдоль оси } Ox}} y = \sqrt{-2(x + 2)}.$$

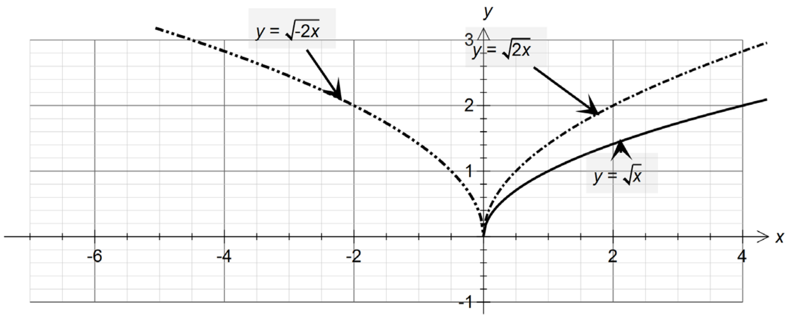


РИС. 46a

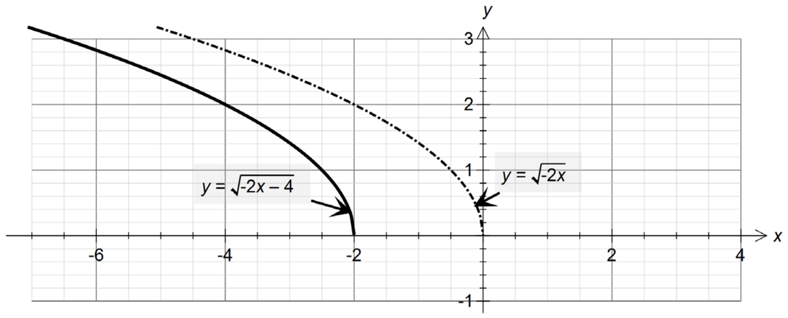


РИС. 46b

X. Преобразование графиков обратных тригонометрических функций.

Пример X.1.

Построить график функции $y = \arcsin(2x - 1)$.

Чтобы построить график функции $y = \arcsin(2x - 1) = \arcsin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$, выполним следующую цепочку преобразований:

$$y = \arcsin x \xrightarrow[\text{к оси } Oy]{\substack{\text{сжатие} \\ \text{в 2 раза}}} y = \arcsin 2x \xrightarrow[\text{вдоь оси } Ox]{\text{сдвиг на } \frac{1}{2}} y = \arcsin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right).$$

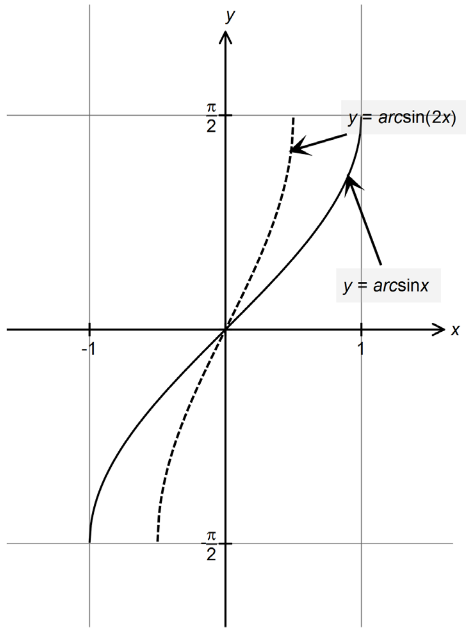


РИС. 47a

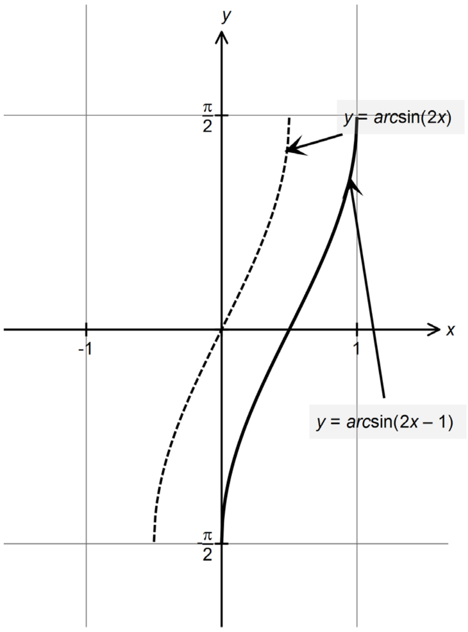


РИС. 47b

<u>Пример X.2.</u>

Построить график функции $y = \arccos\left(\frac{x}{2} + 3\right) - \frac{\pi}{2}$.

Для построения графика заданной функции $y = \arccos\left(\frac{x}{2} + 3\right) - \frac{\pi}{2} = = \arccos\left(\frac{1}{2}(x + 6)\right) - \frac{\pi}{2}$ выполним следующую цепочку преобразований:

$$y = \arccos x \xrightarrow[\text{к оси } Oy]{\text{сжатие в } \frac{1}{2} \text{ раза}} y = \arccos\frac{x}{2} \xrightarrow[\text{вдоль оси } Ox]{\text{сдвиг на } -6}$$

$$\mathrm{y} = \arccos\left(\frac{1}{2}(x + 6)\right) \xrightarrow[\text{вдоль оси } Oy]{\text{сдвиг на } -\frac{\pi}{2}} \mathrm{y} = \arccos\left(\frac{1}{2}(x + 6)\right) - \frac{\pi}{2}.$$

<u>Замечание.</u>

Сжатие к оси Oy с коэффициентом $\frac{1}{2}$ – это растяжение от оси Oy с коэффициентом 2.

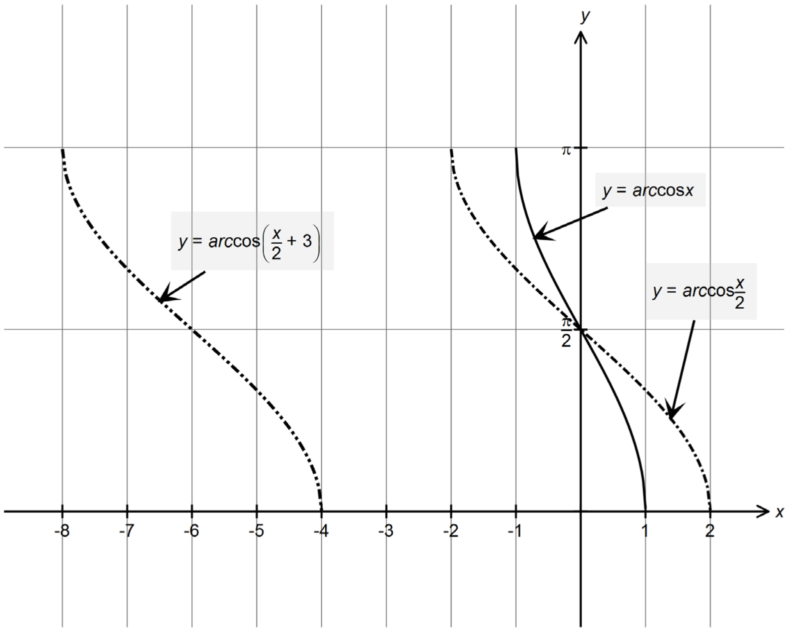


РИС. 48a

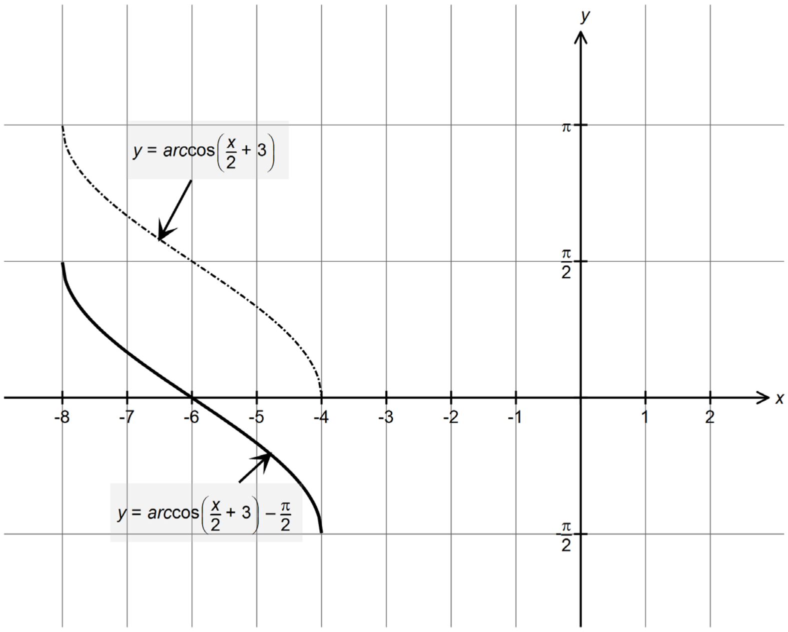


РИС. 48b

<u>Пример X.3.</u>

Построить график функции $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-3}{4}\right)$.

Для построения графика функции $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-3}{4}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)\right)$ сделаем следующую цепочку преобразований:

$$y = \operatorname{arctg} x \xrightarrow[\text{к оси } Oy]{\substack{\text{сжатие} \\ \text{в } \frac{1}{2} \text{ раза}}} y = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}x \xrightarrow[\text{вдоь оси } Ox]{\text{сдвиг на } \frac{3}{2}} y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)\right).$$

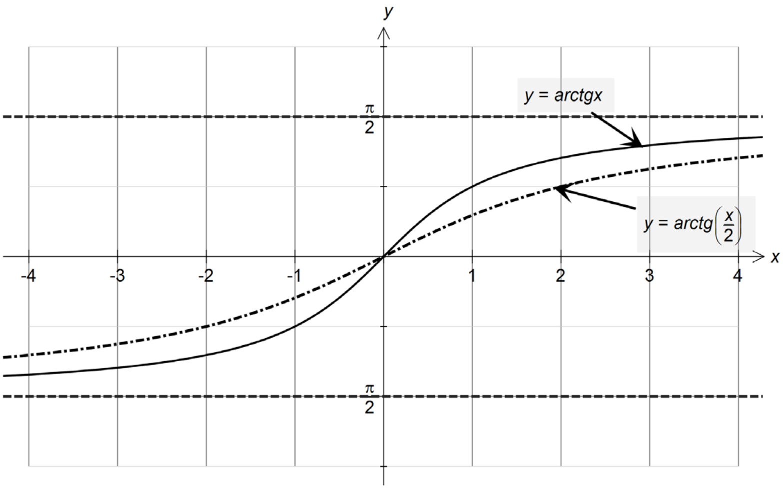


РИС. 49a

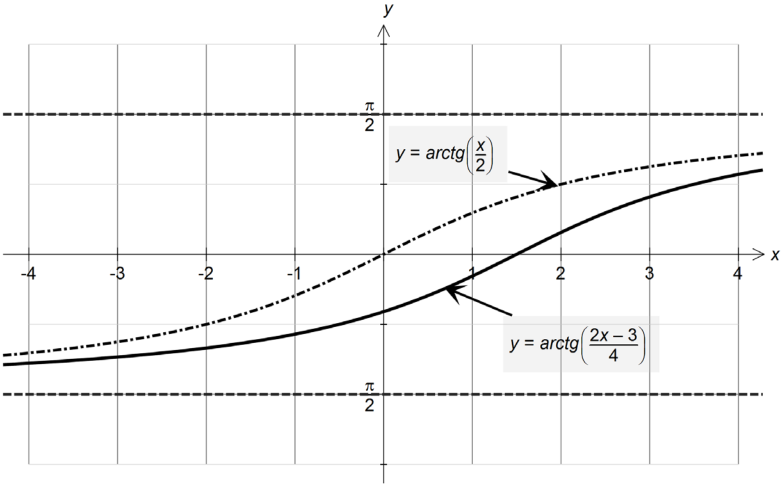


РИС. 49b

XI. Построение графиков сложных функций.

Речь пойдет о построении эскизов графиков функций $y = F(x)$, которые могут быть представлены в виде: $y = F(x) = f(\varphi(x))$. В этом случае для вычисления значения $F(x)$ при каждом значении $x \in D_F$ надо сначала вычислить значение $z = \varphi(x)$, а затем $F(x) = f(z) = f(\varphi(x))$.

Для построения графика такой функции надо проделать следующую работу. Нарисовать (лучше именно в таком порядке!) следующие системы координат

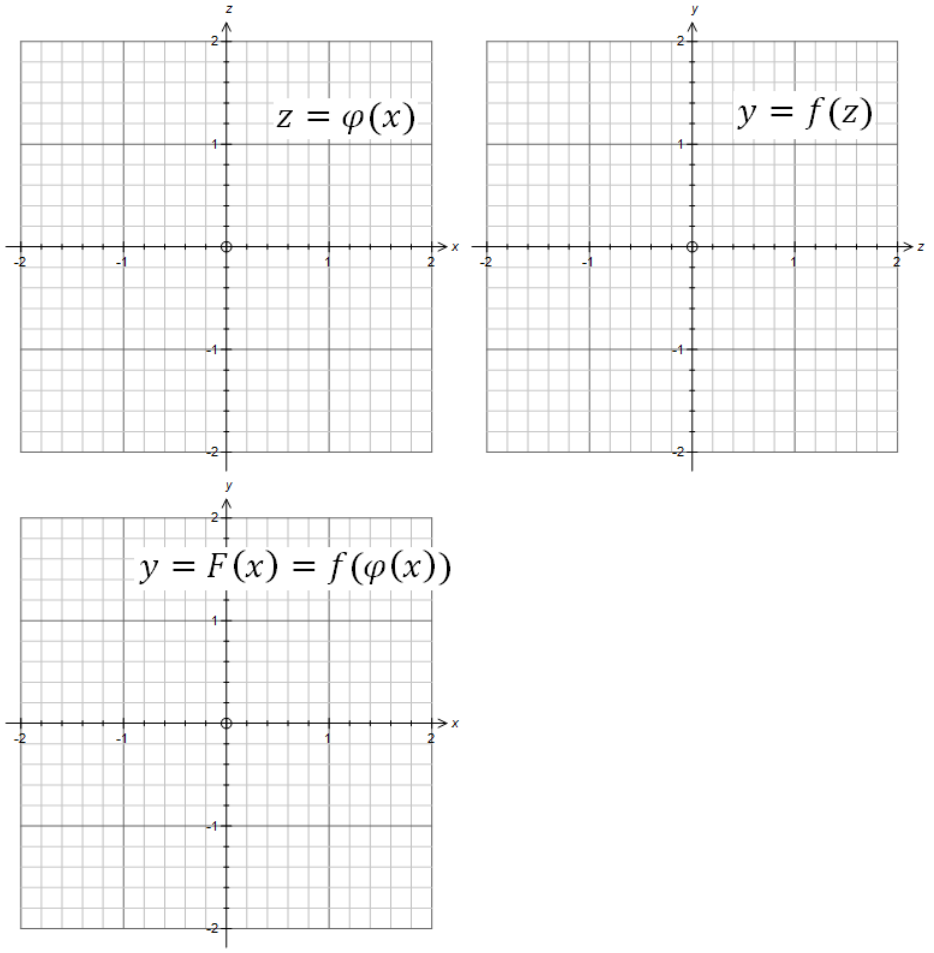


РИС. 50

В первой системе координат построить график функции $z = \varphi(x)$. Во второй системе координат построить график функции $y = f(z)$. В третьей системе координат получить график функции $y = F(x) = f(\varphi(x))$, проанализировав графики функций $z = \varphi(x)$ и $y = f(z)$. Отметим, что область определения функции $z = \varphi(x)$ может быть только такой, чтобы область значений функции $z = \varphi(x)$ содержалась в области определения функции $y = f(z)$.

Будем применять следующие, может быть «немного странные», но, как нам кажется, очень удобные обозначения.

1) Запись «$x: (-\infty \uparrow 2]$» будет обозначать, что переменная x возрастает от $-\infty$ до 2, причем, значение 2 переменная x также принимает.

2) Запись «$y: [3 \downarrow -1)$» будет обозначать, что переменная y убывает от 3 до -1, при этом значение 3 переменная y принимает, а значение -1 – не принимает.

Для лучшего понимания связи между графиками трех функций их лучше изображать в одном месте. Поэтому пояснения к построению третьего графика мы будем приводить после того, как график уже будет изображен.

<u>Пример XI.1.</u>

Построить график функции $y = 3^{\frac{x-1}{x+2}}$.

В этом случае $F(x) = 3^{\frac{x-1}{x+2}}$,

$z = \varphi(x)$ имеет вид $z = \frac{x-1}{x+2}$,

$y = f(z)$ имеет вид $y = 3^z$.

<u>Замечание.</u>

Построение вспомогательных графиков мы здесь обсуждать уже не будем, то есть в данном случае будем считать, что графики функций $z = \frac{x-1}{x+2}$ и $y = 3^z$ вы можете построить сами, мы только приведем их изображение.

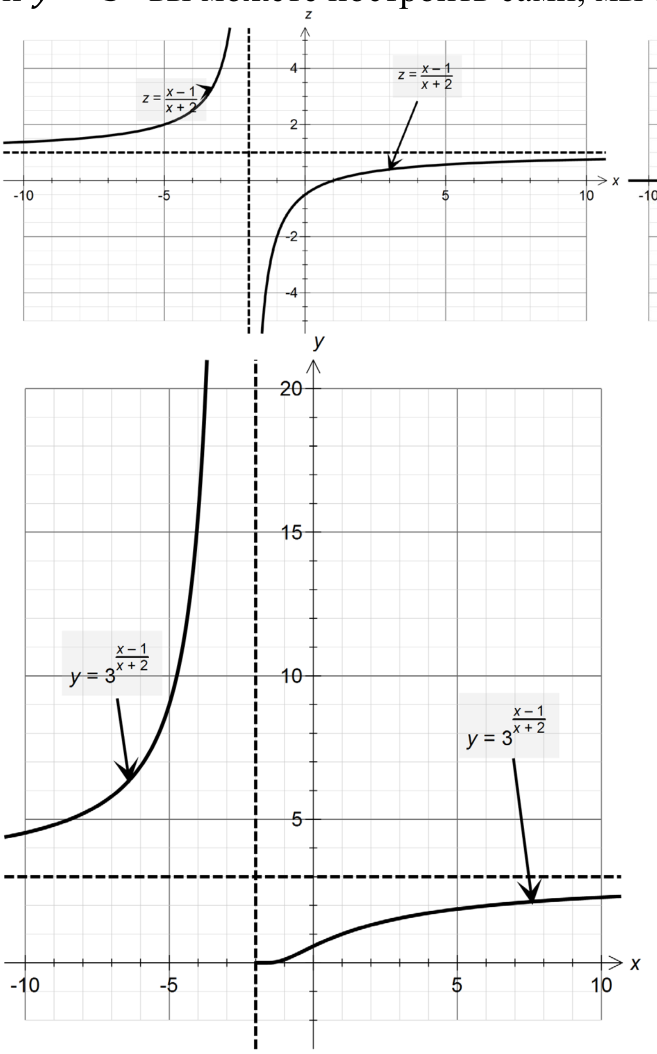


РИС. 51

Для построения графика функции $y = F(x)$ (в данном случае это функция $y = 3^{\frac{x-1}{x+2}}$) проделаем следующую работу.

Заметим, что функция $y = 3^z$ определена при любом z и при этом ***монотонно возрастает.***

Заметим, что функция $z = \frac{x-1}{x+2}$ не определена при $x = -2$, монотонно возрастает при $x \in (-\infty; -2)$ и при $x \in (-2; +\infty)$.

Разобьем ось $0x$ на промежутки монотонности функции $z(x)$ (в нашем случае это функция $z = \frac{x-1}{x+2}$, а промежутки ее возрастания $x \in (-\infty; -2)$ и $x \in (-2; +\infty)$).

Проведем следующие рассуждения.

1) $\begin{cases} x: (-\infty \uparrow -2) \\ z: (1 \uparrow +\infty). \end{cases}$

Эта запись означает, что, когда x растет от $-\infty$ до -2, тогда z растет от 1 до $+\infty$ (этот результат мы получаем из первого графика).

2) $\begin{cases} z: (1 \uparrow +\infty) \\ y: (3 \uparrow +\infty). \end{cases}$

Эта запись означает, что, когда z растет от 1 до $+\infty$, тогда y растет от 3 до $+\infty$ (этот результат мы получаем из второго графика).

3) Теперь «зачеркнем» промежуточную информацию о переменной z и оставим только информацию о переменных x и y:

$\begin{cases} x: (-\infty \uparrow -2) \\ y: (3 \uparrow +\infty). \end{cases}$

Эта запись означает, что когда x растет от $-\infty$ до -2, тогда y растет от 3 до $+\infty$.

Далее в системе координат Oxy рисуем плавную кривую, поведение которой соответствует полученному результату.

Аналогично рассмотрим промежуток $x \in (-2; +\infty)$.

1) $\begin{cases} x: (-2 \uparrow +\infty) \\ z: (-\infty \uparrow 1) \end{cases}$ – из первого графика.

2) $\begin{cases} z: (-\infty \uparrow 1) \\ y: (0 \uparrow 3) \end{cases}$ – из второго графика.

3) «Зачеркнем» промежуточную информацию о переменной z и оставим только информацию о переменных x и y:

$\begin{cases} x: (-2 \uparrow +\infty) \\ y: (0 \uparrow 3). \end{cases}$

Далее в системе координат Oxy рисуем плавную кривую, поведение которой соответствует полученному результату.

***Замечание*.**

Асимптота $z = 1$ в первой системе координат перейдет в асимптоту $y = 3$ в третьей системе координат.

***Замечание*.**

Вертикальная асимптота $x = -2$ останется на месте (действительно, если функция $\mathrm{z} = \varphi(\mathrm{x})$ была не определена в точке $x = -2$, то и функция $y = f(\varphi(x))$ не будет определена при $x = -2$).

Построение третьего графика лучше начинать с построения вертикальных и горизонтальных асимптот.

Пример XI.2.

Построить график функции y=$\log_{\frac{1}{2}} |x^2 - x|$.

Построим графики функций $z = |x^2 - x|$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} z$. Проанализируем их поведение и получим график заданной функции $\mathrm{y} = \log_{\frac{1}{2}} |x^2 - x|$.

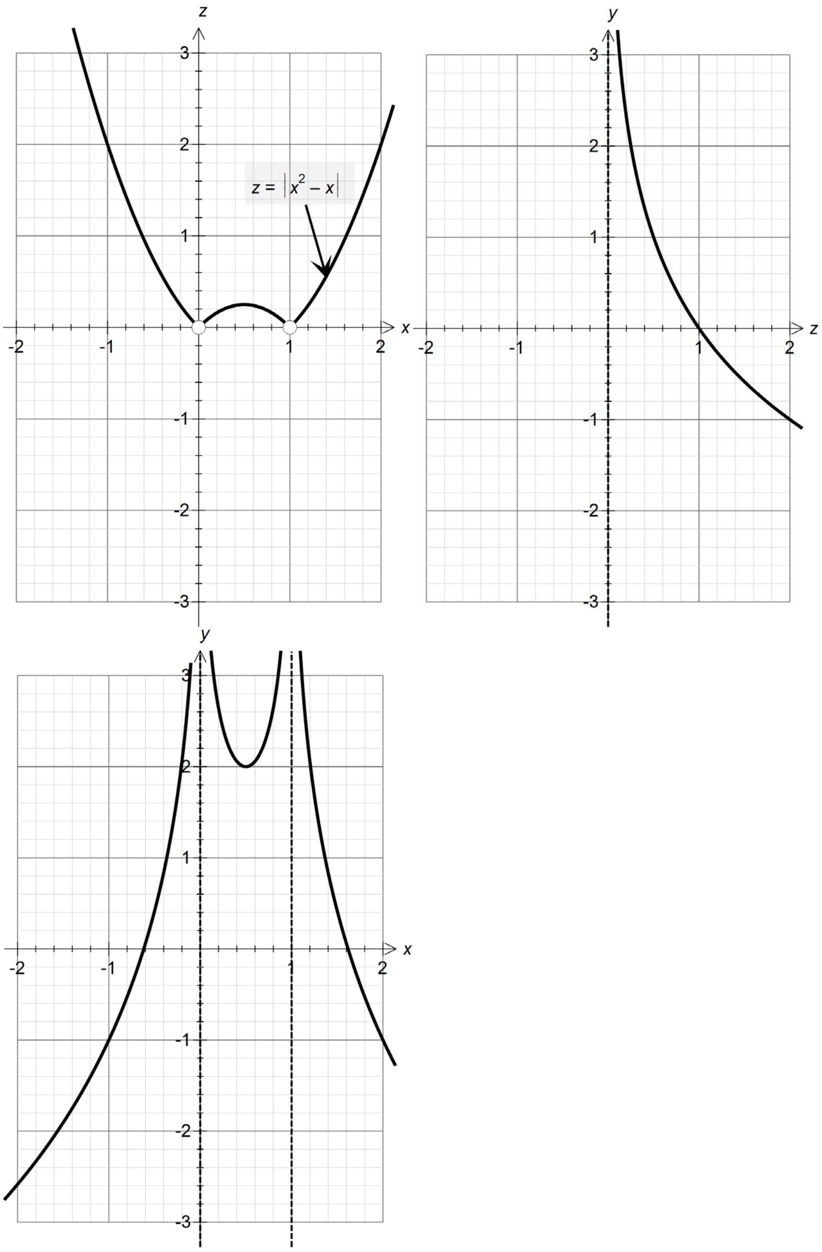


РИС. 52

Итак, мы построили графики первых двух функций. Заметим, что функция $y = \log_{\frac{1}{2}} z$ определена только при $z > 0$ (и монотонно убывает). Поэтому мы должны рассмотреть функцию $z = |x^2 - x|$ только при тех значениях x, при которых значения $z = |x^2 - x| > 0$, то есть мы должны убрать все точки графика, лежащие на оси Ox и ниже оси Ox. В данном случае – это точки графика, которые получаются при $x = 0$ и $x = 1$. Это приведет к тому, что в системе координат Oxy точек графика функции y=$\log_{\frac{1}{2}} |x^2 - x|$ на прямых $x \equiv 0$ и $x \equiv 1$ не будет. Отметим пунктиром прямые $x \equiv 0$ и $x \equiv 1$ (они станут вертикальными асимптотами графика функции y=$\log_{\frac{1}{2}} |x^2 - x|$).

Интервалами монотонности функции $z = |x^2 - x|$ являются $(-\infty; 0)$, $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ и $(1; +\infty)$. Рассмотрим отдельно каждый из них.

1) $\begin{cases} x: (-\infty \uparrow 0) \\ z: (+\infty \downarrow 0) \end{cases}$ – из первого графика.

$\begin{cases} z: (+\infty \downarrow 0) \\ y: (-\infty \uparrow +\infty) \end{cases}$ – из второго графика.

Из первых двух $\Rightarrow \begin{cases} x: (-\infty \uparrow 0) \\ y: (-\infty \uparrow +\infty). \end{cases}$

Аналогично,

2) $\begin{cases} x: \left(0 \uparrow \frac{1}{2}\right] \\ z: \left(0 \uparrow \frac{1}{4}\right] \end{cases}$ – из первого графика.

$\begin{cases} z: \left(0 \uparrow \frac{1}{4}\right] \\ y: (+\infty \downarrow 2] \end{cases}$ – из второго графика.

Из первых двух $\Rightarrow \begin{cases} x: \left(0 \uparrow \frac{1}{2}\right] \\ y: (+\infty \downarrow 2]. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x: \left(\frac{1}{2} \uparrow 1\right) \\ z: \left(\frac{1}{4} \downarrow 0\right) \end{cases}$ – из первого графика.

$\begin{cases} z: \left(\frac{1}{4} \downarrow 0\right) \\ y: (2 \uparrow +\infty) \end{cases}$ – из второго графика.

Из первых двух $\Rightarrow \begin{cases} x: \left(\frac{1}{2} \uparrow 1\right) \\ y: (2 \uparrow +\infty). \end{cases}$

4) $\begin{cases} x: (1 \uparrow +\infty) \\ z: (0 \uparrow +\infty) \end{cases}$ – из первого графика.

$\begin{cases} z: (0 \uparrow +\infty) \\ y: (+\infty \downarrow -\infty) \end{cases}$ – из второго графика.

Из первых двух $\Rightarrow \begin{cases} x: (1 \uparrow +\infty) \\ y: (+\infty \downarrow -\infty). \end{cases}$

В системе координат Oxy на каждом из четырех промежутков проведем плавную линию, которая соответствует результатам, полученным в пунктах 1–4. Получим график функции $y = \log_{\frac{1}{2}} |x^2 - x|$.

<u>Пример XI.3.</u>

Построить график функции $y = \log_2 \frac{x-2}{x-3}$.

Построим графики функций $z = \frac{x-2}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3}$ и $y = \log_2 z$. Проанализируем их поведение и получим график заданной функции $y = \log_2 \frac{x-2}{x-3}$.

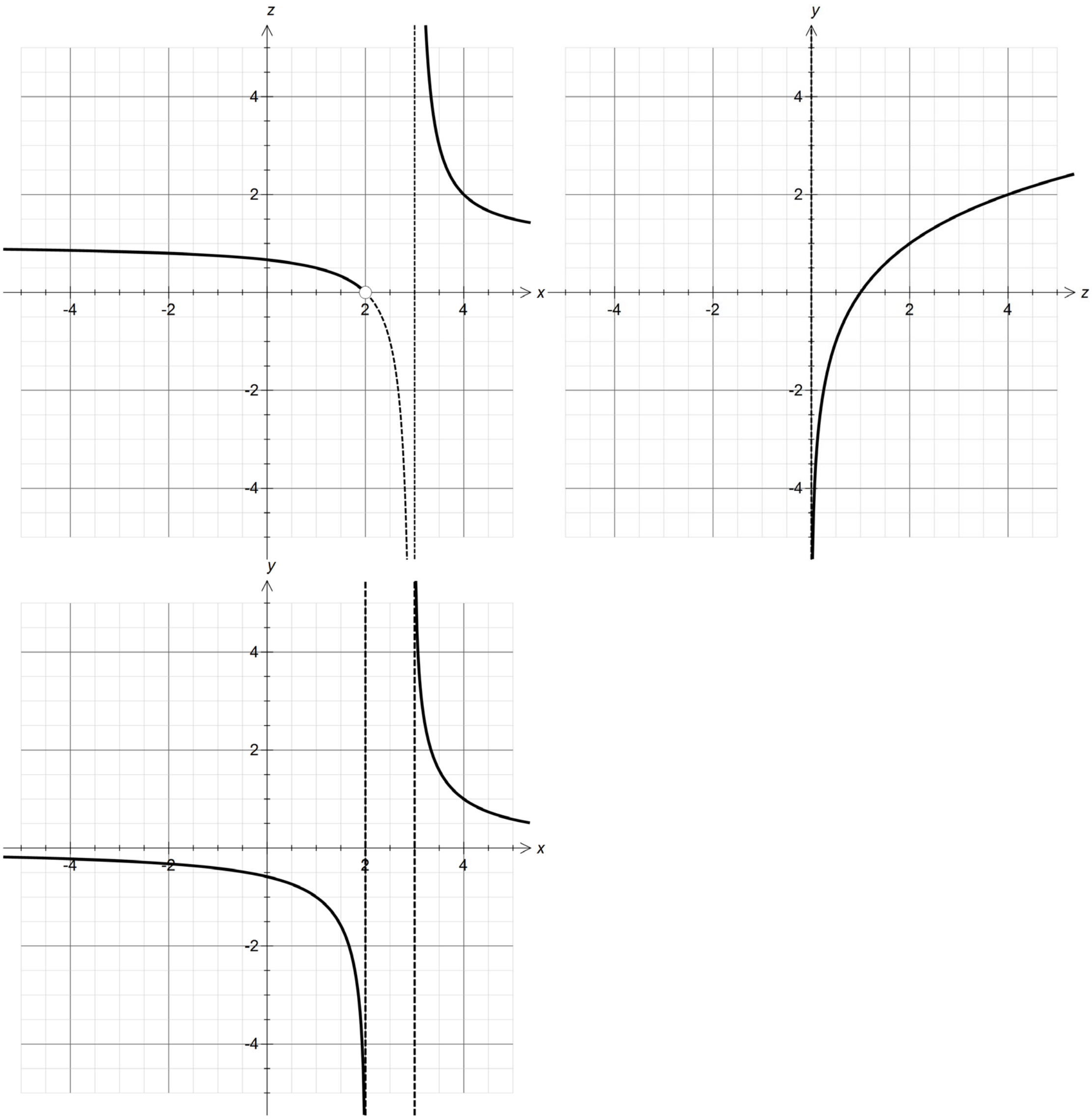


РИС. 53

Заметим, что областью определения функции $y = \log_2 z$ является множество $\{z > 0\}$, и функция на этом множестве монотонно возрастает. Следовательно, мы должны рассмотреть функцию $z = \frac{x-2}{x-3}$ только при тех значениях x, при которых значения $z = \frac{x-2}{x-3} > 0$, то есть мы должны убрать с графика все точки, лежащие на оси Ox и ниже оси Ox. В данном случае – это точки графика, которые получаются при $x \in [2; 3]$, следовательно, будем рассматривать функцию $z = \frac{x-2}{x-3}$ только на множестве $D = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

Горизонтальная асимптота $z \equiv 1$ на первом графике перейдет в горизонтальную асимптоту $y = \log_2 1 = 0$ (то есть $y \equiv 0$) на третьем графике.

Рассмотрим участки монотонности функции $\begin{cases} z = \frac{x-2}{x-3} \\ z > 0. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x: (-\infty \uparrow 2) \\ z: (1 \downarrow 0) \end{cases}$ – из первого графика.

$\begin{cases} z: (1 \downarrow 0) \\ y: (0 \downarrow -\infty) \end{cases}$ – из второго графика.

Из первых двух $\Rightarrow \begin{cases} x: (-\infty \uparrow 2) \\ y: (0 \downarrow -\infty). \end{cases}$

2) $\begin{cases} x: (3 \uparrow +\infty) \\ z: (+\infty \downarrow 1) \end{cases}$ – из первого графика.

$\begin{cases} z: (+\infty \downarrow 1) \\ y: (+\infty \downarrow 0) \end{cases}$ – из второго графика.

Из первых двух $\Rightarrow \begin{cases} x: (3 \uparrow +\infty) \\ y: (+\infty \downarrow 0). \end{cases}$

В системе координат Oxy на каждом промежутке проведем плавную линию, которая соответствует результатам, полученным в пунктах 1–2. Получим график функции $y = \log_2 \frac{x-2}{x-3}$.

<u>Пример XI.4.</u>

Построить график функции $y = \arcsin \frac{x+1}{2x-1}$.

Построим графики функций $z = \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}{x-1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{4}}{x-\frac{1}{2}}$ и $y = \arcsin z$. Проанализируем их поведение и получим график заданной функции $y = \arcsin \frac{x+1}{2x-1}$.

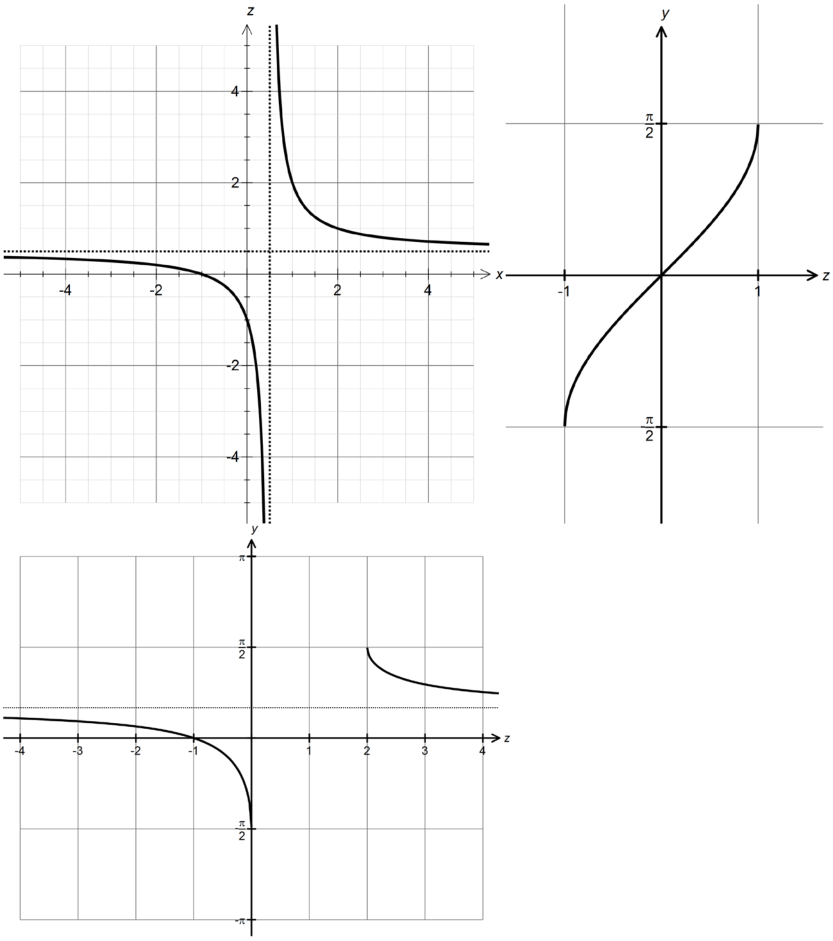


РИС. 54

Напомним, что областью определения функции $y = \arcsin z$ является отрезок $[-1; 1]$. Следовательно, на первом графике мы можем рассматривать только те точки графика функции $z = \frac{x+1}{2x-1}$, у которых $z \in [-1; 1]$ (то есть, фактически, мы должны оставить для дальнейшего рассмотрения только ту часть графика, которая находится в полосе $-1 \leq z \leq 1$). Для этого сначала потребуется найти, при каких значениях x будет выполняться $-1 \leq z \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x+1}{2x-1} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$ либо $x \geq 2$.

Заметим, что если у нас уже построен первый график, то вместо решения двойного неравенства можно решить два уравнения: $\frac{x+1}{2x-1} = -1 \Leftrightarrow x = 0$ и $\frac{x+1}{2x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$, и получить тот же результат из графика.

Асимптота $z \equiv \frac{1}{2}$, которая была на первом графике, перейдет в асимптоту $y \equiv \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ на третьем графике.

Рассмотрим участки монотонности функции $\begin{cases} z = \frac{x+1}{2x-1} \\ -1 \leq z \leq 1. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x: (-\infty \uparrow 0] \\ z: \left(\frac{1}{2} \downarrow -1\right] \end{cases}$ – из первого графика.

$$\begin{cases} z: \left(\frac{1}{2} \downarrow -1\right] \\ y: \left(\frac{\pi}{6} \downarrow -\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$ – из второго графика.

Из первых двух $\Rightarrow \begin{cases} x: (-\infty \uparrow 0] \\ y: \left(\frac{\pi}{6} \downarrow -\frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x: [2 \uparrow +\infty) \\ z: \left[1 \downarrow \frac{1}{2}\right) \end{cases}$ – из первого графика.

$$\begin{cases} z: \left[1 \downarrow \frac{1}{2}\right) \\ y: \left[\frac{\pi}{2} \downarrow \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$ – из второго графика.

Из первых двух $\Rightarrow \begin{cases} x: [2 \uparrow +\infty) \\ y: \left[\frac{\pi}{2} \downarrow \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$

В системе координат Oxy на каждом промежутке проведем плавную линию, которая соответствует результатам, полученным в пунктах 1–2. Получим график функции $y = \arcsin\frac{x+1}{2x-1}$.

Задачи для самостоятельного решения

Построить эскизы графиков функций

1. $y = -3x^2$
2. $y = \frac{1}{2}x^3$
3. $y = 2\sqrt{x}$
4. $y = -2\sin x$
5. $y = \frac{1}{2}\cos x$
6. $y = -2\operatorname{tg} x$
7. $y = \log_{1/3}(-x)$
8. $y = 3^{-x}$
9. $y = \sqrt[4]{-x}$
10. $y = \sin\frac{x}{2}$
11. $y = \cos 3x$
12. $y = \log_3(-2x)$
13. $y = \sqrt{-3x}$

41. $y = |3^x - 1|$
42. $y = \left|\sqrt{x+2} - 1\right|$
43. $y = \left|\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right|$
44. $y = \left||x-1| - 1\right|$
45. $y = \left||x+2| - 3\right|$
46. $y = \left|\arccos(x+2) - \frac{\pi}{2}\right|$
47. $y = |\log_2(x+3) - 2| - 1$
48. $y = \left|2\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\right| + 1$
49. $y = \left|\frac{x+2}{x+1}\right|$
50. $y = \left|\frac{3x+1}{x-1}\right|$
51. $y = |x| + |x-2|$

14. $y = \mathrm{ctg}\frac{x}{4}$
15. $y = (x+4)^2$
16. $y = (x-1)^3$
17. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
18. $y = \frac{1}{x+2} + 1$
19. $y = \frac{2}{x-3} - 2$
20. $y = 1 - \frac{2}{x+2}$
21. $y = 3\log_2(x+1) - 2$
22. $y = -2\log_2(4-x)$
23. $y = -2 \cdot 3^{x-2} + 1$
24. $y = 2\sin 3x - 1$
25. $y = -\cos \pi x + 2$
26. $y = \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$
27. $y = -2\sqrt{6-x} - 1$
28. $y = \frac{3x+2}{x}$
29. $y = -\frac{4x+3}{x+1}$
30. $y = -\frac{x+2}{x+5}$
31. $y = \frac{2x-8}{2x-1}$
32. $y = \frac{5x+20}{3x+12}$
33. $y = \frac{x+4}{2x+1}$
34. $y = \frac{5x-1}{3x+2}$
35. $y = 1 - 3x - 4x^2$
36. $y = 4x - x^2 - 3$
37. $y = 2|x| - x^2$
38. $y = x^2 - 3|x| + 1$
39. $y = \frac{2|x|+3}{2-|x|}$
40. $y = |x^2 + 2x - 5|$
52. $y = |x-2| + |2x+6| + x - 1$
53. $y = \frac{x+2}{|x-1|}$
54. $y = \frac{2x+4}{|3x+5|}$
55. $y = \frac{|2-x|}{4x-1}$
56. $y = 3^{\frac{x-1}{x+1}}$
57. $y = 3^{-\frac{x+2}{x+5}}$
58. $y = 2^{x^2-4x+3}$
59. $y = 2^{\sin x + \cos x}$
60. $y = 2^{-x^2+x}$
61. $y = 2^{\log_2 x}$
62. $y = 2^{\frac{|x|}{x+2}}$
63. $y = 3^{\frac{x+2}{|x-1|}}$
64. $y = \log_2\left|\frac{2x-1}{x+2}\right|$
65. $y = \log_2\frac{|x|}{x+2}$
66. $y = \log_{\frac{1}{2}}|x^2 - x|$
67. $y = \log_2|\sin x|$
68. $y = \log_2 \sin x$
69. $y = \arcsin 3x + \frac{\pi}{2}$
70. $y = -2\arccos\frac{x}{2} + \pi$
71. $y = \arcsin\frac{1}{x+2}$
72. $y = \arccos\frac{2}{x-3}$
73. $y = \mathrm{arctg}\frac{x+2}{x-3}$
74. $y = \arcsin\frac{1+x}{1-x}$
75. $y = \arccos\frac{x-1}{2x+1}$
76. $y = \mathrm{arcctg}\frac{2x-1}{x+1}$
77. $y = -2\arccos\frac{1+x}{x-1} + \pi$